

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या 2005 की अपेक्षाओं के अनुरूप शिक्षक— शिक्षा का उद्देश्य प्रत्येक छात्राध्यापक को इस प्रकार समर्थ बनाना है कि वह—

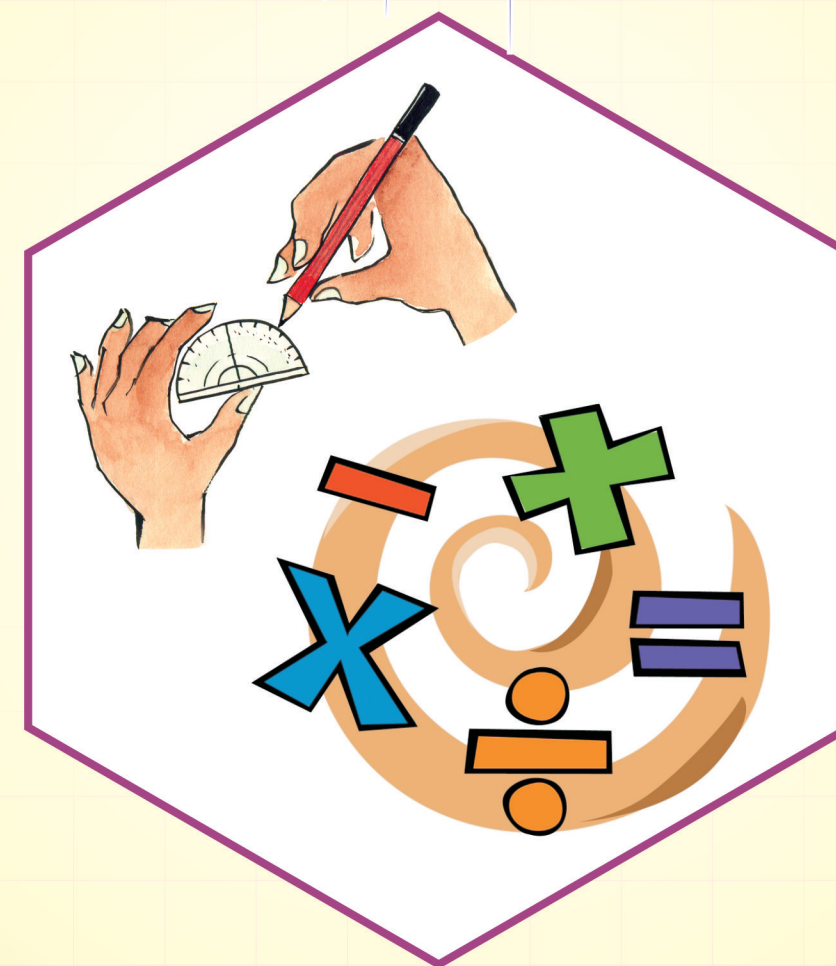
- बच्चों का ख्याल रख सके और उनके साथ रहना पसंद करे।
- सामाजिक, सांस्कृतिक और राजनैतिक संदर्भों में बच्चों को समझ सके।
- व्यक्तिगत अनुभवों से अर्थ निकालने को अधिगम अर्थात् सीखना समझे।
- सीखने के तरीके समझे, सीखने की अनुकूल परिस्थितियाँ पैदा करने के संभावित तरीके जाने तथा सीखने के प्रकार, गति तथा तरीकों के आधार पर विद्यार्थियों की विभिन्नताओं को समझे।
- ज्ञान को, चिंतनशील सीखने की सतत् उभरती प्रक्रिया माने।
- ज्ञान को पाठ्यपुस्तकों के बाह्य ज्ञान के रूप में न देखकर साझा संदर्भों और व्यक्तिगत संदर्भों में उसके निर्माण को देखे।
- उन सामाजिक, पेशेवर और प्रशासनिक संदर्भों के प्रति संवेदनशील हो जिनमें उसे काम करना है।
- ग्रहणशील हो और लगातार सीखता रहे, समाज और विश्व को बेहतर बनाने की दिशा में अपनी जिम्मेदारियों को समझ सके।
- वास्तविक परिस्थितियों में न केवल समझदारी वाले रवैये को अपनाने की उपयुक्त योग्यता का विकास करे बल्कि इस तरह की परिस्थितियों का निर्माण करने के भी योग्य बने।
- उसके भाषायी ज्ञान और दक्षता का आधार ठोस हो।
- व्यक्तिगत अपेक्षाओं, आत्मबोध, क्षमताओं, अभिरूचियों आदि की पहचान कर सके।
- अपना पेशेवर उन्मुखीकरण करने के लिए सोच समझ कर प्रयास करता रहे। यह विशेष परिस्थितियाँ अध्यापक के रूप में उसकी भूमिका तय करने में मदद करेंगी।

प्रारंभिक शिक्षा में पत्रोपाधि (डी.एल.एड.)

Diploma in Elementary Education (D.El.Ed.)

गणित व गणित शिक्षण

प्रथम वर्ष



(प्रायोगिक संस्करण)

प्रकाशन वर्ष -2017



राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, छत्तीसगढ़, रायपुर

प्रारंभिक शिक्षा में पत्रोपाधि (डी.एल.एड.)

Diploma in Elementary Education (D.El.Ed.)

गणित व गणित शिक्षण

प्रथम वर्ष

(प्रायोगिक संस्करण)

प्रकाशन वर्ष—2017



राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्,
छत्तीसगढ़, रायपुर

प्रकाशन वर्ष – 2017

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् रायपुर छत्तीसगढ़

संरक्षक एवं मार्गदर्शक

सुधीर कुमार अग्रवाल भा.व.से.

संचालक, राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् छत्तीसगढ़, रायपुर

पाठ्य सामग्री समन्वयक

आर.के. वर्मा

यू.के. चक्रवर्ती

डेकेश्वर प्रसाद वर्मा

विषय संयोजक

डॉ. सुधीर श्रीवास्तव

तकनीकी सहयोग एवं सामग्री संकलन

विद्या भवन सोसाईटी उदयपुर राजस्थान, छत्तीसगढ़ शिक्षा संदर्भ केन्द्र रायपुर

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् रायपुर उन सभी लेखकों/प्रकाशकों के प्रति अपनी कृतज्ञता ज्ञापित करता है जिनकी रचनाएँ/आलेख इस पुस्तक में समाहित हैं।

प्राक्कथन

विद्यालय में अध्ययनरत् बच्चे भविष्य में राष्ट्र का स्वरूप व दिशा निर्धारण करेंगे। शिक्षक बच्चों को कुम्हार की भाँति गढ़ता है और वांछित स्वरूप प्रदान करता है। इस गुरुतर दायित्व के निर्वहन के लिए शिक्षकों को बेहतर तरीके से तैयार करना होगा।

“शिक्षा बिना बोझ के” यशपाल समिति की रिपोर्ट (1993) ने माना है कि शिक्षकों की तैयारी के अपर्याप्त अवसर से स्कूल में अध्ययन-अध्यापन की गुणवत्ता प्रभावित होती है। इन कार्यक्रमों की विषयवस्तु इस प्रकार पुर्ननिर्धारित की जानी चाहिए कि स्कूली शिक्षा की बदलती आवश्यकताओं के संदर्भ में उसकी प्रासंगिकता बनी रहे। इन कार्यक्रमों में प्रशिक्षुओं में स्व-शिक्षण और स्वतंत्र चिंतन की क्षमता के विकास पर जोर होना चाहिए।

कोठारी आयोग (64-66) से ही यह बात की जाने लगी थी कि शिक्षा में गुणात्मक सुधार के लिए शिक्षकों को बतौर पेशेवर तैयार करना अत्यंत जरूरी है।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूप रेखा-2005 ने भी शिक्षकों की बदलती भूमिका को रेखांकित किया है। आज एक शिक्षक के लिए जरूरी है कि वह बच्चों को जाने, समझे, कक्षा में उनके व्यवहार को समझे, उनके सीखने के लिए उपयुक्त माहौल तैयार करे, उनके लिए उपयुक्त सामग्री व गतिविधियों का चुनाव करे, बच्चे की जिज्ञासा को बनाए रखे, उन्हें अभिव्यक्ति का अवसर प्रदान करे व उनके अनुभवों का सम्मान करे।

तात्पर्य यह कि आज की जटिल परिस्थितियों में शिक्षकों की भूमिका कहीं अधिक उत्तरदायित्वपूर्ण व महत्वपूर्ण हो गई है। इसी परिप्रेक्ष्य में शिक्षक-शिक्षा को और कारगर बनाने की आवश्यकता है। शिक्षक-शिक्षा में आमूल-चूल बदलाव की आवश्यकता बताते हुए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूप रेखा-2005 में शिक्षकों की भूमिका के संबंध में कहा गया है कि सीखने-सिखाने की परिस्थितियों में उत्साहवर्धक सहयोगी तथा सीखने को सहज बनाने वाले बनें जो अपने विद्यार्थियों को उनकी प्रतिभाओं की खोज में, उनकी शारीरिक तथा बौद्धिक क्षमताओं को पूर्णता तक जानने में, उनमें अपेक्षित सामाजिक तथा मानवीय मूल्यों व चरित्र के विकास में तथा जिम्मेदार नागरिकों की भूमिका निभाने में समर्थ बनाए।

प्रश्न यह है कि शिक्षक को तैयार कैसे किया जाए? बेहतर होगा कि विद्यालय में आने के पूर्व ही उसकी बेहतर तैयारी हो, उसे विद्यालय के अनुभव दिए जाएँ। इसके लिए शिक्षक शिक्षा के पाठ्यक्रम व विषयवस्तु को फिर से देखने की जरूरत है। इसी परिप्रेक्ष्य में डी.एल.एड. के पाठ्यक्रम में बदलाव किया गया है।

पाठ्यसामग्री का लक्ष्य शिक्षण विधि से हटकर शिक्षा की समझ, विषयों की समझ, बच्चों के सीखने के तरीके की समझ, समाज व शिक्षा का संबंध जैसे पहलुओं पर केन्द्रित है। पाठ्यक्रम में शिक्षण के तरीकों पर जोर देने के स्थान पर विषय की समझ को महत्व दिया गया है। साथ ही शिक्षा के दार्शनिक पहलू को समझने, पाठ्यचर्या के आधारों को पहचानने और बच्चों की पृष्ठभूमि में विविधता व उनके सीखने के तरीकों को समझने की शुरुआत की गई है।

चयनित पाठ्यसामग्री में कुछ लेखक/प्रकाशकों की पाठ्य सामग्री प्रशिक्षार्थियों के हित को ध्यान में रखकर ज्यों की त्यों ली गई है। कहीं-कहीं स्वरूप में परिवर्तन भी किया गया है, कुछ सामग्री अंग्रेजी की पुस्तकों से लेकर अनुदित की गई है। हमारा प्रयास यह है कि प्रबुद्ध लेखकों की लेखनी का लाभ हमारे भावी शिक्षकों को मिल सके। इग्नू और एन.सी.ई.आर.टी. सहित जिन भी लेखकों/प्रकाशकों की पाठ्यसामग्री किसी भी रूप में उपयोग की गई है, हम उनके हृदय से आभारी हैं। हम विद्या भवन सोसायटी उदयपुर, दिगंतर जयपुर, एकलव्य भोपाल, अजीम प्रेमजी फाउण्डेशन बेंगलुरु, आई.सी.आई.सी.आई. फाउण्डेशन पुणे, आई.आई.टी. कानपुर, छत्तीसगढ़ शिक्षा संदर्भ केन्द्र रायपुर के आभारी हैं जिनकी टीम ने एस.सी.ई.आर.टी. और डाइट के संकाय सदस्यों के साथ मिलकर पठन-सामग्री को वर्तमान स्वरूप प्रदान किया।

अंत में पाठ्यसामग्री तैयार करने में प्रत्यक्ष-अप्रत्यक्ष रूप से जुड़े सहयोगियों का हम पुनः आभार व्यक्त करते हैं। पाठ्यक्रम तैयार करने व पाठ्य सामग्री के संकलन व लेखन कार्य से जुड़े लेखन समूह सदस्यों को भी हम धन्यवाद देना चाहेंगे जिनके परिश्रम से पाठ्य सामग्री को यह स्वरूप दिया जा सका। पाठ्य-सामग्री के संबंध में शिक्षक -प्रशिक्षकों, प्रशिक्षार्थियों के साथ-साथ अन्य प्रबुद्धजनों, शिक्षाविदों के भी सुझावों व आलोचनाओं की हमें अधीरता से प्रतीक्षा रहेगी जिससे भविष्य में इसे और बेहतर स्वरूप दिया जा सके।

धन्यवाद।

संचालक

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण
परिषद्, छत्तीसगढ़, रायपुर

प्रोजेक्ट कार्य

सबक 1

पाठ-1

- बच्चों के लिए (ऐसे तीन प्रश्न/पहेलियाँ बनाइए जिनसे उन्हें यह महसूस करने में सहायता मिले कि "गणित मजेदार है"। इन्हें अपने आसपास के बच्चों पर आजमाइए। पता लगाइए कि कौन सी पहेली/प्रश्न उन्हें अच्छी लगी, और क्यों।

पाठ-2

- कक्षा 1 से 5 तक के बच्चों का अवलोकन कर ऐसी अवधारणाओं के उदाहरण दें जिसे उस कक्षा के बच्चे बिना समझे रट लेते हैं। यह भी बताइए कि रटते हुए वे उस अवधारणा के किन पहलुओं को नजरअंदाज कर देते हैं।
- आप अपनी स्कूल में कक्षा 3, 4 व 5 के बच्चों के साथ संरक्षण के सिद्धान्त पर कार्य करने के लिए कुछ उदाहरण सोचें व इन्हें बच्चों के साथ करवाकर देखें और अपने अनुभवों को लिखें। अपने इस विश्लेषण के आधार पर बतायें कि किस स्तर पर आते-आते बच्चे संरक्षण के सिद्धान्त को सहज समझ पाते हैं?

पाठ-3

- आपके विद्यालय की कक्षा 1 में आये विद्यार्थी का अवलोकन (प्रश्न पूछ व बातचीत द्वारा) कर बतायें कि वह अपने साथ गणित की कौन-कौनसी अवधारणाओं को लेकर आते हैं उनकी सूची बनाइए।
- अपने विद्यालय से ऐसे कोई दो उदाहरण दीजिए, जो यह स्पष्ट करते हो कि बच्चे नकल करके नहीं सीखते। इन उदाहरणों को विस्तारपूर्वक समझाइए।

सबक 2

पाठ-4

- अपनी विद्यालय की कक्षा 1 व 2 के बच्चों को दो अलग-अलग चीजों के ढेर देकर, उनकी तुलना करने को कहें (किसमें ज्यादा चीजें हैं व किसमें कम)। यह वह (बच्चे) किस तरह करते हैं, इसे अपनी कॉपी में नोट करें। और इस पाठ में बताई गई बातों से इसकी तुलना करें।

पाठ-5

- अपने या आसपास के विद्यालय की कक्षा 4 या 5 के बच्चों के लिए दो अंको वाली संख्याओं के जोड़ व घटा के सवालों का एक प्रश्न पत्र तैयार कीजिए। (कुछ सवाल खड़े रूप में लिखे हों, कुछ आड़े रूप में व कुछ इबारती प्रश्न।)

क) बच्चों के जवाबों का विश्लेषण करें।

ख) जिन बच्चों ने गलतियाँ की हों, उनकी उत्तर-पुस्तिका को ध्यानपूर्वक देखिए क्या इन गलतियों में आप कोई पैटर्न देख पाते हैं?

ग) बच्चों से बातचीत कर पता कीजिए कि उन्होंने क्या सोच कर ये जवाब दिए हैं।

इस पूरी प्रक्रिया को लिखें।

सबक 3

पाठ-6

- दैनिक जीवन से जुड़े जोड़ से संबंधित दो किस्म के इबारती सवालों (एकत्रीकरण व वृद्धि) के चार-चार उदाहरण लीजिए; और फिर मौखिक रूप से कक्षा 2 व 3 के बच्चों के साथ उन्हें करवाइये, इसे सूचीबद्ध कर देखिए कि उन्हें किस तरह का जोड़ प्रारंभिक स्तर पर आसान लगता है?
- 8 साल व उससे बड़े बच्चों को घटाने की किस्मों के कुछ इबारती सवाल दीजिए। नोट कीजिए कि वे इन सवालों को हल करने के लिए कौन-कौन से तरीके अपनाते हैं। यह भी पता करने की कोशिश कीजिए कि इन्हें हल करते वक्त वे किन दिक्कतों का सामना करते हैं।
- पूर्णसमूहन व बिना पुर्नसमूहन पर आधारित जोड़ व घटाव पर आधारित कुछ प्रश्न (इबारती व अंकीय) कक्षा 3 व 4 के बच्चों को करवाकर देखें। बच्चों के जवाबों का विश्लेषण कीजिए व इसे सउदाहरण लिखिए।

पाठ-7

- अपने आसपास विद्यालय के कुछ 7 वर्षीय व कुछ 11 वर्षीय बच्चों को लीजिए। प्रत्येक को एक गुणन-तथ्य (मसलन, $6 \times 3 = 18$) देकर उनसे संबंधित एक इबारती सवाल बनाने को कहिए। यह देखिए कि वे ज्यादातर किस मॉडल के सवाल बनाते हैं। प्रश्नों का विश्लेषण कर यह भी बताइये कि क्या दोनों उम्र समूहों के बीच मॉडल के चयन के लिहाज से कोई फर्क नजर आता है।

सबक 4

पाठ-8

- आधा, तीन चौथाई व एक तिहाई के लिए बच्चों के स्तरानुकूल इबारती सवाल व चित्र में दर्शाने पर आधारित प्रश्नावली को बनायें व अपने विद्यालय की कक्षा 5 में इसे करवाकर इसके आधार पर बच्चों की भिन्न की समझ पर लेख लिखें।

पाठ-9

- भिन्नों की तुलना पर आधारित तीन तरह के प्रश्न कक्षा 5 अथवा 6 के बच्चों को करने को दें (बढ़ते से घटते क्रम में लगाइए)
 - (i) व प्रश्न जिनमें हर समान हो।
 - (ii) जिनमें अंश समान हो।
 - (iii) सरल भिन्न जिनमें अंश व हर दोनों अलग-अलग हों।

इन प्रश्नों को बच्चों से करवाने के बाद उनमें से 4-5 बच्चों को बुला उनके प्रश्न हल करने के तरीकों को जानने की कोशिश करें।

इस सबसे “बच्चों की भिन्नों की तुलना पर उनकी समझ” पर टिप्पणी दें।

- यदि आपको उपरोक्त तीनों प्रकार के प्रश्न हल करने हेतु भिन्न संबंधी समझ पर बच्चों के साथ कार्य करना हो तो आपकी योजना क्या होगी, सविस्तार उदाहरण सहित लिखिए व इसे बच्चों के साथ करा अपने अनुभवों को सूचीबद्ध कीजिए।

पाठ-10

- कक्षा 7 के बच्चों को निम्न सवाल हल करने को दें—

(i) .025, 0.3, 0.233 और 0.1687 में से सबसे बड़ी संख्या बताओ।

(ii) 8.6 में 2.78 घटाओ।

(iii) $30.5 \div 10$

और उनके जवाबों का विश्लेषण करें, बच्चों ने किस तरह के जवाब दिये हैं।

साथ ही इस पाठ के शुरुआत में “दशमलव भिन्न मुश्किल क्यों” में दिये विश्लेषणों से इनकी तुलना करें।

सबक 5

पाठ-11

- समतल सतह की अवधारणा को सीखने के लिए एक ऐसी गतिविधि सुझाइए जिसे 50 बच्चों की एक कक्षा में किया जा सके। इसे कराने के बाद उन पर कुछ प्रश्नों को बच्चों से करवा, अपनी गतिविधि के द्वारा सीखने की वैधता के बारे में टिप्पणी करें।
- कुछ प्रश्न इस प्रकार बनाइए जिसमें आप जांच सकें कि किस स्तर पर आपके विद्यालय के बच्चे यह समझ पाते हैं कि—
 - हर वर्ग एक आयत होता पर हर आयत वर्ग नहीं होता है।
 - हर समचतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज होता है पर इसका उलटा सही नहीं है।और इन्हें कक्षा 5, 7 व 9 में करवाकर बच्चों के जवाबों को सूचीबद्ध कीजिए और इस पर टिप्पणी दीजिए।

पाठ-12

- कोण की अवधारणा से संबंधित, प्राथमिक व उच्च प्राथमिक विद्यालय के अध्यापकों के लिए एक प्रपत्र बनाइये, और उसे कम से कम 5 अध्यापकों से करवाकर, कोण की अवधारणा पर इन अध्यापकों की सामान्य समझ पर टिप्पणी कीजिए। (प्रपत्र व टिप्पणी साथ में लगायें)
- कोण की अवधारणा से पहले बच्चों का कौन-कौन सी अवधारणाओं से परिचय जरूरी है, ऐसी अवधारणाओं को इंगित कर, एक ऐसा प्रपत्र बनाइए जिसमें कोण पूर्व अवधारणाओं व कोण की समझ पर मिले-जुले प्रश्न हों, प्रपत्र की जांच इस सहसंबंध को देखें। (प्रपत्र व टिप्पणी साथ में लगायें)

पाठ-13

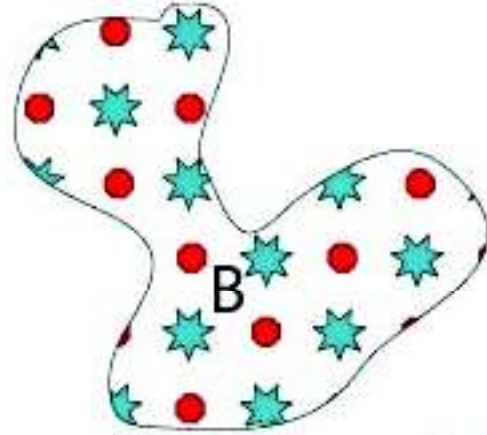
- क्षेत्रफल की सामान्य अवधारणा का परिचय कराने के बाद अपने विद्यालय की कक्षा 4 व 5 से अलग-अलग इस प्रश्न पर कार्य कराइये।

नीचे कुछ आकृतियों के चित्र दिए गए हैं, इन्हें क्षेत्रफल (आकार) के अनुसार बड़े से छोटे क्रम में सजाइए और क्रम में रखने का कारण बताइए-

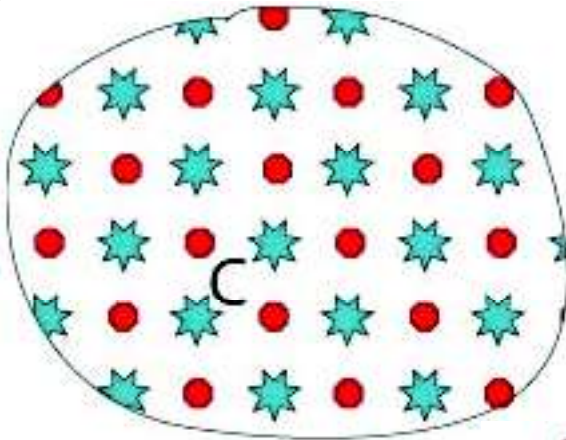
इन प्रश्नों को कराते समय यह भी देखिए की बच्चे किन-किन तरीकों से इनको हल कर रहे हैं। इस पर अपनी टिप्पणी दीजिए।



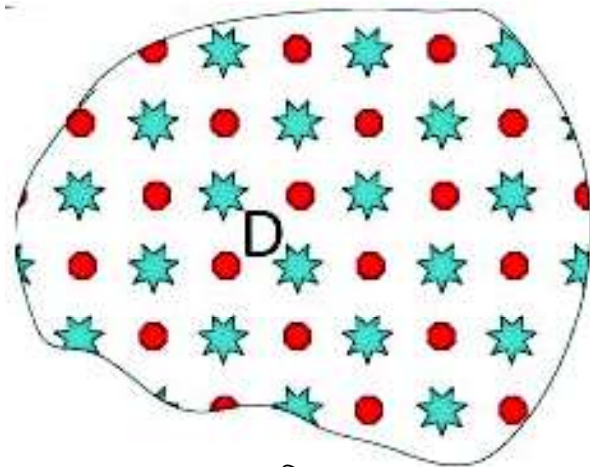
चित्र-1



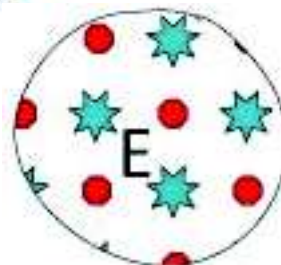
चित्र-2



चित्र-3



चित्र-4



चित्र-5

क्रम

.....

.....

.....

सबक 6

पाठ-14

- अपने विद्यालय की कक्षा 3 व 4 को सरल गुणा पर एक प्रपत्र ($2 \times 5 = \dots\dots\dots$ व $3 \times \dots\dots\dots$. = 18 तरह के सवाल) करने को दें व देखें कि उन्होंने इसे किस प्रकार हल किया है। उनमें क्या-क्या गलतियाँ हुई हैं। देखें क्या उनमें कोई पैटर्न है। ये गलतियाँ बच्चों के बारे में कुछ बताती है।

पाठ-15

- गुणा की अवधारणा कक्षा 3 के छात्रों को स्पष्ट करने के लिए, एक गतिविधि बनाए और उसे बच्चों के साथ करवाकर बच्चों के अनुभवों को एकत्र कर, इस पर टिप्पणी लिखें।
- सरकारी व गैर सरकारी विद्यालयों के कम से कम तीन-तीन अध्यापकों की कक्षाओं का अवलोकन कीजिए। पाठ योजना के तरीकों को समझने के लिए “कक्षा का कामकाज” पाठ के आधार पर कुछ प्रश्नों को लेकर एक प्रपत्र बनाइए, उन्हें अध्यापकों से भरवाइए। कक्षाकक्ष अवलोकन व प्रपत्र करके विश्लेषण के आधार पर पाठ योजना की यथार्थ स्थिति पर अपना विश्लेषण लिखिए।

विषय-सूची

इकाई	अध्याय	पेज न.
इकाई-I	बेकसूर गणित	1-46
1	गणित क्या है, कहाँ से आया है	3-8
2	सीखने वालों की पहचानें	9-25
3	सीखने वाले के बारे में विचार	26-46
इकाई-II	जड़ में है गिनती	47-80
4	गिनना कैसे सिखायें	49-63
5	इकाई दहाई और आगे	64-80
इकाई-III	पहला और आखिरी गणित	81-122
6	जोड़ना और घटाना	82-97
7	गुणा और भाग करना	98-122
इकाई-IV	टुकड़े या पूरे ?	123-180
8	किस पूर्ण के हिस्से	124-133
9	भिन्न की किस्में	134-152
10	दशमलव	153-180
इकाई-V	जगह की समझ	181-242
11	जगह की समझ	182-200
12	कोण मापना	201-216
13	मापन की शुरुवात	217-242
इकाई-VI	बच्चे और गणित	243-272
14	बच्चों की गणित सीखने में मदद	244-258
15	कक्षा का काम काज	259-274
16	आकड़ों का संकलन	275-284

बेकसूर गणित

पाठ – 1 गणित क्या है, कहाँ से आया है?

परिचय – उद्देश्य – चारों ओर गणित – क्या हमारी सभी क्रियाओं में गणित शामिल है? – मनोरंजन के लिए गणित – सारांश।

पाठ – 2 सीखने वालों को पहचानें

परिचय – उद्देश्य – बच्चों की सोच – बच्चे कैसे सीखते हैं? गणित सीखना – अपना-अपना तरीका – गणित की भाषा – अपने पर भरोसा – लगातार विकास – संक्रियात्मक अवस्थाएँ – हर बच्चा अनूठा, सारांश।

पाठ – 3 सीखने वालों के बारे में विचार

परिचय – उद्देश्य – सीखने वालों के बारे में विचार – क्या बच्चे बड़ों की नकल करके सीखते हैं? – क्या बच्चे खाली स्लेट हैं? – क्या बच्चे सीखने को उत्सुक हैं? – कुछ और उदाहरण – सारांश।

पाठ 1, 2 व 3 के अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

एक मशहूर नाटक है, जिसमें एक दयालु अमीर जनाब का दिल सड़क पर फूल वगैरह बेचती एक बच्ची को देखकर पसीज जाता है। वे उसे अपने घर ले आते हैं और उसकी देखभाल और पढ़ाई करवाना शुरू करते हैं। होनहार बच्ची चमकने लगती है। एक दिन जनाब उसे गद्य और पद्य का भेद समझा रहे थे। दोनों में शब्द हैं, दोनों बोले और लिखे जाते हैं – तो फर्क क्या है? जनाब झुंझलाकर समझाते हैं कि – देखो, जो बातें तुम करती हो वे गद्य हैं, और जो अलग किस्म की बातें मैं तुम्हें सिखाऊँगा वे पद्य हैं। अच्छा, बच्ची बोली, मैं नहीं जानती थी कि मैं बचपन से गद्य बोल रही हूँ।

दूसरी तरफ

एक और बात यह है— “गणित पढ़ना, पढ़ाना मुश्किल नहीं है। सिर्फ बात यह है कि बच्चे पूरा ध्यान नहीं लगाते। पहाड़े नहीं याद रखते। अपना होमवर्क पूरी तरह नहीं करते। इसीलिए गणित में कम नम्बर आते हैं।”

जन्म के पहले हफ्ते में बच्चा एक और दो का मतलब समझ सकता है, और तीन महीनों में एक, दो, तीन और “ज्यादा” समझ लेता है— साथ ही दूर, पास का भेद तथा कम और ज्यादा का भेद। पहली क्लास का बच्चा गोल चौकोर, तिकोने खिलौनों को एक-दूसरे पर रखकर इमारतें बना चुका होता है, गेंद को ज़मीन पर उछालकर पकड़ना सीख चुका होता है, ज़मीन पर “स्टापु (बिल्लस)” का खेल बनाकर उस पर एक/दो कदम रखकर आगे

और पीछे जा चुका होता है, तीन पहिये वाली साइकिल बखूबी चला सकता है। यानि, अपनी बढ़त में कुदरती तौर पर गिनती, जोड़-घटा, गुणा-भाग, ज्यामिति के मोटे नियम और शायद बीजगणित की मूल सोच भी हासिल कर चुका होता है और ये सब, सिर्फ “गणित” की बातें हैं। इनके अलावा वह बहुत कुछ और भी समझ चुका होता है। यह सब पहली क्लास में पहुँचने से पहले ही वह समझ चुका होता है। लेकिन पहली क्लास से ही उसे $2 \times 1 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$ बोर्ड से देखकर पूरी क्लास के साथ जोर-जोर से बोलकर रटना पड़ता है, दिन पर दिन रटना सीखना पड़ता है। उसकी भोली निगाहें हैरान देखती हैं कि स्कूल गणित कुछ और ही हैं। कुदरती दुनिया से कोसों दूर! कसूर किसका है? गद्य की तरह हर बच्चा बचपन से ही गणित सीखकर अपने जीवन में गणित का इस्तेमाल भी कर चुका होता है।

खैर! अगर बच्चों की कुदरती समझ में ही गणित है तो फिर इतनी कक्षाएं, किताबें, इम्तहान, किसलिए हैं?

इस सवाल के जवाब के लिए यह देखना जरूरी हो जाता है कि गणित आया कहाँ से है, क्यों आया है? यानि मनुष्य के जीवन में इसका इस्तेमाल कहाँ-कहाँ होता है? यह मजेदार सवाल हमें इंसान के इतिहास में ले जाता है। और इतिहास में जाकर हम यह देखते हैं कि जैसे ही आदि इंसान ने शिकार का सहारा छोड़कर खेती करनी शुरू की तब से ही गणित शुरू हुआ (और विषयों के साथ-साथ)। व्यापार में जोड़-घटा, गुणा-भाग के साथ-साथ पहाड़ों का इस्तेमाल होना शुरू हुआ। मकान बनाने के लिए ज्यामिति शुरू हुई, त्रिकोणमिती शुरू हुई, अलजेब्रा शुरू हुआ, आदि। सभ्यता के साथ-साथ गणित भी बढ़ता गया और आज भी बढ़ता जा रहा है।

बात थोड़ी और भी गहरी है। अगर पदार्थ में वजन नहीं होता, यानि पृथ्वी/ब्रह्माण्ड में गुरुत्वाकर्षण (gravitation) का गुण नहीं होता, तो क्या पानी की बूंद गोल होती? क्या पाइथोगोरस का सिद्धान्त सही होता? क्या पृथ्वी में जीन शुरू होने का पहला कदम, यानि एक जीवाणु का सेल बनना मुमकिन होता?

दूसरे शास्त्रों की तरह गणित भी पदार्थ, पृथ्वी ब्रह्माण्ड की अंदरूनी बनावट के नियम जाहिर करता है। यानि अंक, कोण, दशमलव आदि गणितीय मुद्दों के आपसी संबंध, हमारे ब्रह्माण्ड के चरित्र को उजागर करते हैं और इसीलिए गणित को बचपन की कुदरती समझ तक ही नहीं रोका जा सकता। उसके गहरे नियमों की पड़ताल जरूरी हो जाती है और यही है गणित पढ़ाने का मकसद। रटंत नहीं, सृष्टि के अंदरूनी नियमों की तलाश।

सबक 1

पाठ-1

गणित क्या है? कहाँ से आया है?

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - चारों ओर गणित
 - क्या हमारी सभी क्रियाओं में गणित शामिल है?
 - मनोरंजन के लिए गणित
- सारांश

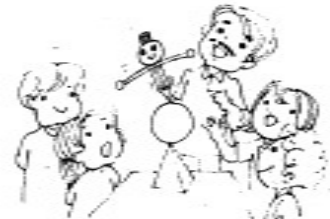
परिचय

हम सभी का जीवन में गणित से सामना हुआ है। इस दौरान कुछ लोगों को यह पसंद आया है, और इसलिए इसे करने में उन्हें मज़ा आता है। लेकिन कुछ और लोगों को गणित ख़ास पसंद नहीं आता, और वे इसे एक अप्रिय आवश्यकता के रूप में देखते हैं। और वहीं कुछ ऐसे भी लोग हैं जिनके गणित संबंधी अनुभव कड़वे रहे हैं, और इसलिए वे गणित से दूर ही रहते हैं।



(क)

गणित! ना बाबा ना!



(ख)

गणित! अरे, वाह!

चित्र 1 : गणित के प्रति रवैये

गणित में ऐसी क्या “ख़ासियत” है कि यह लोगों में इतनी अलग-अलग भावनाएं पैदा करती है? क्या यह ज़रूरी है कि हर आदमी इसे सीखे? इस इकाई में हम इन सवालों पर गौर करेंगे।

पहले हम कुछ उदाहरणों और उनके विश्लेषण के द्वारा यह देखने की कोशिश करेंगे कि गणित का उपयोग हम किस प्रकार करते हैं, यह कितना ज़रूरी है, और यह कितना मनोरंजक व मनोहर है। उसके बाद हम इसकी कुछ विशेषताओं को देखेंगे। इन्हीं विशेषताओं के कारण गणित जीवन के क्षेत्रों में लगातार और ज़्यादा महत्वपूर्ण होता जा रहा है।

अंत में हम देखेंगे कि गणित किस प्रकार हमारे सोचने के तरीके को प्रभावित करता है।

इस पूरी इकाई में हम बच्चों के गणित सीखने की आवश्यकता के बारे में आपको यकीन दिलाना चाहते हैं।

जैसे-जैसे आप इस इकाई को पढ़ेंगे, आपको बहुत से उदाहरण, विचार, मत और तर्क मिलेंगे जिनसे उम्मीद है, आप गणित के महत्व और स्वरूप के बारे में सोचने लगेंगे। यहाँ पर आप जो कुछ भी पढ़ें उसके सही या गलत होने के बारे में जरूर सोचें। और यदि आप यहाँ पर उठाए गए मुद्दों से बिल्कुल अलग नतीजों पर पहुँचे, तो बिल्कुल संकोच न करें। यदि आपके तर्क ठोस हैं, तो आप हमें भी अपने विचारों से सहमत करावें।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आप

- यह बता सकेंगे कि गणित हमारे दैनिक जीवन में किस तरह उपयोगी है;
- यह बता सकेंगे कि गणितीय संकल्पनाएं, अवधारणाएं किस प्रकार विकसित होती हैं;
- यह समझ सकेंगे कि कोई नई अवधारणा पढ़ाते समय बच्चों के पूर्व ज्ञान से इसे किस तरह जोड़ा जा सकता है।

हमारे जीवन में गणित

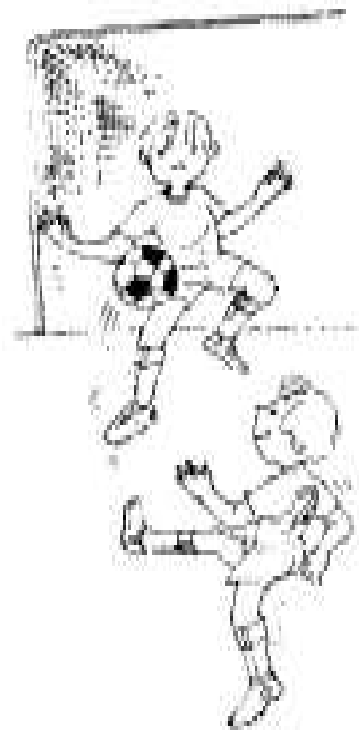
जीवन में गणित संबंधित आपके प्रमुख अनुभव क्या हैं? हममें से बहुत से लोगों के लिए गणित सिर्फ एक विषय है जो स्कूल में पढ़ाया जाता है। लेकिन क्या हमारे जीवन में सिर्फ वही गणित हैं? क्या उन लोगों का गणित से सामना नहीं होता है जो कभी स्कूल नहीं जाते? आइए देखें।

गणित हमारे चारों ओर है

जब आप सुबह उठते हैं तो सबसे पहले क्या करते हैं। क्या अपने लिए एक प्याला अच्छी सी कॉफी या चाय बनाते हैं? यदि ऐसा है, तो आप गणित का प्रयोग कर रहे हैं! क्या आप इससे सहमत हैं?

एक बढ़ई को लीजिए जो एक मेज बना रहा है। क्या वह किसी रूप में गणित का प्रयोग करता है? किसी दर्जी, ग्वाले, सब्जी खरीदने वाले या मिस्त्री को देखिए। क्या ये लोग किसी रूप में गणित का प्रयोग करते हैं? जब हम रेल या बस से जाते हैं, या अपनी गाड़ी चलाते हैं या अपने बच्चे की स्कूल की फीस देते हैं तो हम गणित का प्रयोग करते हैं। चाय बनाना, उपग्रह को कक्षा में भेजना, इमारतों और पुल बनाना – क्या इनमें से कोई भी कार्य गणित का प्रयोग किए बिना किया जाता है?

और तरह-तरह के खेलों के बारे में आपका क्या विचार है? एक क्रिकेट कप्तान ने एक बार कहा था कि यदि वह क्षेत्र रक्षकों को मैदान में ठीक तरह से खड़ा कर दे तो दूसरी टीम को 'आउट' करने का काम आधा हो जाएगा। फील्ड सजाने के लिए खेल और जगह की अच्छी समझ की



चित्र 2 : फुटबाल का खिलाड़ी गणित का प्रयोग करता है।

जरूरत होती है। खो-खो, कबड्डी, फुटबॉल, बास्केट बॉल आदि सभी में जगह को इस्तेमाल करने की सहज जानकारी की आवश्यकता होती है।

और शतरंज जैसे बोर्ड वाले खेलों को खेलते वक्त आपको जीतने की योजना के बारे में सोचने की आवश्यकता होती है। इसके लिए आपको हर समय अपने और विपक्ष के मोहरों की संभावित चालों के बारे में सोचना पड़ता है। अट्ठा चंगा, लूडो, चौपड़, व्यापार और इसी प्रकार के दूसरे खेलों में खिलाड़ी गणित का काफी प्रयोग करते हैं।

निम्नलिखित अभ्यास करते समय आप ऐसे बहुत से उदाहरण दे सकते हैं जिनमें हम गणित का प्रयोग करते हैं।

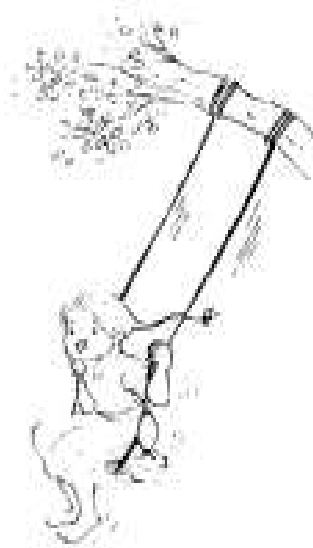
E1) एक भीतर और एक बाहर खेले जाने वाले खेल के बारे में सोचिए जो आप या आपके बच्चे खेलते हैं। बताइए कि उन्हें खेलने में गणित का किस तरह इस्तेमाल होता है।

E2) मेरा एक मित्र कहता है “रसोई में काम करते समय मैं गणित का बहुत इस्तेमाल करता हूँ।” ऐसे चार तरीके बताइए जिनमें रसोई में गणित का प्रयोग होता है।

E3) एक मित्र से बातचीत में मैंने कहा, “गणित हमारे चारों ओर पाई जाने वाली लगभग हर चीज में है। रंगोली की रचना, कपड़ों के डिजाइन और छापे, नृत्य, बच्चों को खिलाना—पिलाना और रेल पकड़ना सभी में गणित का प्रयोग होता है।” वह इस बात से बिलकुल असहमत थी और उसने कहा — “तुमने जो बात कही है उनमें से कुछ में शायद गणित का कुछ इस्तेमाल होता है। लेकिन हर बात में गणित का इस्तेमाल नहीं होता।” क्या आप मुझसे सहमत हैं या मेरे मित्र से? और क्यों?

लता अपने घर के सामने वाले पेड़ पर एक झूला डालकर उस पर झूलना चाहती है। इसके लिए क्या उसे गणित की जरूरत है? झूला डालने के लिए उसे एक रस्सी की और पेड़ की एक उचित डाल की जरूरत होगी। इससे संबंधित उसे कई प्रश्न पूछने की जरूरत है, जैसे

1. डाल कितनी ऊँची होनी चाहिए?
2. वह कितनी मजबूत होनी चाहिए?
3. जब कोई झूला झूलेगा, तो क्या दूसरी डालें बाधा नहीं डालेंगी?
4. रस्सी कितनी लम्बी होनी चाहिए? क्या रस्सी की लम्बाई का डाल की ऊँचाई से कोई संबंध है?
5. रस्सी कितनी मोटी होनी चाहिए?
6. क्या लता और उसकी सहेली साथ-साथ झूल सकते हैं?



चित्र 3 : लता द्वारा अनजाने में गणित का प्रयोग

इन सब प्रश्नों के उत्तर के लिए लता को गणित का ज्ञान होना जरूरी है। उदाहरण के लिए प्रश्न 3 के उत्तर के लिए, उसे ज्यामिति की कुछ समझ होनी चाहिए। उसे अपने मन में यह अंदाज लगाना होगा कि जब झूला, ऊपर—नीचे जाएगा तब रस्सी कितना घूमेगी, और यह तय करना होगा कि पेड़ की कोई दूसरी डाल झूले

में कोई बाधा तो नहीं डालेगी।

मान लीजिए लता अपना झूला डालने में सफल हो जाती है। अगर उसे कोई झुलाने वाला न हो तो वह रस्सी को खींचकर अपने पैरों से, खुद धक्का देकर और अपने शरीर को झूले पर एक समान गति से हिलाते हुए झूले को चला सकती है। जैसे-जैसे झूला ऊपर-नीचे जाना शुरू करता है उसे झूले की गति और लय के साथ-साथ हिलना पड़ता है, और इस तरह से जोर लगाना पड़ता है कि झूला और ऊपर जाए।

इस प्रकार, झूले को डालने और इस्तेमाल करने में लता अपने अनुभव से बहुत सी ऐसी राशियों का अनुमान लगाती है जिनकी गणना गणितीय तरीके से परिकलित की जाती है। वह अंदाज लगाती है, उनकी जाँच करती है और यह तय करती है कि उन्हें इस्तेमाल किया जाए या पुनः अनुमान लगाया जाए। यह सब गणित वह यह महसूस किए बिना करती है कि वह गणित कर रही है इसलिए वह ये सब बिना किसी थकान और ऊब के करती है।

E4) ऊपर दिए गए प्रश्नों का उत्तर देने के लिए लता को गणित के किन क्षेत्रों की जानकारी होनी चाहिए? चुनने का कारण भी दीजिए।

E5)(i) राशियों के अनुमान लगाना, और/या

(ii) संबंधों का दर्शाना, और/या

(iii) अनुमान को जाँचना

इनके उदाहरण निम्नलिखित स्थितियों में दीजिए :

क) हरी जयपुर में रहता है और उसे 23 मार्च को 10.00 बजे (प्रातः) तक दिल्ली पहुँचना है।

ख) सुरेश स्वेटर बुनना चाहता है।

E6) आपकी कक्षा की बैठक व्यवस्था करते समय आप कौन-कौनसी गणितीय अवधारणाओं/क्षेत्रों का उपयोग करते हैं? बताइए।

अब तक आपने समझ लिया होगा कि गणित केवल स्कूल की पाठ्य पुस्तकों तक सीमित नहीं है। वास्तव में, हम गणित को अपने चारों ओर देख सकते हैं। लेकिन, क्या यह उन सभी कामों में है जो हम करते हैं? आइए, देखें।

क्या हमारी सभी क्रियाओं में गणित शामिल है?

इसका उत्तर “हाँ” है और “नहीं” भी। उन लोगों के लिए, जो गणित को तलाशते हैं और जो जानते हैं कि इसे कहाँ तलाशना है, उत्तर “हाँ” है। जो लोग इसे नहीं तलाशते हैं, उनके लिए गणित केवल वही है जो स्कूल में करते हैं, जिसका उनकी वास्तविक दुनिया से कोई संबंध नहीं होता है। दूसरे शब्दों में, गणित ज़मीन पर पड़े हुए रोड़ों या पत्तियों की तरह नहीं है जो उठाए जाने का इंतजार करते हैं। इसको खोजने के लिए सतह के नीचे तक जाना होगा।

इसको समझने के लिए आइए चपाती बनाने का उदाहरण लें। मेरा एक दोस्त प्रकाश कहता है कि चपाती पकाने में बहुत से रसायन विज्ञान का इस्तेमाल होता है। उसका क्या मतलब है? उसके अनुसार, जब चपाती

पकाई जा रही होती है तो ऐसे रासायनिक परिवर्तन होते हैं जैसे उसने स्कूल में “रसायन विज्ञान की कक्षा” में पढ़े थे।

लेकिन मेरी एक दूसरी दोस्त कहती है कि जब वह चपाती बनाती है तो वह ज्यादा रुचि उन आकारों में लेती है जो बेलते वक्त आटे से बनती है। उसे बेलन की चाल और इन आकारों के बीच संबंध ढूँढना भी अच्छा लगता है। इसलिए, जिस प्रक्रिया में उसे गणित नजर आता है बिल्कुल उसी प्रक्रिया में प्रकाश को रसायन विज्ञान नजर आता है।

यह उदाहरण बताता है कि किसी भी कार्य घटना या तथ्य को अलग-अलग नज़रियों से देखा और समझा जा सकता है। यदि हम उसमें शामिल गणित की तलाश करेंगे, तो वह हमें मिलेगा। एक बार हम अपनी “गणितीय आँखों” को खोल लें और हम नियमों और नमूनों को देखना शुरू कर दें तो हम लगभग हर चीज़ में गणित देख सकते हैं— चाहे वह कोई गीत हो, कोई कहानी की किताब हो, भिनभिनाती हुई मक्खी का पथ हो, माचिस के डिब्बे का आकार और इसकी सतहों की संख्या हो, इन सतहों को ढकने के लिए जरूरी कागज का अनुपात हो, घर में बिजली के तार हों, पत्तियों के आकार हों, वगैरह।

विशेष रूप से, बच्चों की सभी गतिविधियाँ और अनुभव गणित से ओत-प्रोत होते हैं। इन अनुभवों को उन गणितीय विचारों और संकल्पनाओं से जोड़ना चाहिए जो हम उन्हें पढ़ाते हैं। तभी ये विचार उन्हें उपयोगी लगेंगे और वे इन्हें आसानी से समझ सकेंगे।

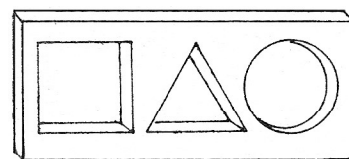
E7) निम्नलिखित गणितीय संकल्पनाओं से संबंधित बच्चों के जीवन से कम से कम एक-एक अनुभव बताइए।

जोड़, आयतन, सममिति, प्रायिकता।

अब तक आप यह जान गए होंगे कि आप जाने-अंजाने कितने गणित का इस्तेमाल करते हैं। निम्नलिखित उपखण्ड से शायद आपको कुछ अंदाज़ा हो जाए कि हम मनोरंजन के लिए गणित का कैसे प्रयोग कर सकते हैं।

मनोरंजन के लिए गणित

अक्सर जब मेरे पास खाली समय होता है तो मैं निम्न प्रकार के दिलचस्प गणितीय प्रश्नों को हल करने की कोशिश करती हूँ। कभी मेरे दोस्त और मैं प्रश्न बनाते हैं और कभी ये हमें मनोरंजक पुस्तकों में मिल जाते हैं। आप भी इन प्रश्नों को हल करने की कोशिश क्यों नहीं करते? इन्हें आप अपने खाली समय में कर सकते हैं। शायद आपको भी मजा आए।



चित्र-4

1) किसी गाँव में केवल एक नाई है। वह गांव के उन सब आदमियों की दाढ़ी बनाता है जो खुद अपनी दाढ़ी नहीं बनाते हैं। क्या नाई अपनी दाढ़ी बनाएगा?

2) आपको एक लकड़ी का टुकड़ा दिया जाता है जिसमें तीन छेद हैं (चित्र 4 देखें)। छेदों के आकार एक वर्ग, एक त्रिभुज और एक वृत्त हैं। क्या आप लकड़ी के टुकड़े से एक ऐसा ढक्कन बना सकते हैं, जो तीनों में एकदम सही बैठे?

3) "जादुई वर्ग"

8	1	6
3	5	7
4	9	2

को लीजिए। यदि आप इसकी किसी पंक्ति या स्तंभ या विकर्ण

की संख्याओं को जोड़ें तो उसका योग बराबर होगा। इस गुण के कारण इसे जादुई वर्ग (magic square) कहते हैं। क्या आप 1 से 16 तक की संख्याओं से 4×4 का एक जादुई वर्ग बना सकते हैं?

4) वह बड़ी से बड़ी संख्या कौन सी है जो चार बार 1 का प्रयोग करके लिखी जा सकती है? आप संख्याओं पर सभी संक्रियाओं का प्रयोग कर सकते हैं, लेकिन केवल अंक 1 का प्रयोग कर सकते हैं, और वह भी 4 बार। (उत्तर 1111 से बहुत बड़ा है।)

5) 24 लोगों को 6 पंक्तियों में इस प्रकार खड़ा करें कि प्रत्येक पंक्ति में 5 लोग हों।

क्या आपको इन्हें हल करने में मजा नहीं आया? जब मैं यात्रा करती हूँ, या काम में व्यस्त नहीं होती, तो मुझे ऐसे प्रश्न हल करने में बहुत मजा आता है। इसी प्रकार, बच्चों को भी ऐसी दिमागी क्रियाओं में उस वक्त तक मजा आता है जब तक ये पहेलियाँ उनकी समझ से बाहर न हों।

अभी तक हमने गणित के केवल एक पहलू के बारे में बात की है — हमारे दैनिक जीवन में इसकी उपयोगिता।

सारांश

इस पाठ में हमने निम्नलिखित बातों पर विचार किया है—

1. गणित हर जगह मौजूद है, शक्तिशाली है और सुंदर है।
2. यह जिन्दगी के हर क्षेत्र में उपयोगी है।
3. गणित का उपयोग विश्राम के समय मनोरंजन के लिए भी किया जा सकता है।

पाठ-2

सीखने वालों को पहचानें

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - बच्चों की सोच
 - बच्चे कैसे सीखते हैं?
 - गणित सीखना
 - अपना-अपना तरीका
 - गणित की भाषा
 - अपने पर भरोसा
 - लगातार विकास
 - संक्रियात्मक अवस्थाएँ
 - हर बच्चा अनूठा
- सारांश

परिचय

एक दिन मैंने छह साल के अहमद को अपनी बड़ी बहन से कहते हुए सुना, “संतरे का बीज कभी भूल से भी मत खाना। अगर खा लिया तो इस बीज से तुम्हारे पेट में एक पौधा निकलेगा जो बड़ा होकर पेड़ बन जायेगा। फिर तुम्हारा पेट फट जायेगा।” कितने अनोखे ढंग से अपनी बहन को यह बात समझा रहा था कि संतरे का बीज निगलना नुकसानदेह क्यों होता है? क्या इस बात को हम बड़े लोग भी ऐसे ही समझाते? शायद नहीं। क्या इससे यह नहीं लगता कि हम लोग बच्चों के सोचने-समझने के तौर तरीकों से लगभग अनजान हैं और इस बारे में अक्सर अपनी ही राय बना लेते हैं?

और फिर हममें से कितने लोग इन बातों के बारे में सोचते भी हैं कि प्राइमरी स्कूल के बच्चे सीखते कैसे हैं? स्कूल जाने से पहले से लेकर प्राइमरी स्कूल की पढ़ाई तक, क्या सभी का सीखने का रास्ता एक जैसा ही होता है? क्या सभी बच्चों का विकास एक ही तरह होता है? इस पाठ में हम इन्हीं सवालों पर गौर करेंगे।

यहाँ हम इस बात को जानने की कोशिश करेंगे कि बच्चे कितने अलग-अलग तरीकों से सीखते हैं। हम छोटे बच्चों के आम स्वभाव को समझने की कोशिश करेंगे। साथ ही यह भी समझेंगे कि बड़ों और बच्चों के सोचने में जो फर्क होता है (adult-child gap), वह बच्चों के प्रति बड़ों के रवैये को किस तरह ढालता है। **बच्चे इस दुनिया में आने के साथ ही सीखना शुरू कर देते हैं।** इसलिए स्कूल में दाखिल होने तक वे काफी बातें जान चुके होते हैं।

हम स्कूल जाने से पहले से लेकर प्राइमरी शिक्षा के दौरान बच्चों के विकास की प्रमुख अवस्थाएँ बच्चों के सामान्य संज्ञानात्मक (cognitive) विकास को दर्शाती हैं, यहाँ इनकी चर्चा हमने गणित सीखने/सिखाने के नज़रिये से की है। हमारी बातचीत का मुख्य मुद्दा यह है कि स्कूल जाने से पहले से लेकर प्राइमरी शिक्षा

के अंत तक गणित सिखाते वक्त, सीखने वाले बच्चों के नजरिए को सबसे अहम मानना चाहिए, न कि विषय-वस्तु को और सिखाने वाले के नजरिए को।

‘संज्ञानात्मक’ का मतलब है ज्ञान को सीखने, समझने और व्यक्त करने की प्रक्रिया से संबंधित।

इस पाठ में हम चाहते हैं कि आप निम्नलिखित सवालों पर सोचें – गणित के प्रति बच्चों के रवैये पर कौन सी बातें असर डालती हैं? बच्चे गणित से डरते क्यों हैं और गणित में दिलचस्पी लेना बंद क्यों कर देते हैं? स्कूली पढ़ाई इस रवैये को जन्म कैसे देती है या उस पर क्या असर डालती है?

अर्थात् प्राइमरी स्कूल के शिक्षक को उन बातों का खास ध्यान रखना चाहिए जो बच्चों के गणित सीखने और उसके प्रति उनके रवैये पर असर डालती हैं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आप

- बच्चों के सोचने और सीखने के विकास की अवस्थाओं के बारे में संक्षेप में बता सकेंगे;
- यह तय कर सकेंगे कि गणित की विभिन्न अवधारणाओं को प्राइमरी स्कूल में किन स्तरों पर पढ़ाया जाना चाहिए;
- तर्क देकर यह समझा सकेंगे कि गणित को अच्छी तरह सिखाने के लिए, बच्चों को समझना क्यों ज़रूरी है।

बच्चे कैसे सोचते हैं?

आपका अलग अलग उम्र के बच्चों से वास्ता पड़ा होगा। अपने अनुभवों से क्या आप मानते हैं कि बच्चे बहुत छोटी उम्र से ही सीखना शुरू कर देते हैं और सीखने का यह सिलसिला लगातार जारी रहता है ? या आप सोचते हैं कि जब बच्चे स्कूली पढ़ाई शुरू करते हैं तो वे एक ‘खाली स्लेट’ की तरह होते हैं और उन्हें सब कुछ स्कूल में ही सिखाया जाता है?

बच्चे किसी भी अनुभव या गतिविधि से सीखते हैं।

दरअसल बच्चे उन सभी चीजों से सीखते हैं जिन्हें वे देखते हैं या अनुभव करते हैं। स्कूल शुरू करने से पहले ही वे काफी कुछ सीख चुके होते हैं। और स्कूल में पढ़ाई करते हुए भी स्कूल के बाहर की दुनिया से उनका सीखना जारी रहता है। अगर हम यह मानते हैं कि बच्चे सिर्फ स्कूल में सीखते हैं तो इसकी वजह यह है कि सीखने के बारे में हमारी समझ ही गलत होती है। जब कोई बच्ची किसी जिगसाँ पहेली (jigsaw puzzle) को हल करने में घंटों लगी रहती है तो बड़े लोग उसे अक्सर यही कह कर डांटते हैं कि वह वक्त बर्बाद कर रही है। इन बड़े लोगों को शायद ही इस बात का अहसास होता है कि ऐसे ही खेलों से चीजों के आकृति व काम (shapes and sizes) के बारे में उस बच्ची की समझ बेहतर हो रही है। और इस तरह से सीखने का काम बिना किसी औपचारिक पढ़ाई के, स्कूल के बाहर हो रहा है। बच्चों के सीखने के बारे में इस पहलू को नजरअंदाज करके अगर हम किन्हीं भी धारणाओं पर आधारित पाठ्यक्रम बनाते हैं तो गणित में या और किसी भी विषय में बच्चों की रुचि खत्म होना स्वाभाविक है।

जिगसाँ पहेली ऐसी पहेली है जिसमें बच्चें लकड़ी, गते या प्लास्टिक के छोटे-छोटे टुकड़ों को जोड़कर कोई आकृति बनाते हैं।

जन्म लेते ही बच्चे अपने इर्द-गिर्द की दुनिया को महसूस करने लगते हैं और धीरे-धीरे उसके बारे में अपनी एक समझ बनाने लगते हैं। कुछ समय बाद वे लोगों और चीजों को पहचानना शुरू करते हैं। साथ ही वे अपने आसपास के माहौल से ज्यादा तालमेल बैठाने लगते हैं; देखकर, छूकर, सुनकर, चखकर और सूंघकर चीजों को महसूस करने लगते हैं।

जब कोई नहीं बच्ची जमीन पर चलते हुए उंगली से धूल उठाती है, या किसी चीज को स्पर्श करती है, तब उसके दिमाग में क्या चल रहा होता है ? क्या उसके मन में कुछ सवाल नहीं उठ रहे होते और वह उनके जवाब पाने की कोशिश नहीं कर रही होती ? इस बारे में अपनी एक समझ बना कर क्या वह उसको परख नहीं रही होती ? यही न खत्म होने वाली उत्सुक खोजबीन करने की क्षमता और अपने आसपास की दुनिया को समझने की लगातार चाह होती है जो इस नहीं बच्ची को एक अन्वेषक, खोजी, निर्णय लेने वाली नहीं वैज्ञानिक बनाते हैं ठीक यही बात बड़े बच्चों पर भी लागू होती है।



चित्र 1 : “क्या इसका स्वाद भी उस चीज के जैसा है जो मां ने सुबह मुझे खाने को दी थी?”

E1) अपनी जान पहचान के चार या पाँच साल के बच्चों के खोजबीन करने के कुछ उदाहरण दें?

बच्चों का दिमाग कैसे काम करता है, आइए अब इससे जुड़े एक और पहलू पर ध्यान दें।

(i) एक दिन चार साल का आकाश अपने पापा के साथ सैर पर गया। कुछ देर बाद उसने कहा, “पापा मैं थक गया हूँ। चलो, वापस चलें।” उसके पापा ने कहा, “अभी से थक गए? आओ थोड़ी दूर और चलते हैं।” उसके पापा ने यह नहीं सोचा कि जहाँ वे 75 कदम ही चले आकाश 225 कदम चल चुका था।

(ii) आठ वर्ष के राहुल को उसका अध्यापक बहुत मारता था। तंग आकर उसने एक दिन अपनी मां को कहा, “मैं स्कूल नहीं जाऊंगा।” मां ने कुछ न पूछकर, कहा “ठीक है।” उसने सोचा कि उसका बेटा रोज-रोज स्कूल जाने से ऊब गया है और यूँ ही नहीं जाना चाहता। उसने यह जानने की कोशिश नहीं की कि राहुल को स्कूल में कोई परेशानी तो नहीं हो रही है।

बच्चों और बड़ों के सोचने का ढंग अलग होता है।



चित्र 2 : बड़ों और बच्चों के सोचने का ढंग अलग होता है

क्या आप यह मानेंगे कि इन दोनों ही उदाहरणों में बड़े लोगों ने इस बात को समझने की कोशिश नहीं की कि बच्चे क्या कहना चाह रहे थे ? बच्चे क्या महसूस कर रहे थे और क्या कहना चाह रहे थे, इस बारे में उन्होंने अपनी समझ के मुताबिक बस अपनी राय बना ली थी।

गणित पढ़ाते हुए अक्सर आपका वास्ता ऐसी ही बातों से पड़ेगा। मिसाल के तौर पर, रोटी का आधा टुकड़ा मांगे जाने पर हो सकता है कि एक छोटी बच्ची छोटा-सा ही टुकड़ा दे। उसके लिए एक से कम कोई भी हिस्सा आधा है, और आधे का मतलब एक छोटा सा टुकड़ा भी सकता है। लेकिन ऐसे कितने बड़े लोग हैं जो बच्चों की सोच को समझने की कोशिश करते हैं।

E2) बच्चों और बड़ों के सोच में फर्क दिखाने वाले कुछ और उदाहरण दें।

E3) ऐसे उदाहरण दें जहाँ बड़े लोग अपनी सोच बच्चों पर लादते हैं।

E4) (क) प्राइमरी कक्षा में बड़ों और बच्चों के बीच की दूरी किन बातों में झलकती है?

(ख) ऐसी पांच बातें बताइए जिनसे शिक्षक होने के नाते आप इस दूरी को कम कर सकते हैं?

आइए, अब बड़ों और बच्चों की दूरी से जुड़े एक और पहलू को देखें। ज्यादातर पढ़े-लिखे लोगों के बच्चे घर पर ही अक्षर और गिनती बोलना सीख लेते हैं। कुछ मां-बाप तो इस बात की डींग भी हाँकते हैं कि उनके बच्चों ने 3 या 4 साल की उम्र में ही 100 तक गिनती सीख ली। लेकिन, इस तरह के 'सीखने' का मतलब क्या है? क्या इसका मतलब यह है कि बच्चे 100 चीजों को गिन सकते हैं? क्या वे 50 और 100 चीजों में फर्क समझ सकते हैं?

बार-बार दोहरा कर छोटे बच्चे क्या सीख रहे हैं? सिर्फ संख्याओं के ढेर सारे नाम, बिना उनका मतलब जाने। हालांकि संख्याओं के नाम जानना भी उनके बारे में सीखने का एक हिस्सा है, लेकिन बच्चे संख्याओं का मतलब सिर्फ इतने से ही नहीं समझ सकते।

जब कोई बड़ा यह मान लेता है कि सिर्फ संख्याओं का नाम जान लेने से बच्चे उनका मतलब समझ गए हैं, तब वह उन पर और बातों को (जैसे जोड़) "सीखने" के लिए भी जोर देते हैं। इन बच्चों को संख्या का मतलब ही समझने के लिए और वक्त की जरूरत होती है। लेकिन इन्हें उस बड़े से तारीफ की चाह भी तो होती है। इसलिए वे बिना समझे, सिर्फ याद करके जोड़ भी कर डालते हैं। इस तरह से बड़ों की उम्मीदें, बच्चों के सही तरीके से सीखने में रुकावट बन जाती है।

अफसोस की बात तो यह है कि ज्यादातर बच्चों से यही उम्मीद की जाती है कि वे मशीनी तरीकों से सही जवाब तक पहुँच जायें और रट-रटा कर कैसे भी बड़ों की उम्मीदों पर खरे उतरें। इस तरह तमाम स्कूली ज्ञान चीजों के बारे में एक सही समझ के बजाय, सिर्फ सूचना बनकर रह जाता है। यह बात पूर्व स्कूली बच्चों पर ही नहीं, बड़ी कक्षाओं में पढ़ रहे बच्चों पर भी लागू होती है। उदाहरण के लिए, हम लोग बच्चों को क्षेत्रफल के बारे में सिर्फ इतना बताते हैं कि "लंबाई $\times$ चौड़ाई = क्षेत्रफल" हममें से बहुत कम लोग बच्चों को यह समझाने की कोशिश करते हैं कि 'क्षेत्रफल' का असली मतलब क्या है?

E5) कक्षा 1 से कक्षा 5 तक हरेक कक्षा के लिए किसी भी अवधारणा का एक-एक उदाहरण दें जिसे उस कक्षा के बच्चे बिना समझे रट लेते हैं। यह भी बताइए कि रटते हुए वे उस अवधारणा के किन पहलुओं को नजरअंदाज कर देते हैं।

अभी तक हमने उन बातों पर सवाल उठाए हैं जो बच्चों के सीखने के ढंग के बारे में बड़े लोग मानते रहे हैं। अगर बच्चे इस ढंग से नहीं सीखते, तो फिर सवाल यह उठता है कि बच्चे सीखते कैसे हैं? आइए इस पर विचार करें।

बच्चे कैसे सीखते हैं?

कभी आपने एक छोटे बच्चे को यह समझाने की कोशिश की है कि “लट्टू” का क्या मतलब है? क्या आपने उसे सिर्फ जबानी बताया? या आपने बच्चे को लट्टू देकर, उसे चलाने, घूमते देखने और उससे खेलने का मौका दिया? अगर आपने दूसरा तरीका अपनाया तो आप जरूर बच्चे का समझा पाये होंगे कि लट्टू क्या होता है। लट्टू की आकृति, आकार, बनावट और अन्य गुणों के बारे में बच्चे उसे देखकर, छूकर और उससे खेलकर ज्यादा बेहतर सीखते हैं।

क्या इस उदाहरण से हमें कुछ संकेत मिला कि बच्चे कैसे सीखते हैं?

बच्चे अनुभव से सीखते हैं

सीखने के बारे में एक नजरिया यह है कि बच्चे चीजों पर तरह-तरह के प्रयोग करके उनके बारे में सीखते हैं। वे चीजों को उठाते हैं, फेंकते हैं, जोड़-तोड़ करते हैं और इस तरह उनके बारे में जानकारी हासिल करते हैं। चीजों को छूने और उनकी जाँच पड़ताल करने की बच्चों की स्वाभाविक इच्छा उन्हें उन चीजों के अलग-अलग पहलुओं को समझने में मदद देती है। इस तरह से वे चीजों के आकार, आकृति और अन्य गुणों के बारे में अपनी समझ बनाते हैं। इसके साथ-साथ वे चीजों के जगह से जुड़े गुणों (spatial properties) को समझ कर उनका इस्तेमाल कर सकते हैं, जैसे कौन सी चीज किस चीज के नीचे रखी जा सकती है, या उनके खिलौने डिब्बों में कैसे आ सकते हैं।



चित्र 3 : “मैं तो सिर्फ कांच के बारे में जानना चाहता था।”

हां, यह बात जरूर है कि हर बार बच्चे यह बता न सकें कि उन्होंने समझा क्या है। उदाहरण के लिए वे गेंद और पत्थर में फर्क जानते भी हों और उसे दिखा भी पायें पर बता कर समझा न सकें। ठीक वैसे ही जैसे आप साइकिल चलाना जानते हों, तो भी क्या आप 10 वाक्यों में बता पायेंगे कि आप साइकिल कैसे चलाते हैं,

“बच्चे चीजों के बारे में अपनी समझ खुद बनाते हैं।”

चीजों को अनुभव करते हुए और उनके बारे में सोचते हुए बच्चे और भी बहुत कुछ कर रहे होते हैं। खेलकूद और बड़ों से मेलजोल के दौरान बच्चों का कई तरह की अवधारणाओं और कौशलों से वास्ता पड़ता है। और इन पर वे तरह-तरह से महारत हासिल करने की कोशिश करते हैं। जैसे कि— ‘आधे’ का मतलब समझाने के लिए अगर बच्चों को तरह-तरह की चीज आधे में बांटने को कहा जाये तो वे धीरे-धीरे ‘आधे’ की अवधारणा की समझ बनाएंगे।

इस तरह अलग-अलग गतिविधियों को करते हुए, बच्चे उनका विश्लेषण और संश्लेषण भी करते हैं। इसी प्रक्रिया में वे अपने इर्द-गिर्द की दुनिया की समझ बनाते हैं।

विश्लेषण : किसी चीज को या प्रक्रिया को छोटे-छोटे हिस्सों में बांटना और उन हिस्सों को समझ कर उस पूरी चीज या प्रक्रिया को समझना।

संश्लेषण: किसी चीज या प्रक्रिया के छोटे-छोटे हिस्सों को एक साथ रख कर (जोड़कर) चीज या प्रक्रिया को उसके पूरे रूप में समझना।

E6) आपकी समझ से, छोटे बच्चों के बारे में नीचे दिये गए कथनों में से सही कथन के लिए (✓) और गलत के लिए (x) का निशान लगाए।

(क) बच्चे जितना बता पाते हैं, उससे ज्यादा जानते हैं।

(ख) जब बच्चे स्कूल जाना शुरू करते हैं तब वे गणित बिल्कुल नहीं जानते।

(ग) गिनती कर पाने का मतलब है कि संख्याओं के नामों को एक क्रम में बोलना।

(घ) अगर कोई बच्ची किसी अवधारणा को समझाने के लिए सही शब्द का इस्तेमाल करती है, तो इसका मतलब है कि वह उस अवधारणा को समझती है।

आइए अब बच्चों की गणित सीखने की क्षमता पर चर्चा करें।

गणित सीखना

बच्चे गणित की अवधारणाओं को कैसे सीखते हैं ? क्या किसी भी अवधारणा को किसी भी स्तर पर इस तरह से पेश किया जा सकता है कि बच्चे को उसके बारे में कुछ तो समझ में आ जाए? अगर ऐसा है, तो हमें बच्चे के विकास के स्तर के मुताबिक ही वह अवधारणा उसके सामने रखनी होगी। हमें यह जानना होगा कि उस अवधारणा को सीखने के लिए बच्ची किस हद तक तैयार है, या नहीं है। जैसे कि जोड़ने और घटाने का संबंध समझने के लिए बच्चों को यह समझ में आना चाहिए कि सभी क्रियाएं, **(reversible)** होती हैं। और यह वह तभी समझ सकेंगे जब उन्हें **संरक्षण (Conservation)** की समझ हो।

प्रतिवर्त्यता का सिद्धान्त : यदि किन्हीं चीजों पर की जा रही क्रियाओं का क्रम ठीक उलट दिया जाये तो उलटे क्रम में की जा रही क्रियाएं उन चीजों को वापस उनकी मूल अवस्था में पहुंचा देती है।

संरक्षण का सिद्धान्त : किसी भी चीज की मात्रा (गिनती, द्रव्यमान, द्रव) वही बनी रहती है भले ही उसकी जगह या उसका आकार बदल दिया जाये।

यह जानने के लिए कि बच्चे को गिनती के संरक्षण की समझ है या नहीं, आम तौर पर निम्नलिखित प्रयोग किया जाता है :

पहले, बच्ची को बराबर लंबाई की दो पंक्तियों (लाइनों) में रखे बटन दिखाये जाते हैं, जहां दोनों लाइनों में एक जितने ही बटन हैं। बच्ची के सामने ही एक लाइन (नीचे दी हुई लाइन) के बटन फैला कर रख दिये जाते हैं। दूसरी लाइन (लाइन ख) को वैसे ही छोड़ दिया जाय तब बच्ची से पूछा जाता है कि दोनों लाइनों में रखे बटन गिनती में बराबर है या नहीं।

क • • • • • • • •

ख • • • • • • • •

स्विट्जरलैंड के मनोवैज्ञानिक **जीन प्याजे** (Jean Piaget) (1896–1980) के अनुसार :

जो बच्चे संरक्षण समझते हैं, वे कहते हैं कि दोनों लाइनों में बटनों की संख्या बराबर है क्योंकि आपने न तो लाइन ख से बटन उठाये हैं न ही लाइन क में बटन रखे हैं। वे यह भी तर्क देते हैं कि लाइन क के बटन ऐसे पास भी लाए जा सकते हैं जिससे कि दोनों लाइनों में बटनों की स्थितियाँ ठीक एक-सी हो जायें। यह तर्क दिखाता है कि इन बच्चों में अपने सोच की प्रक्रियाओं को प्रतिवर्तित करने की क्षमता है।

इस प्रयोग में बच्ची और बड़े (प्याजे) के बीच हो रही बातचीत में बड़ा, बच्ची की बात को सुनने और समझने के लिए तैयार था। साथ ही वह उसे सोचने के लिए भी प्रेरित कर रहा था। वह उसे सोचने समझने वाली एक स्वतंत्र इंसान मान कर चल रहा था। **ऐसे अनुभवों से बच्चे यह सीखते हैं कि कारण कैसे बताए जाएं और तर्क कैसे दिए जाएं।** जब बच्चे इस तरह के कई अनुभवों से गुजरते हैं, तब उनमें धीरे-धीरे गणितीय ढंग से सोचने की क्षमता विकसित होती है।

E7) किसी अवधारणा की समझ को विकसित करने के लिए, ऊपर दिये गए उदाहरण की तरह बड़े और बच्चे की बातचीत का एक उदाहरण दें।

जैसा कि आप जानते हैं, औपचारिक गणित में बड़े पैमाने पर प्रतीकों और ऐल्गोरिद्मों (algorithm) का इस्तेमाल होता है।

उदाहरण : कक्षा 4 की शिक्षिका अपनी कक्षा को भिन्न (fraction) पढ़ाने जा रही थीं। सत्र की शुरुआत में उन्होंने बच्चों से पूछा “अगर तुम्हारे पास तीन चॉकलेट हों और तुम्हें इन्हें पाँच लोगों में बराबर-बराबर बाँटना हो, तो तुम यह काम कैसे करोगे?” ज्यादातर बच्चे इस काम को करने के लिए एक से ज्यादा तरीके सोच सके। सत्र के अंत तक, जब बच्चों को भिन्न पढ़ा दिए गए थे, तो शिक्षिका ने फिर वही सवाल पूछा। और इस बार ज्यादातर बच्चे इस काम को नहीं कर सके! वास्तविक अनुभवों और व्यावहारिक बुद्धि की जगह अब उनके पास कुछ “सूत्र” थे, जो उन्हें न तो कभी समझ में आए और न ही वे यह याद रख सके कि उन सूत्रों का इस्तेमाल कैसे किया जाए।

यह उदाहरण बताता है कि बच्चों को सिर्फ कुछ बने बनाये सूत्र दे देना, बिना यह समझाए कि वे सूत्र कारगर हैं, अक्सर उनके सोचने में रुकावट डालता है। कई दफा, अगर बच्चों की अपने आप पैटर्न देखने दिया जाए तो वे बड़ी आसानी से अंकगणित के उन सूत्रों को सीख लेते हैं जो आप उन्हें सिखाना चाहते हैं।

और जहां तक प्रतीकों का सवाल है, प्रयोगों से पता चलता है कि 9 साल तक के बच्चों को भी जोड़ और घटा को प्रतीकों (+ और -) द्वारा दिखाने में मुश्किल होती है। प्राइमरी स्कूल के ज्यादातर बच्चे आम तौर पर अंकगणित की संक्रियाओं के लिए इस्तेमाल होने वाले प्रतीकों से परेशान रहते हैं। ऐसा इसलिए है कि प्रतीक व ऐल्गोरिद्म बच्चों को ऐसे पढ़ाये जाते हैं कि उन्हें उसमें कोई तुक नहीं नजर आता, क्योंकि वे उनके अनुभव से बिल्कुल जुड़े हुए नहीं होते। इसलिए प्रतीकों का इस्तेमाल करने में बच्चों को दिलचस्पी नहीं होती।

बच्चे को अमूर्त अवधारणाओं से सीखाने के लिए सबसे पहले तो हमें यह याद रखना होगा कि सिर्फ बताने से हमें अनजाने प्रतीकों का वास्तविकता से संबंध जोड़ने में दिक्कत होती है, चाहे इसके बारे में हमें कितनी भी बार क्यों न बताया जाए। हमें इसके ठीक उल्टा चलना चाहिए, यानी **वास्तविक उदाहरणों से शुरू करके प्रतीकों की तरफ बढ़ना चाहिए।** दरअसल बच्चों को सिखाने का सबसे आसान तरीका यही है कि अमूर्त अवधारणाओं और प्रतीकों को उनके रोजाना के अनुभवों से जोड़ा जाए।

E8) दशमलव पद्धति में जिस तरह आधार दस (10) होता है उसी तरह पांच वाली, आधार संख्या पद्धति में 4 और 5 जोड़िए। इस सवाल को समझने के लिए आप किन प्रक्रियाओं से गुजरे? आपको क्या मुश्किलें पेश

आई? आपके ख्याल में जो बच्ची गणित सीखना शुरू करती है, उसका काम इससे ज्यादा मुश्किल होता है या कम?

इस अभ्यास को करते हुए क्या आपको यह लगा कि आपके पास इसे करने के लिए जरूरी जानकारी नहीं है? इस वजह से आपको इसे करने में कितनी मुश्किल हुई? इन सवालों से निकलने वाली बात महत्वपूर्ण है। वह यह है कि **सीखने वाले बच्चे किसी अवधारणा या किसी को समझने के लिए कितने तैयार हैं।** मिसाल के तौर पर, कक्षा 2 के बच्चे 26 लिख व पहचान सकते हैं और यह भी बता सकते हैं कि वह 62 से छोटा है। लेकिन वे ठीक नहीं समझ पाते कि 26 में 2 का मतलब 20 है। पर इनके शिक्षक अक्सर यह मान लेते हैं कि बच्चों को स्थानीय मान (place value) का मतलब समझ में आ गया है और उन्हें मानक ऐल्गोरिद्म का इस्तेमाल करके “बड़ी” संख्याओं वाले सवाल हल करने को दे देते हैं। दरअसल, सवालों को हल करने के तरीके बच्चों को सिखा कर, जिनके लिए वे तैयार न हों, हम उनके सोचने में रूकावट डाल रहे होते हैं। इसकी वजह यह है कि ऐसा करने से वे बिना सोचे समझे सिर्फ मशीनी तरीके से जवाब पाने पर अपना पूरा ध्यान लगा देते हैं।

किसी खास अवधारणा/कौशल को बच्चे तभी सीख सकते हैं, जब वे उनके लिए तैयार हों।

बच्चे अपने ही तरीकों से सीखते हैं

7 साल के विभोर से यह पूछा गया कि ‘आठ चीजों की सात ढेरों’ में कुल कितनी चीजें हैं उसने कहा उसे नहीं पता। उससे फिर पूछा गया, “क्या तुम इसका जवाब मालूम कर सकते हो?” देर तक चुप रहने के बाद विभोर ने कहा “56”, तुमने यह कैसे निकाला?” विभोर बताया, “दस अट्ठे 80 होता है। उसमें से 8 घटाएं तो 72, फिर 8 घटाएं तो 64 और फिर 8 घटाएं तो 56 बचता है।”

कक्षा 3 की शान्ता से $189 - 67$ हल करने को कहा गया। उसने कहा कि यह $3+30+89$ है उसके इस तरीके को शिक्षक ने ‘गलत’ ठहराया क्योंकि उनका जवाब पाने का तरीका ‘189 से 7 घटाएं और फिर 60’

अगर इस तरह से बच्चों को अपने तरीकों से सवालों को हल करने से रोका जाए तो उनका सोचने, संबंध बनाने और गणित में पैटर्न पहचानने की क्षमता के विकास में रूकावट पड़ती है इसके बजाय वे समझते हैं कि गणित सीखने का मतलब है— एक-दूसरे से संबंध न रखने और बेतुके तथ्यों को सीखना या कुछ सूत्रों को रट-रटा कर लागू करना होता है। (जैसे— गणित के पहाड़े)।

अगर आप बच्चों को गणित के सवाल अपने तरीकों से करने दें, तो आपको उनके सोचने में अभूतपूर्व विविधता दिखाई देगी। “बच्चों को गणित पढ़ाते हुए मुझे अक्सर इस बात पर हैरानी होती है कि बच्चे कितने अलग-अलग तरीकों से सवालों को हल करते हैं। सवाल और जवाब के बीच तर्कों का एक सिलसिला होता है।

जिन्हें बच्चे अक्सर खुद ही सोचते हैं मैंने एक बार बच्चों को दो अंको वाली दो संख्याओं को गुणा करना सिखाया। मैंने कुछ सवाल हल किए और कई बार ऐल्गोरिद्म समझाया। फिर मैंने उन्हें यह सवाल दिया

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \\ \times 1 \ 3 \\ \hline \end{array}$$

सबसे पहले सवाल हल करने वाली बच्ची का जवाब था 156, उसकी कॉपी में सवाल के ठीक नीचे यह जवाब लिखा था। मैंने उसकी रफ कॉपी देखी तो उसमें 100 20 30 6 लिखा था। बार-बार पूछने पर बच्ची ने कहा, “मैंने पहले 10 को 10 से गुणा किया, फिर 2 को 10 से, वगैरह।”

एक बार और मैं सरल ब्याज पर सवाल करा रही थी जिसमें ब्याज की दर निकालनी थी। बच्चों को सवाल दिए हुए मुझे कुछ देर हुई थी कि एक बच्चे ने हाथ उठा दिया। मुझे उसकी रफ्तार पर हैरानी हुई। मेरे पूछने पर उसने सही जवाब (5%) बताया। मैंने मन ही मन अपने आप को शाबाशी दी कि इतना मुश्किल ऐल्गोरिद्म मैंने इतनी सफलता से समझा दिया। अचानक मुझे ख्याल आया कि मैं उसकी कॉपी में देखूँ कि उसने सवाल को कैसे हल किया। मुझे यह शक भी था कि शायद उसे घर में यह सब सिखाया गया हो। पर बच्चे की कॉपी खाली थी। मैंने उससे पूछा कि उसने सवाल हल कहाँ किया था। उसने कहा, “ओह! मैंने तो वही लिखा है जो आपने कल कहा था। आप ही ने तो कहा था कि जमा किए गए पैसे पर बैंक 5% ब्याज देते हैं।”



चित्र 4: अपनी गणितीय सोच विकसित करते हुए एक बच्ची।

इन दो उदाहरणों से आप किस नतीजे पर पहुँचे? क्या आप मानेंगे कि ये इस बात को साबित करते हैं कि **बच्चे अपने तरीकों से सवाल हल करते हैं**? बड़ों की नजर में ये तरीके सही भी हो सकते हैं और गलत भी। पर बच्चों की नजर में वे हमेशा सही होते हैं। अपने गणितीय अनुभवों को समझने के लिए बच्चे अपने पुराने तरीकों को बदलते रहते हैं और उनके मुताबिक नए तरीके खोजते रहते हैं। सही माहौल मिले तो यह सिलसिला जारी रहता है और बच्चे को स्वाभाविक रूप से गणित समझने और गणितीय तौर पर सोचने के लायक बनाता है। लेकिन अगर बच्चों पर एक ही तरीका थोपा जाए और अलग हट कर नए ढंग से कुछ करने की गुंजाइश न छोड़ी जाए तो धीरे-धीरे अपने तरीके निकालने और अवधारणाओं को समझने की उनकी अपनी क्षमता और इच्छा कम होने लगती है।

E9) अपने आसपास कुछ बच्चों को गणित का कोई सवाल दें। यह सवाल ऐसी किसी अवधारणा पर हो जिसके बारे में उन्हें पहले से हल करने के ढेरों तरीके या ऐल्गोरिद्म न बताए गए हों। क्या सभी बच्चे सवाल को हल करने के लिए एक ही तरीका अपनाते हैं? वे किन-किन तरीकों से यह सवाल हल करते हैं?

E10) यहां हम 4 सवाल दे रहे हैं। चार बच्चों ने इनमें से एक-एक सवाल, नीचे दिए गए तरीकों से हल किया। इन सवालों को हल करने के लिए बच्चों ने कौन-कौन से तरीके अपनाये? बताइए।

(क) $8+6 = 8+2+4 = 14$

(ख) $4+9 = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$

(ग) $3+12 = 12, 13, 14, 15$

(घ) $7+5 = 1+1 + \dots + 1$ (7 बार) $+1+1+ \dots + 1$ (5 बार) $= 12$

इस तरह हम यह कह सकते हैं कि मानक ऐल्गोरिद्म बच्चों के सोचने और गणित के बारे में अपनी समझ बनाने में रुकावट डालते हैं। उनके चलते गणित महज प्रतीकों को मशीनी ढंग से इस्तेमाल कर पाने का सिलसिला बन कर रह जाता है। इस बात को वे लोग और भी बढ़ावा देते हैं जो बच्चों को सिर्फ किसी ऐल्गोरिद्म को लागू करने में मशीनी ढंग से लिखे गए चरणों के लिए नम्बर देते हैं।

गणित की भाषा बोलना

कक्षा 2 के शिक्षक संख्या 11 की मिसाल लेकर स्थानीय मान की अवधारणा समझा रहे थे। उन्होंने शुरुआत इस तरह की, “एक और एक ग्यारह होते हैं।” कुछ बच्चे, जिन्होंने अब तक यह सीखा था कि एक और एक

दो होते हैं, एकदम चक्कर में पड़ गये। यह भ्रम कैसे पैदा हुआ? कहीं उस भाषा की वजह से तो नहीं जो शिक्षक ने इस्तेमाल की थी?

जाहिर है कि बच्चों को गणितीय अवधारणाएं समझाने के लिए भाषा की जरूरत होती है। वह खुद भी भाषा सीख रहे होते हैं। यानी गणित सीखते वक्त बच्चों को गणित के साथ-साथ भाषा को भी समझना होता है। इसलिए अगर आप यह पाते हैं कि कोई बच्चा गणित की किसी अवधारणा को नहीं सीख पा रहा है तो इसका कारण वह भाषा हो सकती है जो उसे अवधारणा सिखाने के लिए इस्तेमाल की जा रही है। हो सकता है कि वह भाषा ही भ्रम पैदा करने वाली हो।

“गणित की भाषा और भाषा के रूप में गणित, दोनों को समझने में बच्चों को काफी प्रयास करना पड़ता है।”

E11) अपने अनुभव से कुछ ऐसे उदाहरण दें जो भाषा के कारण बच्चों के गणित की अवधारणाओं को समझने में दिक्कतें पैदा करते हैं।

कभी-कभी कुछ बच्चे अपनी परिस्थितियों के कारण उन शब्दों को नहीं जानते जो किताबों में होते हैं या जिन्हें शिक्षक इस्तेमाल करते हैं। जैसे कि अगर उन्हें ‘लघु’, ‘शेष’, ‘समान’, ‘भिन्न’, ‘गुणनफल’, ‘प्रत्येक’ जैसे शब्दों के मतलब न मालूम हों तो इससे भी गणित समझने में रुकावट पड़ सकती है। साथ ही, जब एक ही गणितीय अवधारणा को अलग-अलग शब्दों से व्यक्त किया जाता है, तो भी वे चकरा सकते हैं। जैसे कि, घटाने की संक्रिया को व्यक्त करने के लिए ‘घटा करो’, ‘अंतर निकालो’, ‘व्यकलन करो’, सभी इस्तेमाल किए जाते हैं।

बड़े बच्चों को भी अक्सर इस समस्या का सामना करना पड़ता है। ऐसा इसलिए है कि किसी भी स्तर पर गणित की अवधारणाओं को सिखाने के लिए इस्तेमाल की जाने वाली भाषा को समझने के लिए ही काफी कोशिश करनी पड़ती है। बच्चों को इस बात के लिए बढ़ावा देना चाहिए कि वे गणित की अवधारणाएं सीखते हुए उनके बारे में बात करें। इस तरह से गणित की भाषा सीखने और इस समस्या से निपटने में उन्हें मदद मिलती है।

कुछ बच्चे किसी इबारती सवाल (word problem) की लम्बाई और जटिलता से भी चकरा सकते हैं। जैसे कि यह सवाल लें, “25 और 30 के बीच में वह कौन सी संख्या है जिसे 2 और 3 दोनों से पूरा-पूरा भाग नहीं दिया जा सकता?” यह वाकई एक जटिल सवाल है। बच्चों को यही सवाल अगर इस तरह दिया जाए – “25 और 30 के बीच में एक संख्या है। इस संख्या को आप 2 और 3 भाग नहीं दे सकते। यह संख्या कौन सी है?” वह उसे यकीनन ज्यादा आसानी से समझ पाएंगे।

E12) गणित के नीचे दिए गए सवाल को कक्षा 2 के और कक्षा 4 के बच्चों को आप किन तरीकों से समझाएंगे?

“एक चौथाई, आधे से कम क्यों है?” आप जिस भाषा का इस्तेमाल करते हैं, उस पर गौर करें?

अपनी काबिलियत पर भरोसा : सीखने में मददगार

अजय कक्षा 2 में पढ़ता है। उसके पिता अक्सर उस पर झल्लाते रहते हैं, “तुम कितने बेवकूफ हो। तुम्हें इतना भी नहीं समझ में आता। यह तो तुम्हारी बहन भी समझ लेती है।” आपकी राय में अजय को कैसा लगता होगा? और अगर उसकी बहन यह सुन ले तो उसे कैसा लगेगा?

हम सब की तरह बच्चे भी तभी सबसे बेहतर ढंग से सीखते हैं जब उन्हें अपने आप पर और अपनी काबिलियत पर पूरा भरोसा होता है। जिस बच्चे को अपने आप पर भरोसा नहीं है, उसे यह फिक्र ज्यादा रहेगी कि वह शिक्षक को खुश नहीं कर सकते और वह उनकी नजरों में कमजोर साबित होंगे। शिक्षक

बच्चों की भावनाओं की कितनी कद्र करते हैं और बच्चों के लिए उनका रवैया क्या है, ये दोनों ही बातें बच्चों के सीखने पर गहरा असर डालती है। बच्चों को यह समझा कर कि वे क्या कर सकते हैं, वे क्यों 'सही' या 'गलत' हैं और उन्हें सवाल पूछने तथा अपने संशयों को दूर करने का मौका देकर हम उनमें आत्मविश्वास बढ़ा सकते हैं। यहां सबसे अहम् बात यह है कि शिक्षक को अपने सीखने वालों पर पूरा भरोसा होना चाहिए। इससे भी बढ़कर, वह उन्हें यह अहसास भी दिलाये कि उसे उनके सीखने की क्षमता पर पूरा भरोसा है।

जिन बच्चों को हमेशा यह फिक्र लगी रहती है कि उन्हें डांटा जाएगा या 'होशियार' बच्चों के मुकाबले नीचा दिखाया जाएगा, वे अपने में सिमट जाते हैं। वे कोशिश करते हैं कि उन्हें सवालों के जवाब न देने पड़े। कक्षा में हो रही बातचीत में वे कोई हिस्सा नहीं लेते। और इस सबके पीछे सिर्फ यह डर होता है कि कहीं वे कोई गलती न कर बैठे। इस तरह उनके आत्मविश्वास में कमी आ जाती है और उनमें खुद सोचने और सीखने की काबिलियत घटने लगती है। आजकल की प्रतियोगितात्मक शिक्षा प्रणाली में ज्यादातर बच्चों की यही समस्या है। ऐसे बच्चे मशीनी ढंग से ही, बिना सोचे-समझे चीजों को सीखते जाते हैं और सवाल हल करने के लिए गणितीय रूप से सोचने के बजाए ऐल्गोरिद्मों का इस्तेमाल करते हैं। उनमें यह बात जड़ पकड़ लेती है कि हर सवाल का 'एक ही सही जवाब' होता है। और इस तरह, उनमें सीखने और कुछ नया करने की इच्छा सदा के लिए मर जाती है।

बच्चे भावनात्मक सुरक्षा देने वाले से ही सबसे बेहतर सीखते हैं।

E13) ऊपर दिए गए कारणों की वजह से, क्या बचपन में आपकी या आपके मित्रों की किसी विषय में अरुचि पैदा हुई? ऐसे कुछ अनुभव लिखें। अगर आप अपने शिक्षक की जगह होते तो ऐसी स्थिति में क्या करते?

ऊपर दिए गए अजय की बहन के उदाहरण में एक और अहम् सामाजिक रवैया झलकता है, खासकर इस तरह की बातों में कि, "लड़की होते हुए भी तुम्हारा गणित इतना अच्छा कैसे है?" लोग ऐसा क्यों सोचते हैं कि लड़कियाँ गणित नहीं सीख सकतीं? दरअसल, गणित सीखने के लिए लड़कों और लड़कियों के रवैये में यह फर्क इस बात से आता है कि समाज में लड़को और लड़कियों से अलग-अलग उम्मीदें की जाती हैं। जैसे लड़कों को तो गणित पढ़ने के लिए जोर-शोर से बढ़ावा दिया जाता है और लड़कियों को कहा जाता है कि गणित पढ़कर क्या करेगी। इस मान्यता से कि लड़कियां गणित सीख ही नहीं सकती, उनके आत्मविश्वास को धक्का ही पहुँचता है। इसी वजह से काफी कम उम्र से ही लड़कियों में गणित के लिए अरुचि पैदा हो जाती है।

"लड़कों और लड़कियों में गणित सीखने की एक-सी क्षमता होती है।"

विकास लगातार जारी रहता है

अपने आसपास के किन्हीं दो बच्चों के बारे में सोचें। क्या आप यह कह सकते हैं कि वे एक से हैं? क्या वे एक ही सी बातों को एक से ढंग से सीखते हैं? इस बात की संभावना काफी कम है क्योंकि बच्चे एक दूसरे से बहुत अलग होते हैं। दरअसल कोई भी दो बच्चे एक जैसे नहीं होते। उनके सीखने की रफ्तार अलग होती है। एक ही से हालात में उनकी अलग-अलग प्रतिक्रियाएं होती हैं। और जीवन में वे अलग-अलग अनुभवों से गुजरते हैं। इस विविधता में भी आपने एक पैटर्न देखा होगा, खासकर बच्चों के विकास और उनकी क्षमता में।

मोटे तौर पर, बच्चों के विकास को कुछ अवस्थाओं में बांटा जा सकता है। हर अवस्था पिछली अवस्था पर निर्भर करती है। प्याजे ने संज्ञानात्मक विकास (cognitive development) को चार अवस्थाओं में बांटा है :

संवेदी क्रियात्मक (sensorimotor), पूर्व-संक्रियात्मक (pre-operational), मूर्त संक्रियात्मक (concrete operational), और औपचारिक संक्रियात्मक (formal operational)। इस भाग में हम विकास की दूसरी और तीसरी अवस्थाओं पर ही बात करेंगे।

“प्याजे ने बच्चों के विकास को चार अवस्थाओं में बांटा है जिनमें पहली है संवेदी-क्रियात्मक अवस्था। यह अवस्था जन्म से दो साल तक होती है।”

पूर्व-संक्रियात्मक अवस्था

बच्चे के संज्ञानात्मक विकास की यह अवस्था आम तौर पर 2 साल से शुरू होकर 6 साल चलती है। इस तरह यह ज्यादातर बच्चे के स्कूल जाने से पहले की अवस्था होती है। पूर्व-संक्रियात्मक अवस्था में आम तौर पर बच्चे अपने फैसले इस बात से करते हैं कि चीजें कैसी दिखाई देती हैं, न कि बड़ों की तार्किक सोच के मुताबिक।

जैसे— इस अवस्था के बच्चों को यह नहीं समझ आता कि कुछ क्रियाओं को परिवर्तित भी किया जा सकता है। इसलिए, वे सोचते हैं कि एक पतले लंबे गिलास से चौड़े छोटे गिलास में दूध डालने पर दूध की मात्रा कम हो जाती है। या एक लाइन में चीजों को फैला कर लाइन की लंबाई बढ़ा दी जाए तो उन्हें लगता है कि उसी लाइन में ज्यादा चीजें रखी हुई हैं। क्या बच्चों द्वारा चीजों का संरक्षण न कर पाने की इस कमजोरी से आपने कभी फायदा नहीं उठाया? मैंने तो ऐसा किया है। जैसा कि जब मेरा चार साल का भतीजा जिद करता है कि वह गिलास भर के ठंडा शर्बत पिएगा, तो मैं शर्बत को एक गिलास में भरकर उसे दे देती हूँ। इस तरह उसे एक पूरा गिलास भर ठंडा शर्बत मिल जाता है और वह खुशी-खुशी उसे पी लेता है।

E14) अपने अनुभवों से दो और ऐसे उदाहरण दें, जिनमें बच्चे तर्क के बजाय, जो उन्हें दिखता है उसके आधार पर फैसले करते हैं।

ज्यादातर बच्चे इसी अवस्था में कुछ संख्याओं को थोड़ा-थोड़ा समझने लगते हैं, और रोज़ के अनुभवों में उनका इस्तेमाल करते हैं। उदाहरण के लिए, 2 साल की बच्ची 2 गेंदों और 3 गेंदों के समूहों में फर्क सिर्फ देखकर बताना सीखती है, ठीक वैसे ही जैसे वह मोटर गाड़ी और बस में फर्क बताना सीखती है। लेकिन वह सिर्फ देख कर ही 8 गाड़ियों और 9 गाड़ियों के समूह में फर्क नहीं कर पाती। इतने या इससे बड़े समूहों की तुलना करने के लिए उसे गिनती सीखनी पड़ेगी।

गिनती और चीजों का संरक्षण सीखने के मुकाबले बच्चे ‘कम’ या ‘ज्यादा’ की अवधारणा जल्दी सीख लेते हैं। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि **पूर्व स्कूली बच्चे पैटर्नों में सोचते हैं**। ये बच्चे जो खुद देखते हैं, उस पर ज्यादा भरोसा करते हैं। बच्चे तरह-तरह की आकृतियाँ पहचान तो सकते हैं पर उनकी हूबहू तस्वीर नहीं बना सकते। वे शब्दों के मुकाबले तस्वीरों को ‘पढ़ना’ जल्दी सीख जाते हैं। आपने देखा होगा कि छोटे बच्चे इन्सानों और जानवरों की तस्वीरें आसानी से पहचान लेते हैं लेकिन उतनी आसानी से वर्ग या त्रिभुज जैसी सरल आकृतियाँ नहीं बना पाते। इसी तरह एक छोटी बच्ची जो एक जगह से दूसरी जगह तक पहुँचने का रास्ता याद रख सकती है उसके लिए यह बताना या चित्र बना कर दिखाना बहुत मुश्किल होता है कि वह रास्ता क्या है। पैटर्न पहचानने की अपनी योग्यता के कारण ही बच्चे तमाम ऐसे शब्दों को ‘पढ़’ पाते हैं जिन्हें वे अक्सर देखते हैं हालांकि उन्हें अक्षरों की पहचान नहीं होती।

अगर आप पूर्वस्कूली बच्चों को कुछ चीजें गिनने के लिए दें तो आपको यह जानकर हैरानी होगी कि वे छोटी संख्याओं को पहचान सकते हैं गिन सकते हैं यहाँ तक की उन्हें जोड़ और घटा भी सकते हैं, हालांकि संख्या का संरक्षण वे काफी बाद में कर पाते हैं। अगर चीजों की संख्या छोटी हो तो उन्हें देखकर ही बच्चे

ये सब काम कर लेते हैं। इसके लिए यह जरूरी नहीं कि उन्हें गिनती की जानकारी हो। इसलिए 4 या 5 तक की गिनती को **दृष्टि-बोधात्मक संख्याएं (perceptual numbers)** कहते हैं।

लेकिन आम तौर पर पूर्वस्कूली बच्चे कई आकारों की एक साथ तुलना नहीं कर पाते। वे एक बार में केवल दो ही चीजों की तुलना कर सकते हैं। वे 'कम' या 'ज्यादा' की ही धारणा समझ सकते हैं। लेकिन यह बात कि किसी चीज की मात्रा 'इससे कम है, पर उससे ज्यादा', या फिर 'ज्यादा, कम और उससे कम' वे नहीं समझ सकते। उनके लिए आकार सिर्फ बड़ा या छोटा होता है। बड़े व छोटे के बीच का भी कोई आकार हो सकता है, यह बात उनकी समझ से परे होती है। इसीलिए वे चीजों को उनके आकार या लंबाई के हिसाब से सिलसिलेवार नहीं रख पाते, या घटनाओं को क्रमबद्ध नहीं कर पाते।



चित्र 5 : अगर मात्रा या आकार में बहुत साफ फर्क दिखाई देता है तो बहुत छोटे

बच्चे भी यह समझ लेते हैं कि चीजों का कौन सा समूह बड़ा है।

पूर्वस्कूली बच्चे छोटी संख्याओं को जोड़ और घटा सकते हैं।

E15) मेरा एक तीन साल का दोस्त है। उसके पास खेलने के लिए बहुत सी छोटी गाड़ियाँ हैं। एक बार उसके साथ खेलते हुए, मैंने गाड़ियों को दो समूहों में बांट दिया। एक समूह में 14 गाड़िया थी जिन्हें फैला कर रखा गया था, और दूसरे में 15 थीं जिन्हें पास-पास रखा गया था। जब उसे यह कहा गया कि वह ज्यादा गाड़ियों वाला समूह चुने, तो उसने सही समूह चुना। इस घटना के आधार पर आप किस निष्कर्ष पर पहुँचेंगे? अपने चयन की वजह बताएं। साथ ही अन्य विकल्पों को नकारने के कारण भी दीजिए?

(क) वह 20 तक गिन सकता है।

(ख) वह बड़े समूहों को देख कर उनमें फर्क बता सकता है।

(ग) यह चयन सिर्फ एक इत्तफाक था, और वह यह काम दोबारा नहीं कर सकेगा।

(घ) वह गाड़ियों के समूहों के साथ तो यह कर सका, लेकिन और चीजों के साथ यह नहीं कर पाएगा।

जैसे जैसे बच्चे बड़े होते हैं, वे संख्याओं को सहज रूप से समझने की अवस्था से आगे बढ़ते हैं। अभी तक तो वे सिर्फ देखकर चीजों की संख्या पहचानते थे लेकिन बड़े होने पर उनका सोच भी पहले से ज्यादा विकसित होता है। पूर्व-संक्रियात्मक बच्चों में जो बड़े बच्चे हैं उनमें संबंध बनाने की और संबंध देखने की क्षमताएं विकसित करनी चाहिए जिससे कि उनकी गणितीय समझ बढ़े। इसका एक अच्छा तरीका है कि उन्हें ऐसे खेलों में लगाया जाए जिनमें थोड़ी सी ही चीजें हों, पर उन्हें उन चीजों में कुछ और चीजें 'जोड़नी' पड़े या उनमें से कुछ चीजें 'निकालनी' पड़े।

आइए अब हम बड़े, ज्यादा विकसित बच्चों पर गौर करें।

मूर्त संक्रियात्मक अवस्था

प्याजे एक 5 साल के बच्चे के बारे में बताते हैं जो छोटे-छोटे पत्थरों के समूह से खेल रहा था। पहले उसने पत्थरों को एक लाइन में रख कर उन्हें बायीं से दायीं ओर गिना। वे गिनती में 10 थे। फिर उसने उन्हें दायीं से बायीं ओर गिना। उसे बड़ी हैरानी हुई जब उसने पाया कि वे अभी भी गिनती में दस है। फिर उसने उन्हें गोल घेरे में रखा और पहले उन्हें वामावर्त गिना, फिर दक्षिणावर्त दिशा में। यह जानकर वह बड़ा ही खुश

हुआ कि चाहे जैसे भी किया जाए, उनकी संख्या हमेशा दस ही रहती है। इस तरह उसने इस बात की खोज की कि रखने का ढंग बदल देने पर भी उनकी संख्या वही रहती है। आपने देखा कि वह धीरे-धीरे अपने आप ही अपनी पहले वाली धारणा को छोड़ रहा था जिसके मुताबिक चीजों की संख्या इस बात पर निर्भर करती है कि उन्हें कैसे रखा गया है।

अब वह संज्ञानात्मक स्तर पर करने के लिए तैयार था। उसने इस गणितीय अवधारणा को भी समझ लिया था कि अगर चीजों के एक समूह को छोटे-छोटे उपसमूहों में बांट दिया जाए तो भी उनकी संख्या या मात्रा संरक्षित रहती है। चीजों का संरक्षण बच्चा **मूर्त संक्रियात्मक अवस्था** में ही कर पाता है। बच्चों की यह अवस्था लगभग 6 से 10 साल के बीच में मानी गई है। संरक्षण की यह समझ ही इस अवस्था के बच्चे के सोच में एक अहम् बदलाव लाती है।

छह या सात साल की उम्र में बच्चे चीजों के दो समूहों को गिन कर उनकी तुलना कर सकते हैं। वे चीजों को जोड़ने और घटाने जैसे ज्यादा मुश्किल काम भी कर सकते हैं। यह संक्रियात्मक उनके सोच का स्वाभाविक हिस्सा बन रही होती है, लेकिन अभी भी वे अमूर्त स्तर पर नहीं सोच पाते। सात से दस साल के बच्चों की सोच मुख्य रूप से चीजों के साथ ही जुड़ी होती है वे संरक्षण और गणित की अन्य मूल अवधारणाओं को सहज रूप से समझ सकते हैं। लेकिन समझ मूर्त संक्रियाओं पर ही आधारित होती है। इसलिए प्याजे इस अवस्था को 'मूर्त संक्रियात्मक अवस्था' कहते हैं।

इसलिए अगर इस अवस्था के बच्चों को जोड़ने का सवाल दिया जाए तो वे समूहों की चीजों को गिनकर जोड़ना पसन्द करते हैं, न कि उनकी संख्याओं (number) को। वे ऐसा इसलिए करते हैं क्योंकि उन्हें प्रतीकात्मक संक्रियाओं के मुकाबले अपनी सहज समझ और ठोस अनुभवों पर ज्यादा भरोसा होता है।

जैसे— छह साल की कविता ने घटा का सवाल इस तरह से किया—

$$\begin{array}{r} 3 \quad 1 \\ - \quad 1 \quad 6 \\ \hline 2 \quad 5 \end{array}$$

जब उससे पूछा गया कि यह उसने कैसे किया, तो उसने समझाया, “6 में से 1 निकाला तो 5 बचे, और 3 में से 1 निकाला तो 2 बचे।” यह पूछने पर कि क्या उसका जवाब सही था, उसने कहा कि उसे नहीं मालूम। लेकिन जब उसे कहा गया कि वह अपने तरीके से 31 में से 16 घटाये तो उसने सही जवाब (15) निकाला। उसने यह भी बताया कि उसने इस सवाल को अलग तरीके से हल किया। इसी तरह 8 साल का अमित भाग का सवाल $(45 \div 3)$ नहीं कर सका, लेकिन 45 मिठाइयों को 3 लोगों में बराबर-बराबर आसानी से बांट सका।

परंपरागत तरीकों से सीखने में बच्चों को दिक्कत होती है क्योंकि इस अवस्था के बच्चों के लिए औपचारिक तरीकों में कुशलता पाना मुश्किल होता है, क्योंकि वे उनकी क्षमताओं के हिसाब से कहीं **ज्यादा अमूर्त होते हैं**। अगर सवालों को बच्चों के जीवन के अनुभवों से जोड़ा जाए तो वे उन्हें सहज रूप से समझ पाते हैं, और उन सवालों को अपने तरीकों से हल कर लेते हैं।

एक और वजह है कि प्राइमरी स्कूल की शुरुआत में औपचारिक अंकगणित करने में बच्चों को मुश्किल होती है। औपचारिक अंकगणित में सभी संक्रियाएं दायीं से बायीं ओर की जाती हैं, जबकि हिन्दी या अंग्रेजी बायीं से दायीं ओर पढ़ी जाती है। इस वजह से प्राइमरी स्कूल के कई बच्चे अंकगणितीय संक्रियाओं को बाईं से दाईं ओर

करने की गलती लगातार दुहराते हैं इस बात से यह नतीजा निकलता है कि बच्चों को अंकगणित सिखाने के साथ-साथ यह भी सिखाना जरूरी है कि किसी संख्या या चिन्ह वगैरह की सही जगह क्या है।

E16) जो कुछ भी आपने अभी तक पढ़ा है, उसके साथ-साथ अपने अनुभवों के आधार पर बताएं कि नीचे दी गई अवधारणाओं को सीखने और समझने के लिए आम तौर पर बच्चे किस उम्र तक तैयार होंगे?

- (i) सरल वर्गीकरण
- (ii) लंबाई का संरक्षण
- (iii) गुणन में क्रमविनिमेयता, यानि कि $ab=ba$ किन्हीं दो संख्याओं a और b के लिए।
- (iv) समय
- (v) संयोग और प्रायिकता

विकास की अंतिम अवस्था, प्राइमरी स्कूल के बाद, यानी 11 साल के बाद होती है। इस अवस्था में बच्चे औपचारिक संक्रियाओं को लागू करने लायक हो जाते हैं। अब वे चीजों या उनकी मात्रा को दिखाने के लिए प्रतीकों और शब्दों का इस्तेमाल कर सकते हैं। साथ ही उनमें परिकल्पनात्मक कथनों को समझने, उनको इस्तेमाल करने और उनमें तर्क संगत संबंधों को खोजने की योग्यता भी आ जाती है। इस अवस्था में किसी बच्चे की बीजगणितीय समीकरण, समानुपात चर, आदि अमूर्त अवधारणाओं को समझ पाने की क्षमता इस बात पर निर्भर करती है कि उसका औपचारिक संक्रियात्मक सोच कितना विकसित हो पाया है।

प्राइमरी स्कूल के बच्चों द्वारा गणितीय अवधारणाओं को सीखने में एक बड़ी दिक्कत यह है कि आम तौर पर उन्हें उन अवधारणाओं के अनुरूप मूर्त उदाहरण नहीं दिए जाते। प्राइमरी स्कूल के स्तर पर गणित सिखाने की जो पद्धति आजकल अपनायी जाती है, वह औपचारिक संक्रियात्मक अवस्था के बच्चों के लिए ज्यादा सही है। लेकिन इस स्तर पर गणित की अवधारणाओं को सीखने और गणित में कुशलता हासिल करने के लिए बच्चों को सीखने के ठोस और अर्थपूर्ण अनुभव होने जरूरी होते हैं।

E 17) बच्चों के बारे में नीचे दिए कथनों में से कौन से कथन सही है ? सही कथनों के लिए (✓) और गलत के लिए (x) लिखें। अपने चयन के कारण भी दें।

- (क) प्राइमरी स्कूल के अधिकांश बच्चे मूर्त संक्रियात्मक अवस्था में होते हैं।
- (ख) संख्या को समझने के लिए, बच्चों को वर्गीकरण और क्रम समझ में आना चाहिए।
- (ग) पूर्व-संक्रियात्मक सोच प्राइमरी स्कूल के बच्चों का लक्षण है।
- (घ) गणितीय समझ के विकास में, संरक्षण करने की क्षमता की एक मूलभूत भूमिका है।

इस भाग में हमने बच्चों को उनकी उम्र के हिसाब से विकास की अलग-अलग स्पष्ट अवस्थाओं में बांट दिया है। क्या इसका यह मतलब है कि कोई भी 9 साल की बच्ची औपचारिक संक्रियात्मक अवस्था में नहीं हो सकती, या 6 साल की कोई बच्ची पूर्व-संक्रियात्मक अवस्था में नहीं हो सकती? अब इसके बारे में देखते हैं।

हर बच्चा दूसरों से अलग होता है

हालांकि सभी बच्चे मोटे तौर पर विकास की अवस्थाओं से एक ही क्रम में गुजरते हैं, लेकिन यह प्रक्रिया हर बच्चे के लिए अलग हो सकती है। यह फर्क बच्चों के व्यक्तिगत गुणों, जैसे कि उनकी बौद्धिक क्षमता, रवैये

आदि में फर्क की वजह से होता है। साथ ही साथ यह फर्क उनके अलग-अलग सामाजिक, आर्थिक और सांस्कृतिक परिवेशों की वजह से भी होता है। जैसे कि यह एक आम बात है कि एक फेरी वाले का 6 या 7 साल का बच्चा जल्दी से तीन-चार चीजों के दाम जोड़ लेता है या गांवों में लड़कियाँ जल्दी ही खाना बनाने लगती हैं जिससे कि उनमें अनुपात, द्रव्यमान के संरक्षण और कई गणितीय अवधारणाओं की सहज समझ बनती है। यह बात उतनी ही उम्र के शहरी मध्यवर्गीय बच्चों या गांव के ही लड़कों पर लागू नहीं होती।

सामाजिक, सांस्कृतिक और आर्थिक पहलुओं के अलावा, मनोवैज्ञानिक पहलू से भी बच्चे एक दूसरे से अलग होते हैं। यह बात उन तरीकों में अक्सर झलकती है जो कोई बच्ची नई अवधारणाओं को समझने के लिए अपनाती है। उदाहरण के लिए, जोड़ सीखते वक्त शुरू में कुछ बच्चे 'सभी गिनने के' और कुछ बच्चे 'आगे गिनने के' तरीके अपनाते हैं। जैसे-जैसे बच्चे बड़े होते हैं वैसे-वैसे ही वे अधिक दक्ष तरीकों का इस्तेमाल करते हैं। तब कुछ बच्चे, पांच-पांच के समूह बनाकर, तो कुछ तीन-तीन या दस-दस के समूह बना कर चीजों को गिनते हैं।

E18) "एक ही उम्र के बच्चे अलग-अलग संक्रियात्मक अवस्थाओं में हो सकते हैं और अलग-अलग उम्र के बच्चे विकास की एक ही अवस्था में हो सकते हैं।" क्या आप इस कथन से सहमत हैं? अगर हां, तो उदाहरणों से इस कथन की पुष्टि कीजिए। अगर नहीं, तो यह बताइए कि आप क्यों असहमत हैं।

ज्यादातर बाल मनोवैज्ञानिक अभ्यास E18 में दिए गए कथन को सही मानते हैं। इसलिए हमें अपने बच्चों को ध्यान से देखना, समझना चाहिए और उसी के मुताबिक उनकी क्षमताओं को आंकना चाहिए; यह कभी नहीं मान लेना चाहिए कि किसी बच्चे की उम्र अगर इतनी है तो वह उस उम्र के मुताबिक योग्य होगा ही। किसी भी वक्त पर आप बच्चों से जो भी करवाना चाहते हों या जो भी अभ्यास उन्हें देना चाहे हों, वे उस वक्त पर उनकी क्षमता के मुताबिक होने चाहिए। अगर आप एक पूर्व-संक्रियात्मक बच्ची से उम्मीद करेंगे कि वह दो बड़े समूहों की चीजों की संख्या की तुलना करे, तो ऐसी कोशिश करना बेकार होगा। उनमें से किस समूह में ज्यादा चीजें हैं, यह वह देखकर ही बिना गिनती किए, बता सकेगी। हो सकता है कि उसका जवाब सही हो, लेकिन आप किसी भी तरह से यह नहीं जान पायेंगे कि वह उस सही जवाब तक कैसे पहुँची।

ये अवस्थाएं एक सीढ़ी के पायदानों की तरह लगती हैं – हम एक पायदान पर कदम रख कर ही दूसरे पर चढ़ सकते हैं। ये पायदान एक दूसरे से साफ तौर पर अलग भी दिखते हैं। पर ऐसा है नहीं। **बच्चे का संज्ञानात्मक विकास लगातार जारी रहता है।** हर नई अवस्था पिछली अवस्था पर आधारित होती है। और **हर अवस्था में विकास के कई चरण होते हैं।** मिसाल के तौर पर, जब एक बच्ची गिनती का संरक्षण सीखने की कोशिश कर रही होती है, तो साथ ही साथ वह क्षेत्रफल या आयतन का संरक्षण भी सीख रही होती है। साथ ही वह चीजों और संख्याओं को क्रमबद्ध करना भी सीख रही होती है। जब वह दो समूहों की तुलना एकैकी संगति (one-one correspondence) से करने की कोशिश कर रही होती है, तो हो सकता है कि वह साथ-साथ गिनती भी सीख रही हो। इन अवस्थाओं की अहमियत सिर्फ इतनी है कि वे बच्चों को समझने में बड़ों की भी मदद करती हैं। साथ ही इनसे पाठ्यक्रम की विषय वस्तु और उसे पढ़ाने के ढंग को तय करने में भी मदद मिलती है।

जैसा कि हमने पहले कहा है, हर बच्चे के विकास की अपनी रफ्तार होती है। अलग-अलग परिवेश के कारण कुछ बच्चे दूसरे बच्चों के मुकाबले मूर्त संक्रियात्मक अवस्था में पहले पहुँच जाते हैं। एक शिक्षक होने के नाते आपको अपने सीखने वालों के विकास की अवस्था और उनके परिवेश के मुताबिक ही उन्हें सिखाना होगा। साथ ही सिखाने के सामान्य तरीके निर्धारित करते समय आपको बच्चों के विकास के आम पैटर्न की जानकारी भी रखनी होगी।

अनदेखी कोशिशें

हालांकि बच्चों का विकास एक प्रक्रिया है, अक्सर हम सिर्फ अंतिम परिणाम को अहमियत देते हैं। जैसे कि हम बच्चों की जोड़ने, घटाने, गुणा करने या भाग देने की क्षमता की, यानी उनके **विकास की एक अवस्था तक पहुँचने की बात करते हैं**। वहाँ तक पहुँचने में बच्चे को जिस लंबी और कठिन प्रक्रिया से गुजरना पड़ा, उसे अक्सर ही अनदेखा कर देते हैं।

E19) इतिहास में उस समय की कल्पना करें जब संख्या पद्धति विकसित नहीं थी। तब एक किसान अपने पशुओं का हिसाब कैसे रखता होगा ? यह जानने के लिए कि सभी पशु सुरक्षित घर लौट आए हैं, वह क्या करता होगा? इससे जुड़ी उन सभी बातों की सूची बनाइए जो आपके दिमाग में आती हैं।

सारांश

इस पाठ में निम्न मुद्दों पर जोर दिया है—

1. बच्चे गणित की शुरुआत की अवधारणाओं की समझ कैसे बनाते हैं—

(i) बच्चों का चीजों और लोगों से संपर्क उनके सीखने का प्रमुख आधार होता है। यह संपर्क लगातार बना रहता है। इसलिए बच्चे लगातार सीखते रहते हैं, अगर हम उन्हें न रोकें, तो!

(ii) ज्ञान हासिल करना और सूचनाओं को तोते की तरह दोहरा देना एक ही बात नहीं है।

2. बच्चे किन तरीकों से अवधारणाओं की अपनी समझ बनाते हैं।

3. बच्चों के व्यक्तिगत अन्तर।

4. बच्चे गणितीय अवधारणाओं को सीखने के लिए कब और कितने तैयार होते हैं।

5. गणितीय सोच के विकास में पूर्व स्कूली और प्राइमरी स्कूल के बच्चे किन अवस्थाओं से गुजरते हैं।

6. अगर छोटे बच्चों को वास्तविक जीवन में ऐसे अनुभव दिए जाएं जिनमें गणितीय अवधारणाएं इस्तेमाल होती हैं, तो इससे उनके विकास में मदद मिलती है। लेकिन विकास को लेकर कोई भी जल्दबाजी और जोर ज़बरदस्ती नहीं की जानी चाहिए। ऐसी किसी भी कोशिश का जो बच्चों पर जल्दी से जल्दी सीखने का दबाव डालती है, उल्टा असर होता है। और इससे बच्चे अपना आत्मविश्वास खो सकते हैं।

पाठ-3

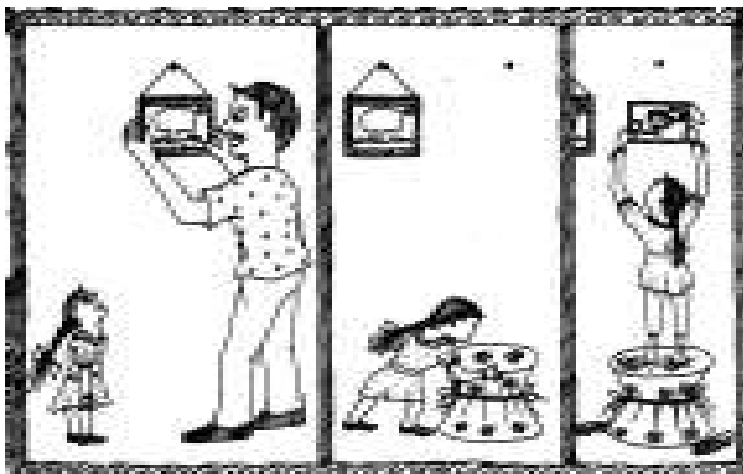
सीखने वालों के बारे में विचार

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - बच्चों की सोच
 - सीखने वालों के बारे में विचार
 - क्या बच्चे बड़ों की नकल करके सीखते हैं?
 - क्या बच्चे खाली स्लेट हैं?
 - क्या बच्चे सीखने को उत्सुक हैं?
 - कुछ और उदाहरण
- सारांश

परिचय

पिछले पाठ में हमने सीखने के अलग-अलग नज़रियों, कक्षा में सीखने की प्रक्रिया को कैसे आगे बढ़ाते हैं, इस बात पर चर्चा की। इस पूरी प्रक्रिया का सबसे महत्वपूर्ण हिस्सा है सीखनेवाले। सीखने-सीखाने की कोई भी प्रक्रिया इस बात पर निर्भर करेगी कि हम सीखनेवाले को किस रूप में देखते हैं। इस पाठ में हम सीखने वालों पर ध्यान केन्द्रित करेंगे। आप क्या सोचते हैं यहां सीखने वाले से तात्पर्य है?



चित्र 1 : क्या यह बच्ची सिर्फ अपने पिता की नकल कर रही है?

हमने देखा कि बच्चे अपना गणितीय सोच, क्षमताएं कैसे विकसित करते हैं। इस पाठ में कई उदाहरणों पर बातचीत करेंगे जिनमें बच्चे विभिन्न संदर्भों में मुख्य पात्र हैं। बच्चों की क्षमताएं असीम हैं और वे दुनिया की खोजबीन करने व इसके बारे में सीखने को उत्सुक हैं। बच्चे खुद दुनिया के बारे में अपनी समझ बनाते हैं वह सिर्फ बड़ों की नकल नहीं करते।

कक्षा में हम जो कुछ करते हैं और जिसे सिखाने का अच्छा तरीका समझते हैं, वह इस बात पर निर्भर करता है कि बच्चों के सोचने के तरीकों के बारे में हमारी अपनी समझ क्या है। बच्चों के बारे में हमारी समझ का संबंध सीखने के हमारे मॉडल से होता है। इस पाठ में इस संबंध को ज्यादा स्पष्ट रूप से सामने लाने की कोशिश की गई है।

उद्देश्य

इस पाठ को पढ़ने के बाद, आप

- कारण सहित बता सकेंगे कि बच्चे बड़ों की नकल करके नहीं सीखते;
- यह समझा सकेंगे कि बच्चे खाली स्लेट की तरह नहीं होते;
- कारण बता सकेंगे कि क्यों बच्चे औपचारिक पढ़ाई में दिलचस्पी नहीं रखते;
- गणित की पढ़ाई में बच्चों का उत्साह बनाने के लिए कुछ उपाय सुझा पाएंगे;
- अपनी समझ बता पाएंगे कि आपके सीखने वाले गणित कैसे सीखते हैं।

क्या बच्चे बड़ों की नकल करके सीखते हैं?

एक कार्यशाला (workshop) में मैंने कुछ शिक्षकों से इस संबंध में उनके विचार पूछे कि बच्चे कैसे सीखते हैं और स्कूल आने से पहले वे गणित में क्या कुछ जानते हैं। शिक्षकों को टोलियों में बांटकर कहा गया कि वे आपस में इन सवालों पर चर्चा करें और चर्चा का सार प्रस्तुत करें। इन सभी टोलियों के चर्चा – सार करीबन एक जैसे ही थे। इनमें यह कहा गया था कि बच्ची बड़ों को देख – देखकर और उनकी नकल करके सीखती है। आगे, और सवालों के जवाब में शिक्षकों ने जोड़ा कि बच्ची अपने हम उम्र साथियों से भी सीखती है किन्तु सीखती वही बातें हैं जो उसे बताई जाएं। उनका मत था कि बच्चे बड़ों को देखते – सुनते हैं इन अवलोकनों के आधार पर वे उसी तरह की क्रिया करने का प्रयास करते हैं। माँ-बाप और अन्य बड़े लोग ‘सही’ व्यवहार या ‘सही उत्तर’ की तारीफ करते हैं, अन्यथा उन्हें दण्डित करते हैं। दण्ड इस रूप में भी हो सकता है कि शिक्षक उन्हें वह बात अपनी नोटबुक में बार – बार लिखने को कहे। बच्ची का वह उत्तर बार – बार तब तक दोहराना होता है, जब तक कि वह सवाल का सही उत्तर न देने लगे।



चित्र 2 : क्या यह बच्ची किसी बड़े की नकल कर रही है?

भाषा सीखने के संदर्भ में भी उनका कहना था बड़े लोग शुरु में माँ, का, को जैसे सरल वर्णों को बोल – बोलकर बच्ची से उनकी नकल करवाते हैं और इन वर्णों का अभ्यास करवाते हैं। धीरे – धीरे वे बच्ची के सामने सरल शब्द बोलते हैं और उससे दोहराने को कहते हैं। जब वह इन शब्दों का इस्तेमाल काफी करने लगती है तब बड़े लोग उसे इसी प्रकार से सरल वाक्य बोलना सिखाते हैं।

E1) आप इस बारे में क्या सोचते हैं; पहले अपनी राय को थोड़ा टटोल लें फिर आगे पढ़कर देखें।

शिक्षकों की ऐसी धारणाओं की वजह से कक्षाओं में निम्नलिखित किस्म का सिखाना आम देखने को मिलता है।

उदाहरण 1 : गांव के एक स्कूल में शिक्षक के पास कई सारे चॉक थे और वह बच्चों को गिनती का 'परिचय' देना चाहता था। किसी के साथ बातचीत के दौरान उसने यह समझ लिया था कि इस काम में ठोस वस्तुओं का बहुत महत्व है। लिहाज़ा उसने गिनती सीखने में बच्चों की मदद करने के लिए चॉक के टुकड़े इकट्ठे कर लिए थे। उसने एक चॉक उठाया और बोला 'एक'। कक्षा को हिदायत दी गई कि वह उसके पीछे दोहराए 'एक'। इसके बाद उसने वह चॉक नीचे रख दिया और दूसरा चॉक उठाकर बोला 'दो'। फिर से कक्षा ने दोहराया 'दो'। दूसरे चॉक को भी नीचे रखकर उसने एक और चॉक उठा लिया और बोला 'तीन'। कक्षा के सभी बच्चों ने उसके पीछे दोहराया 'तीन'। यह कवायद दो सप्ताह बाद भी जारी थी। फर्क सिर्फ इतना था कि अब शिक्षक की जगह कक्षा मॉनीटर के पीछे – पीछे सब बच्चे एक आवाज में बोल रहे थे।

ऊपर के उदाहरण में शिक्षक का यह मानना है कि बच्ची किसी बड़े या किसी अधिकार जताने वाले दूसरे बच्चे को देखकर या सुनकर सीखती है। क्या यह सच है?

E2) आपके विचार से उदाहरण 1 का शिक्षक बच्चों के शुरुआती ज्ञान के बारे में क्या सोचता है? बच्चे क्या जानते हैं और कैसे सीखते हैं, इस बारे में उसके आकलन से क्या आप सहमत हैं?

E3) उदाहरण 1 में बच्चों को जो कुछ दिखाया जा रहा है और उनसे जो कुछ दोहराने को कहा जा रहा है, उसमें क्या समस्या है?

E4) किसी 3 या 4 वर्षीय बच्ची को ध्यान से देखते रहिए मगर उसे पता न चले। वह जो – जो करे उनकी एक सूची बनाइए और नोट कीजिए कि वह कहां तक आगे बढ़ पाती है। मसलन, हो सकता है कि आप देखें कि वह 3 वस्तुओं तक गिन पाती है मगर 5 तक नहीं। क्या इस बच्ची ने बड़ों की नकल करके सीखा है? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

आइए अब तीन उदाहरणों में देखते हैं कि कुछ परिस्थितियों में कैसा व्यवहार दिखाते हैं। इन उदाहरणों को पढ़ते हुए अपने आपसे पूछते जाइए कि क्या इन बच्चों ने सिर्फ अपने आसपास के बड़ों की नकल कर-करके सीखा है।

उदाहरण 2 क) : मेरे एक दोस्त ने मुझे बताया कि एक दिन वह अपनी दो साल की बेटी मधु के साथ जा रहा था। उन्हें एक दुकान में जाना था जिसके सामने एक छोटी नाली थी। बाप-बेटी दुकान की ठीक सामने एक पुलिया की तरह रखे एक दो फुट चौड़ी टाइल (tile) की तरफ चलने लगे। बच्ची उस टाइल से कुछ फुट पहले ही रुककर पिता को दाईं तरफ खींचते हुए कहने लगी, "उधर से जाएंगे। (एक अन्य पुलियानुमा पत्थर की ओर इशारा करके)। यहां पर मैं गिर जाऊँगी।" फिर उसने उस दूसरी पुलिया पर से नाली पार की और दुकान पहुंचने के लिए बाईं ओर मुड़ गई।

उदाहरण 2 ख) : तीन-वर्षीय मंसूर ने एक नया शब्द 'छोटा-बड़ा' बनाया है। वह अक्सर अपने माता-पिता से कहता है, "अब मैं छोटा-बड़ा हूँ, और बहुत सारे काम कर सकता हूँ। मैं गिलास से दूध पी सकता हूँ पर कार नहीं चला सकता। जब मैं दादा (बड़ा भाई) जैसा बड़ा हो जाऊँगा, तब स्कूल जाऊँगा, और जब मैं पापा जैसा बड़ा हो जाऊँगा तब कार चलाऊँगा।" वह कभी-कभी बगैर चेतावनी के अपनी पेन्ट भी गीली कर देता है। तब वह अपने ढंग से कहता है कि वह फिर से छोटा हो गया है, अब वह छोटा-बड़ा नहीं है।

उदाहरण 2 ग) : जब शेखर करीब दो साल का था तब वह अपने एक पारिवारिक दोस्त के घर जाया करता था, जिसके पास दो कुतिया थीं। इनमें से बड़ी कुतिया काली थी और उसका नाम माया था। छोटी वाली सफेद थी, ज्यादा उत्पाती थी और उसे तोफू कहते थे। शेखर माया को पसन्द करता था और उसे छूने को उत्सुक रहता था। वह दोनों कुतिया को माया पुकारने लगा। एक दिन शाम को घूमते हुए उसने सड़क पर एक भूरा कुत्ता देखा और उसकी ओर इशारा करके 'माया, माया' चिल्लाने लगा। कुछ दिन बाद उसने एक किताब में एक बकरी का चित्र देखा, बकरी की ओर इशारा करके बोला, 'माया'। अब वह 'माया' शब्द का इस्तेमाल न सिर्फ कुत्तों के लिए बल्कि जो भी जानवर देखता उसके लिए करता। उसके लिए हाथी और ऊँट भी माया थे, लेकिन हैरानी की बात थी कि गायें माया नहीं थी। वे एक अलग वर्ग में थीं।

शेखर अब तीन साल का है और बकरी को दो नामों से पुकारता है – माया और बकरी। कुत्ते तो माया ही हैं। मगर गायों के भी अब दो नाम हो गए हैं— गाय और माया।

इन तीनों स्थितियों का ध्यान से विश्लेषण करने पर, आपके हिसाब से बच्चों ने जैसा व्यवहार दर्शाया, उसके लिए उनमें कौन सी क्षमताएं रही होंगी ? उदाहरण 2 क में बच्ची ने देखकर चौड़ाई का अनुमान लगाया, उसका संबंध सुरक्षा से जोड़ा बाद में बाईं ओर मुड़ी, जिससे पता चलता है कि उसे दिशा का भी एहसास है।

उदाहरण 2 (ख) में बच्चे ने अपनी स्थिति का वर्णन देने के लिए एक ऐसा वर्ग बनाया जिससे वह अपनी व अपने भाई की अवस्था के बीच अंतर भी बता सकता है। वह यह वर्णन करने की भी कोशिश कर रहा है कि बड़े लोग क्या कर सकते हैं। यह भी पहचानता है कि कुछ काम सिर्फ बच्चे करें तो मंजूर होते हैं, बड़ों से नहीं।

E5) शेखर किन दिमागी प्रक्रियाओं से गुजर रहा है? आपके हिसाब से उसने कौन से कार्य नकल के आधार पर किए हैं और कौन से नहीं?

स्वतंत्र व्यक्तियों के रूप में बच्चे जो सारी चीजें कर पाते हैं और जो बहुत सारी चीजें नहीं कर पाते हैं, उन्हें देखकर क्या आप स्वीकार करेंगे कि वे ज्यादातर बड़ों की नकल करके सीखते हैं ? यदि यह सही होता तो ऐसा क्यों होता है कि एक दो-वर्षीय बच्ची 6 चीजें नहीं गिन सकती है जबकि कोई बड़ा व्यक्ति उसके सामने कई बार 6 चीजें गिनकर दिखाता है? क्या हमें बच्चों के सीखने को लेकर किसी अन्य समझ की तलाश करनी चाहिए?

कुछ लोगों का यह भी मानना है कि बच्चे ज्यादातर बड़ों को देखकर और गलतियों को सुधारते हुए सीखते हैं। मसलन, बच्ची कोई ध्वनि सुनती है, वही ध्वनि निकालने की कोशिश करती है, सफल नहीं होती, सुधारती है, फिर से कोशिश करती है। इस तरह से वह उस ध्वनि को सीख जाती है। इन लोगों का यह भी मानना है कि मसलन यदि बच्ची सुनती है कि उसके आसपास के अन्य लोग किसी चीज को बड़ी कहते हैं, तो वह भी उसे बड़ी कहने लगती है। इस तरह से वह बड़ी चीजों और छोटी चीजों के वर्ग बना लेती है।

निम्नलिखित उदाहरण के आधार पर देखते हैं कि यह धारणा किस हद तक हमें माननी चाहिए।

उदाहरण 3 : जब शीला की बेटी कामना चार साल की थी, तब उसने देखा था कि एक डॉक्टर बैग लेकर शीला की मां की जांच करने आया था। कामना ने एक प्राइवेट क्लिनिक के ऑपरेशन कक्ष के साथ लगा तैयार वाला कमरा भी देखा हुआ था। उसने वहां ऑपरेशन में इस्तेमाल होने वाले सामान को एक साथ रखे हुए देखा था। इसके कुछ दिनों बाद घर से छोटी-छोटी चीजें गायब होने लगीं। दो कैंचियां नदारद थीं, एक-दो सुइयां नहीं मिल रही थीं, धागे की एक रील गुम हो गई थी, आईने का एक छोटा टुकड़ा और यहां तक कि कुछ छोटी-छोटी शीशियां भी गायब हो गई। ये सारी चीजें एक लम्बे समय के दौरान इतनी धीरे-धीरे गायब हुई कि हर किसी ने सोचा कि यहीं-कहीं पड़ी होंगी। एक महीने बाद शीला अपनी दोपहर की झपकी ले रही थी कि हड़बड़ाकर उठ गई। उसने देखा कि उसकी बेटी एक छोटे पुराने सूटकेस के साथ बिस्तर पर चढ़ने की कोशिश कर रही है। कामना कह रही थी, “सो जाओ, सो जाओ, मैं तुम्हारा ऑपरेशन करूंगी।

शीला : कैसा ऑपरेशन?

कामना: मैं इस कैंची से तुम्हारा शरीर काटूंगी, काटकर ठीक करूंगी और फिर सिल दूंगी।

शीला : काटोगी कैसे?

कामना: इस कैंची से।

शीला : (उसके हाथ से धीरे से कैंची लेते हुए) दिखाओं। यह तो छोटी है, इससे काम नहीं चलेगा।

कामना: (दूसरी कैंची निकालते हुए) मेरे पास यह बड़ी वाली भी है और यह चाकू भी है।

शीला : और क्या – क्या है तुम्हारे पास?

कामना ने एक नली निकाली और उसे अपने कान पर लगा लिया। उसने मां को वह सुई भी दिखाई जिससे बाद में उसे सिला जाना था। जो सारी चीजें गुम हुई थी, वें एक-एक करके कामना के बैग में से निकल रही थीं।

उदाहरण 4 : पांच साल की नीलू अपनी चप्पलें घिसटती हुई ऊंची नाक किए अपनी मां के कमरे में यह पुकारती हुई घुसी, “रेणु, ओ रेणु ! तुम कहां हो बहू?” जब उसकी मां रेणु ने उसकी ओर तिरछी निगाहों से देखा, तो नीलू ने कहा, “श.....श..... मैं बड़ी ताई हूं।” रेणु ने फौरन सिर पर पल्लू डालकर कहा, “आइए, आइए।”

नीलू : तुम्हारा लड़का कहां है? सो रहा है?

रेणु : वह अब सोया है। दोनों बच्चे मुझे बहुत परेशान करते हैं।

नीलू : मेरे बच्चे तो मुझे परेशान नहीं करते। तुम भी अपने बच्चों को जो वे चाहें दे दिया करो। फिर वे तुम्हें बिल्कुल परेशान नहीं करेंगे।

इस घटना में क्या चल रहा है? क्या नीलू ताईजी की नकल कर रही है? क्या उसकी ताई यह कहेगी, “तुम भी अपने बच्चों को जो वे चाहें दिया करो?” नीलू ताईजी बनकर क्या कर रही है? क्या वह ताईजी के बारे में सीख रही है, या वह यह प्रदर्शित कर रही है कि उसने ताईजी के बारे में और अपनी मां के सामने उनकी हैसियत और संबंध को लेकर क्या सीखा है?

जब कुछ शिक्षकों को ऊपर के उदाहरण बताए गए तो उन्होंने कहा कि जाहिर है कि ये बच्चे बड़ों को देखकर उनकी नकल करने तथा उनकी क्रियाओं को दोहराने की कोशिश कर रहे हैं। अन्य शिक्षक इससे असहमत थे। उनका कहना था कि यह तो सही है कि कामना व नीलू उनके आसपास जो कुछ होता है उसका अवलोकन करती हैं। परन्तु वे यह समझने की कोशिश कर रही हैं कि हो क्या रहा है, और अपने हिसाब से उसकी व्याख्या कर रही हैं। उदाहरण के लिए, कामना ने जो कुछ देखा—सुना, उसके आधार पर उसने डॉक्टर के कामकाज व व्यवहार की अपनी समझ बनाई।

अब हम एक बड़े बच्चे का उदाहरण देखते हैं, जिसके बारे में कहा जा सकता है कि वह बड़ों की नकल करके सीख रही है। लेकिन, यदि आप स्थिति का विश्लेषण करेंगे, तो देखेंगे कि बच्ची ने कितनी समझ विकसित की है।

उदाहरण 5 : सरोज की 7 वर्षीय बेटी ने अपने खिलौनों के ढेर में से एक पुराना केलकुलेटर निकाला और उससे इसकी मरम्मत करने को कहा। सरोज ने एक पेंचकस से एक—दो पेंच कसे और केलकुलेटर काम करने लगा। उसकी बेटी इस प्रक्रिया को बहुत ध्यान से देख रही थी। दो दिन बाद वह फिर से केलकुलेटर लेकर आई सरोज से उसे ठीक करने को कहा। इस बार पेंचों को घुमाने से कुछ फायदा नहीं हुआ और सरोज ने हाथ डाल दिए। दो दिन बाद बेटी फिर से आकर उत्तेजित होकर बताने लगी, “देखो, मैंने केलकुलेटर ठीक कर लिया है।” सरोज ने कहा, “हो ही नहीं सकता, वह तो पूरा टूट चुका है।” इस पर बेटी केलकुलेटर ले आई और दिखाकर कहने लगी, “देखो!” पता यह चला कि बच्ची ने भी केलकुलेटर ठीक करने के लिए पेंचकस का ही इस्तेमाल किया था।

बच्चों की क्रियाओं के इन सब उदाहरणों से यह पता चलता है कि हम अक्सर बच्चों के प्रति सहानुभूतिपूर्ण नहीं होते हैं। सीखने संबंधी स्थितियों के बारे में हम कह देते हैं कि बच्ची तो सिर्फ जानकारी के एक भण्डार घर का काम करती है, वह बड़ों की नकल करती है और वह वही बातें सीखती है जो बड़े उसे बार—बार बताते हैं। हम अक्सर बड़ों को यह कहते सुनते हैं “मैंने इससे (बच्ची से) कहा कि यह ऐसे करो और करके दिखा दिया कि कैसे करना है। इसने मेरे किए की नकल उतारी और इसी तरह सीख गई।” या “मैंने इस बच्ची को नियम बताकर कुछ सवाल करने को दिए। उसने कर तो लिए, परन्तु कुछ गलतियां की। मैंने उसे उसकी गलतियां बताई, फिर से नियम समझा दिया और कुछ और सवाल दे दिए। इस बार भी उसका काम ठीक नहीं रहा, मगर पहले से बेहतर था। उसने बार—बार कोशिश की और धीरे—धीरे वह सवाल हल करने लगी।”

E6) क्या आप कहेंगे कि उदाहरण 5 में बच्ची ने सिर्फ अपनी मां की नकल की? क्यों?

E7) “बच्चे जो भी सीखते हैं वह दूसरे लोगों की नकल करके सीखते हैं।” यह कथन सीखने या बच्चों के व्यवहार को समझने के लिए काफी क्यों नहीं है?

E8) इस भाग में हमने जो कुछ कहा, उसका बच्चों को गणित सिखाने के संबंध में क्या महत्व है?

इस भाग में हमने देखा कि बच्चे आंख मूंदकर दूसरे लोगों की नकल करके बिल्कुल नहीं सीखते हैं। वे अपने आसपास की चीजों की खोजबीन करने और उनके साथ प्रयोग करने को उत्सुक रहते हैं और इन चीजों को अनुभवों से जोड़ते हैं। यदि वे वही करते भी हैं जो बड़े करते हैं, तो भी यह नकल रूप में नहीं, बल्कि इस रूप में होता है कि वे वह सब करके देखना चाहते हैं जो बड़े लोग करते हैं तथा इससे भी ज्यादा कुछ करना चाहते हैं।

क्या बच्चे खाली स्लेट हैं?

एक शिक्षक हमारे साथ इस बात पर चर्चा कर रहे थे कि बच्चे सिर्फ इसलिए सीखते हैं क्योंकि बड़े लोग

उन्हें कुछ बताते हैं। उनका दृढ़ विचार था कि यह बात सही है। उनको यकीन था कि यदि धीमे – धीमे किया जाए, तो हम बच्चों को जो भी सिखाना चाहें, टुकड़ों में सिखा सकते हैं। मैंने पाया कि कई बड़े यह राय रखते हैं। वे साफ तौर पर यह मानते हैं कि बच्चे तब तक कुछ नहीं जानते हैं जब तक कि बड़े लोग उन्हें न बताएं।

अलबत्ता ऐसे भी लोग हैं जो मानते हैं कि बच्चे अपने अवलोकनों से और अपने निहायत क्रियाशील दिमागों का उपयोग करके ही काफी कुछ जानते हैं।

उदाहरण 6 : आठ माह की रेहाना अपनी मां की गोद में बैठी हाथ बढ़ा – बढ़ाकर पास की मेज़ पर रखी चीजें उठाने की कोशिश कर रही थी। वह मुस्करा रही थी और अपने आसपास बैठे मेहमानों की ओर बढ़ने की कोशिश कर रही थी। उसकी खास दिलचस्पी पड़ोस में रहने वाले एक दो वर्षीय लड़के में थी। जब तक वह वहां रहा, रेहाना उसकी ओर बढ़ने का प्रयास करती रही, अपना हाथ बढ़ाती रही और उससे बात करने की कोशिश में लगी रही। जाहिर है, आसपास बैठे बड़ों को तो लगा कि वह बेमतलब आवाजें निकाल रही है। फिर पड़ोसी चले गए।

अब मां ने मेहमानों को यह दिखाने का फैसला किया कि रेहाना कितना कुछ कर सकती है। उसने रेहाना से पूछा, “हाथी क्या करता है?” रेहाना पूरी तरह अपने काम में डूबी हुई थी और उसने कोई जवाब नहीं दिया। मां ने अपना हाथ बच्ची की नाक के सामने रखकर अपना सवाल दोहराया। इस बार रेहाना ने अपना हाथ नाक के सामने रखकर दूसरी बांह को जोरदार ढंग से लहराया। फिर मां ने पूछा कि हाथी नहाता कैसे है। अपने बाजू को नाक के पास रखते हुए रेहाना ने अपना हाथ सिर की ओर किया। फिर मां ने पूछा कि हाथी खाता क्या है रेहाना ने एक काल्पनिक केला लेकर उसे छीला।

अगला सवाल था, “बिल्ली कैसे बोलती है?” और फिर, “आंटी को मां बोलकर बताओं।” रेहाना ने लगभग बिल्ली की म्याऊँ जैसे आवाज निकाली और मां बोलकर बताया। फिर मां ने पूछा कि शेर दहाड़ता कैसे है, तो रेहाना ने ‘वा’ कहकर जवाब दिया। चूंकि बच्ची को पता नहीं था कि शेर कैसी आवाज निकालता है इसलिए उसने अपने मन से बनाकर एक आवाज निकाल दी। उसकी दादी की टिप्पणी थी, “यह उसे पता नहीं है।”

ऊपर के उदाहरण में मां जो चाहती थी, बच्ची से वही करवा रही थी, और कई बार उसे ऐसा करने के लिए फुसलाया भी। मां का विचार था कि बच्ची ने इतना सीख लिया है कि वह हाथी की सूंड की नकल बना सकती है और यह दर्शा सकती है कि तालाब में नहाने के लिए वह सूंड का इस्तेमाल कैसे करता है। क्योंकि मां ने उसे इसे करने का भी उम्दा प्रशिक्षण दे दिया था।

लेकिन क्या बच्ची सिर्फ उतना ही कर रही थी, जितना करने को उसकी मां कह रही थी? क्या वह अपनी क्रिया में किसी समझ का उपयोग नहीं कर रही थी? उसने शेर की नकल बनाने के लिए अपने दिमाग का इस्तेमाल कैसे किया? जब तक लड़का उस कमरे में रहा, बच्ची उससे बतियाने और उसकी ओर जाने का प्रयास करती रही। जब वह चला गया, तो बच्ची को शेष लोगों में कोई दिलचस्पी नहीं थी। वह जानती थी मां उसे कुछ करने को कह रही है, समझ रही थी कि क्या करने को कहा जा रहा है मगर उसने किया नहीं। इस अरुचि का कारण शायद यह हो कि क्रियाओं और ध्वनियों की नकल करने का जो काम उसके सामने रखा गया, वह उसे बहुत बेमतलब जान पड़ा हो।

हम बच्चों को खाली स्लेट मानते हैं क्योंकि हम सिर्फ यह पता लगाना चाहते हैं कि जो हम चाहते हैं वे सीखें, उसे वे जानते हैं या नहीं। हम उनकी परीक्षा सिर्फ उन बातों में लेना चाहते हैं जो किताबों में हैं। हम

उनकी ढेर सारी क्षमताओं, जिसमें हमें समझ पाने की उनकी क्षमता भी शामिल है, पर बिल्कुल ध्यान नहीं देते। यह बहुत की दिलचस्प बात है कि हम बड़े लोग बच्चों को सिर्फ वही सीखने तक सीमित रखना चाहते हैं जो उन्हें बताएं।

उदाहरण 7 : शिक्षक ने कक्षा 3 के बच्चों को दो – दो अंकों की संख्या में एक से दूसरी को घटाने की 'सही विधि' बता दी थी। इसके बाद उसने बच्चों को उसी तरह के कई सवाल घर पर करने को दे दिए।

आफ़ताब ने कुछ सवाल किए जिनमें 'उधार' की जरूरत नहीं पड़ती थी। जब 56 – 28 आया तो वह अटक गया। उसने आकर मां से पूछा, "मैं क्या करूं? मैं 6 में से 8 को घटा नहीं सकता।" मां ने कहा, "मगर तुम तो 56 में से 28 को घटा रहे हो।" आफताब इसके बारे में सोचता रहा, सोचता रहा। आखिरकार उसने कहा, "मैं 16 से 8 घटा सकता हूं।" अपनी मां की मदद से उसने इस चरण को करने का तरीका ढूंढ लिया।

'अपने तरीके' से यह समस्या हल करने के बाद उसने अपना होमवर्क पूरा किया और अगले दिन शिक्षक को दे दिया। उसे इस बात की बिल्कुल उम्मीद नहीं थी कि शिक्षक उसके पूरे काम पर लाल स्याही से गलत का निशान लगा देगी। हताश होकर उसने शिक्षक से पूछा। शिक्षक ने उसे समझाया कि उसकी विधि (चित्र 3 क) गलत है और उसे सवाल शिक्षक द्वारा बताई गई विधि (चित्र 3 ख) से करना चाहिए।

$$\begin{array}{r} 56 \\ - 28 \\ \hline 28 \end{array}$$

(क)

$$\begin{array}{r} 56 \\ - 28 \\ \hline 28 \end{array}$$

(ख)

चित्र 3

E9) आपको क्या लगता है क्या आफताब द्वारा शिक्षक को बताई विधि कारगर है? समझाकर लिखिए।

जब आफताब ने शिक्षक को बताया कि उसका जवाब तो सही है, तो शिक्षक ने कहा कि हां लेकिन यह तो संयोग भी हो सकता है।

आफ़ताब जब घर आया तो परेशान था और उसने मां को पूरी बात बताई। मां ने उसके साथ बैठकर उसे शांत किया और समझाया कि कैसे दोनों विधियां काम करती हैं। जब मां ने उससे कहा कि वह अगले दिन जाकर यह बात शिक्षक को समझाए, तो वह चिल्लाने लगा, "मैं उन्हें नहीं बताऊंगा। तुम चाहती हो पूरी कक्षा मुझ पर हंसे? मैं आज से अपनी कॉपी में और परीक्षा में उन्हीं के तरीके से करूंगा।"

इस उदाहरण में शिक्षक की भूमिका एक मायने में बहुत उपयोगी रही। उसने बच्चों को करने के लिए काम दिया, बच्चों द्वारा किए गए सवालों को देखा और इस बात पर ध्यान दिया कि बच्चे सही विधि सीख जाएं। इस स्थिति में शिक्षक के व्यवहार में कुछ गम्भीर दिक्कतें हैं। क्या आप उनका पता लगा सकते हैं?

क्या आप कहेंगे कि शिक्षक गणित सीखने में बच्चे की मदद कर रही है ? या, क्या वह यह सुनिश्चित



चित्र 4 :
क्या यह
अखबार
बेचने वाला
बच्चा एक
'खाली
स्लेट' है?

कर रही है कि बच्चे का गणितीय सोच विकसित न हो ? क्या वह बच्चे की सृजनात्मकता को रोक रहा है? क्या वह उसका आत्मविश्वास कम कर रहा है? क्या वह यह सुनिश्चित करने का प्रयास कर रहा है कि बच्चे का दिमाग खाली स्लेट है जिसमें वह जो चाहे लिख सकता है, खुद बच्चा नहीं लिखता?

E10) क्या आप मानते हैं कि बच्चों के दिमाग हमारे द्वारा बताई गई बातों के अनुरूप ही विकसित होते हैं ? अपने मत के समर्थन में तर्क दीजिए।

E11) बच्चों के साथ अपनी अन्तर्क्रिया का एक ऐसा उदाहरण दीजिए जिससे पता चले कि वे खाली स्लेट नहीं होते।

इससे पता चलता है कि कुछ बच्चों को गणित सरल लगता है, कुछ को नहीं ? क्या इसका कारण सीखने के प्रति उनका उत्साह हो सकता है? अब इस पहलू पर देखते हैं।

क्या बच्चे सीखने को उत्सुक हैं?

छोटू के पिता जो बहुत ही नाराज थे, कह रहे थे “छोटू मेरी जान का दुश्मन है। वह न मेरी सुनता है, न अपने शिक्षकों की। वह किसी बात को गम्भीरता से नहीं लेता। वह तो बस गिल्ली – डण्डा खेलना चाहता है।” छोटू के पिता की तरह कितने सारे मां – बाप और शिक्षक मानते हैं कि बच्चे पढ़ाई में रुचि नहीं रखते। कितने सारे शिक्षक शिकायत करते हैं कि बच्चों को जबर्दस्ती कक्षा में बैठाना पड़ता है और ध्यान देने पर मजबूर करना पड़ता है। शिक्षक बताते हैं कि इसी रवैये की वजह से उन्हें एक ही बात बार – बार दोहरानी पड़ती है।

मगर, क्या यह बच्चों की गलती है ? हममें से कितने लोग वह काम करेंगे जिसमें हमारी रुचि न हो ? बच्चे हों या बड़े, हम सब किसी काम में तभी जुटते हैं जब वह हमें रुचिकर लगे। तो, किसी शिक्षक के लिए सबसे अहम् सवाल यह होगा कि “बच्चों को सीखने के लिए उत्साहित कैसे करें?” इस भाग में हम इस सवाल का जवाब देने की कोशिश करेंगे।

क्या आपने कभी बच्चों को आपस में खेलते या किसी बच्ची को घर पर अकेले देखा है ? यदि आप किसी छोटी बच्ची को विभिन्न चीजों के साथ देखें, तो आपको कुछ अन्दाजा मिलेगा कि उसे क्या रोचक लगता है। बच्ची एक चीज़ मसलन, खिलौना गाड़ी उठा लेगी, उसे हर तरफ से टटोलेगी, उसमें से बाहर निकल रहे हिस्सों को घुमाने की, खींचने की कोशिश करेगी। यदि उसमें कोई पुर्जा ऐसा है जो चमकीला है या बाकी से अलग है तो उसकी विशेष जांच-पड़ताल होगी। वह उस खिलौने का इस्तेमाल एक कार की तरह या किसी अन्य चीज की तरह करके देखेगी और फिर शायद उसे उठाकर दो-तीन बार जमीन पर पटकेगी। इसके बाद हो सकता है कि वह देखना चाहे कि उसे थोड़ा ऊपर से गिराने पर क्या होता है। बीच- बीच में वह उसे एक झुनझुने की तरह हिलाने या चूसने की कोशिश भी कर सकती है। वह यह भी तय कर सकती है कि अब इस छोड़ दे या फिर दूर फेंककर उसके पीछे भागे। मौका मिले तो वह इस चीज को सीढ़ियों से नीचे लुढ़काना भी चाहेगी। यदि हम उससे वह चीज लेना चाहें, उसे समझा दें कि वह टूट जाएगी, तो बच्ची का कहना होगा कि वह नहीं टूटेगी। यदि आप उससे कहें कि वह खिलौने के साथ सही ढंग से नहीं खेल रही है, तो शायद वह आपकी बात को अनसुना करके आपने काम में लगी रहे।



चित्र 5 :

यदि हम बच्ची के बर्ताव की सावधानीपूर्वक जांच करें, तो कुछ बातें साफ हो जाती हैं। बच्ची के लिए किसी खिलौने से खेलने का मतलब सिर्फ इतना नहीं होता कि उसका इस्तेमाल उस ढंग से कर लिया जाए जैसे इस्तेमाल की उम्मीद कोई बड़ा करता है। किसी चीज से खेलते वक्त बच्ची उसमें पूरी तरह खो जाती है (चित्र 5), और आसानी से उसका ध्यान इधर – उधर नहीं किया जा सकता। किसी खिलौने के साथ ऐसा खेल कभी-कभी काफी लम्बे समय तक चल सकता है।

यदि आप किसी 2 – 3 वर्षीय बच्चे को एक से अधिक खिलौनों से खेलते देखेंगे, तो आपको हैरानी होगी कि वह इस दौरान उस खिलौने के साथ कितना कुछ कर लेती है। मसलन, यदि कुछ गाड़ियों के साथ खेले, तो हो सकता है कि वह उनके लिए एक पार्किंग स्थल बनाएगी और फिर उन कारों को पार्किंग स्थल से विभिन्न दुकानों तक अलग – अलग रास्तों से होकर ले जाएगी। वह किसी कार को पीछे खींचकर छोड़ देगी और देखेगी कि क्या होता है, या वह एक तकिए का इस्तेमाल एक ढलान के रूप में करके कारों को उस पर से लुढ़काएगी, या दो या दो से अधिक कारों की आपस में टक्कर करवाएगी। वह शायद एक कार को दूसरी पर रखकर चलाने की कोशिश करेगी या कार को किसी अन्य चीज से धक्का देकर देखेगी। कोई साथी हो या न हो, वह अपने खेल से काफी संतुष्ट रहेगी और पूरे ध्यान से उसे खेलेगी।

यदि कोई बड़ा इस स्थिति में प्रवेश करके बच्ची की शर्तों पर खेलने को राजी हो, तो बच्ची के पास असंख्य विचार होंगे जिन्हें वह बड़े के साथ आजमाकर देखना चाहेगी। मसलन, शायद बच्ची सुझाव दे कि कारों की दौड़ की जाए और यह देखा जाए कि किस रंग की कार सबसे तेज दौड़ती है। या शायद वह यह खेले कि ये कारें एक टैक्सी स्टैण्ड पर खड़ी हैं, और फिर टैक्सी स्टैण्ड का दृश्य बनाने में लग जाए।

दरअसल, ऐसे खेल बच्चों के बीच बहुत आम व लोकप्रिय होते हैं जिनमें वे विभिन्न स्थितियों की रचना करते हैं। दो – तीन बच्चे साथ हों, तो वे 'घर-घर' खेलने लगते हैं। वे अपने माँ – बाप, अपने शिक्षकों या अपने बड़े रिश्तेदारों के तौर-तरीकों की नकल करते हैं। वास्तव में बड़ों के क्रिया-कलापों की उनकी प्रस्तुति प्रायः उनके द्वारा देखे गए बड़ों के व्यवहार से आगे जाती है। यदि आप बच्चों को 'घर-घर' या 'स्कूल – स्कूल' खेलते देखेंगे, तो पाएंगे कि इन खेलों में बड़ों की क्रियाओं को वे आलोचनात्मक दृष्टि से देखते साथ ही, जो कुछ भी वे देखते हैं, खेलों में उनका विस्तार भी नज़र आता है। इनमें यह भी शामिल होता है कि बच्चों के ख्याल से बड़े एक अलग या नई परिस्थिति में कैसे बर्ताव करेंगे। आपको इन खेलों में बड़ों के वास्तविक व्यवहार की बजाय इस बात की भी झलक मिलेगी कि बच्चे उनसे कैसे व्यवहार की उम्मीद करते हैं।

E12) बगैर दखलंदाजी किए, घर पर खेलते कुछ बच्चों का ध्यान से अवलोकन कीजिए। क्या आपको अवलोकन इस भाग में कही गई बातों से मेल खाते हैं? आपने और क्या देखा?

आपने अभी जो कुछ देखा, उसके बाद भी क्या आप कहेंगे कि बच्चे सीखने को उत्सुक नहीं हैं? क्या आप मानते हैं कि उनमें सीखने की इच्छा नहीं होती, और आलसी होते हैं? क्या हमें औपचारिक पढ़ाई में उनकी दिलचस्पी न होने की कोई और वजह नहीं सोचनी चाहिए? क्या यह हो सकता है कि जरूरत इस बात की है कि हम जो पढ़ाना चाहते हैं, और सिखाने के तरीकों को उनके लिए ज्यादा आकर्षक बनाएं? यदि हां, तो कैसे?

ऊपर दिए गए विवरणों में बच्ची किसी चीज़ को टटोल रही है और उस चीज़ पर अपनी हर क्रिया का असर देख रही है। तो, हम कह सकते हैं कि यदि हम बच्चों को ऐसी ठोस चीज़ें दें जिनके साथ वे खेल सकें और कुछ भी कर सकें तो इससे सीखना रुचिकर बनेगा। या हम यह कह सकते हैं कि यदि स्कूल में हम उन्हें

अपनी रफ्तार और अपने ढंग से चलने दें तो वे सीखना चाहेंगे। हालांकि, ये दो बातें सीखने में मददगार होंगी, लेकिन इतना ही काफी नहीं हैं।

इस मामले में एक पिता ने अपनी बच्ची के बारे में जो टिप्पणियां दी वे ध्यान देने लायक हैं। उन्होंने कहा, “जब भी मैं उसे कुछ सिखाना चाहता हूं तो देखता हूं कि वह ऊब रही है, उसे रुचि नहीं है और उत्साह नहीं है। लेकिन जब मैं उसे अकेले में मनचाही चीज़ें करते देखता हूं तो वह इतना कुछ करना सीख लेती है कि मैं दांतों तले उंगली दबा लेता हूं। शायद बच्चे अपने आप, अपनी शर्तों पर अपनी इच्छा के हिसाब से सीखना चाहते हैं और नहीं चाहते कि हर समय उन्हें बताया जाए कि वे क्या करें। मुझे लगता है कि बच्चे सीखना चाहते हैं, सोचना चाहते हैं और नई बातों को खोजना चाहते हैं। वे सिर्फ बड़ों द्वारा किए गए कामों को दोहराना नहीं चाहते। वे नई दिशाएं खोजना चाहते हैं।”

कई बार ऐसा होता है कि बच्चे स्कूल के शुरुआती सालों में तो सीखने को उत्सुक होते हैं, मगर ऊँची कक्षाओं में पहुंचने तक उनका उत्साह काफी कम हो जाता है। इसका क्या कारण हो सकता है?

उदाहरण 8 : गांव के प्राथमिक स्कूल के बच्चे एक दिन स्कूल आते, तो दूसरे दिन न आते। खास तौर से बड़ी कक्षाओं में गैर-हाज़री आम बात थी। तब नई शिक्षक शारदा देवी की नियुक्ति हुई और एक महीने में उनकी कक्षा में बच्चे बहुत नियमित हो गए। इससे भी बड़ी बात यह हुई कि अन्य कक्षाओं के बच्चे भी उनकी कक्षा में घुसने की कोशिश करते रहते।

शारदा के पढ़ाने के तरीके में क्या खास बात थी? वह सिर्फ किताबों की बातों को पढ़कर बच्चों से दोहराने को नहीं कहती थी। वह सचमुच बच्चों को स्कूल की इमारत से बाहर ले जाती और उनसे यह देखने को कहती कि आसपास आयत कहां दिख रहे हैं, घर पर अनुपात से संबंधित समस्याएँ कब आती हैं, और उन्हें जो भी सामग्री मिले उससे खेल-खिलौने बनाने देती। और शारदा ने इनमें से हर गतिविधि को अपनी कक्षा के प्रत्येक बच्चे के लिए सीखने का सार्थक अनुभव बना दिया।

इस उदाहरण से हम बहुत सी बातें सीख सकते हैं, मसलन अगर हम किसी बच्ची को कुछ पढ़ाना चाहते हैं तो उसमें उसकी रुचि कैसे पैदा करें।

E13) बड़े लोग बच्चों के सीखने का जोश किस तरह से ठण्डा कर सकते हैं? और, किस तरह से वे बच्चों को अपने आसपास की दुनिया की खोजबीन करने में मदद कर सकते हैं?

अब तक हमने उदाहरणों से यह पता लगाने की कोशिश की कि क्या बच्चे बड़ों की नकल करके सीखते हैं। हमने पाया कि ऐसा नहीं है। हमने यह भी देखने की कोशिश की कि क्या बच्चे तब तक कुछ नहीं जानते जब तक कि कोई उन्हें खास तौर से बताए (या पढ़ाए) नहीं। इस मामले में भी हमने देखा कि इस नज़रिए को अपनाने से कई ऐसी बातों की व्याख्या नहीं होती जो बच्चे जानते हैं तथा एक औपचारिक ढांचे में कौन से उपायों से यह पक्का हो जाएगा कि कोई बच्ची सीखे। हम कोई पक्के नतीजे पर नहीं पहुंचे हैं।

कुछ और उदाहरण

हमने देखा कि बच्चे न तो बड़ों की नकल करते हैं, न ही वे आंख मूंदकर हिदायतों का पालन करते हैं। वे अपने आसपास की दुनिया के साथ अपने संपर्क के आधार पर, अपने आप भी काफी कुछ सीखते हैं। दुर्भाग्यवश, शिक्षक अक्सर इस बात को अनदेखा कर देते हैं। नतीजन, मिसाल के तौर पर वे इस बात से कोई फायदा नहीं उठाते कि स्कूल आने वाले अधिकांश बच्चे घर पर कुछ चीज़ें तो गिनते ही होंगे।

शिक्षकों द्वारा की जाने वाली एक और दुर्भाग्यवश गलती का संबंध उनकी इस बारे में समझ से है कि बच्चे ठोस चीजों की खोजबीन के ज़रिए कैसे सीखते हैं। शिक्षकों को कई बार ऐसी चीज़ें दी जाती हैं जिनके साथ खेलकर बच्चे अपनी समझ का विकास कर सकते हैं। लेकिन अधिकांश शिक्षक टूट-फूट के डर से बच्चों को इन चीज़ों से खेलने नहीं देते। शिक्षक मानकर चलती है कि यदि वह चीज़ दिखा दे और उससे संबंधित अवधारणा बता दे तो बच्चे समझ जाएंगे। यदि वह बच्चों को आपस में बातचीत करने दे या उसने जो कुछ पढ़ाया उसके बारे में वे क्या समझे यह व्यक्त करने दे, तो शायद वह समझ पाएगी कि चीज़ों के ऐसे प्रदर्शन से बच्चे किस तरह के निष्कर्ष निकालते हैं।

हमने बात की कि बच्ची खाली स्लेट नहीं होती और वास्तव में हम आमतौर पर जितना मानते हैं उससे कहीं ज्यादा जानती हैं तथा जब बच्ची किसी चीज़ के साथ खेलती है और यह पता करने की कोशिश करती है कि वह चीज़ के साथ क्या-क्या कर सकती है और साथ में अपनी शारीरिक क्षमताओं को भी टटोलती है। उदाहरण बताते हैं कि बच्चे नई चीज़ें सीखने को निहायत उत्सुक होते हैं और सिर्फ बड़ों द्वारा थोपी गई हिदायतों से चिपके नहीं रहना चाहते। वे सिर्फ बड़ों की बातें दोहराने या नकल करने को कतई उत्सुक नहीं होते। दरअसल, बच्चे अपने ढंग से बड़ों को चुनौती देना चाहते हैं।

उदाहरण 9 क) : एक दोस्त ने अपनी तीन-वर्षीय बेटि फरीदा का किस्सा सुनाया जो दोपहर में बाहर जाना चाहती थी। उसने फरीदा से कहा कि अभी बाहर बहुत गर्मी है। फरीदा पिता से जिद करती रही मगर वह टस से मस नहीं हुआ। अन्ततः उसने पिता से कहा कि उसे थोड़ा पानी दे दे। किचन में पहुंचकर वह एक बहुत ही सुन्दर गिलास में पानी लेना चाहती थी, जो एक सेट का हिस्सा था। उसने आधा गिलास पानी पीकर पिता से कहा, “मैं गिलास गिराने वाली हूँ।” पिता ने हौसला दिखाते हुए कहा, “गिराना है तो गिरा दो।” उसने फिर से कहा कि वह गिलास छोड़ देगी, और देखती रही कि पिता के चेहरे पर फिक्र या नाराज़गी नज़र आती है या नहीं तीन-चार मिनट तक यह चला और आखिरकार उसने गिलास गिरा दिया, जो टूट गया।

उदाहरण 9 ख) : दो वर्षीय बच्ची की एक हैरान-परेशान माँ ने एक दिन शिकायत की, मेरी बच्ची हमेशा कुछ न कुछ नई शैतानी करती रहती है। आज हम कमरे के फर्श पर खेल रहे थे, और आपने हमारे घर की खिड़की की सिल देखा है ना, मैं बस एक पल के लिए किचन में गई, और पलक झपकते ही वह स्टूल की मदद से मेज़ पर चढ़ गई और मेज़ पर से उस ऊँची खिड़की की दहलीज़ (sill) पर चढ़ी, और चिटकनी खोल डाली यह सब आधे मिनट में हो गया। मैं जब पहुंची तो वह खिड़की से बाहर हवा में लटक रही थी। वह तो मैं समय से पहुंच गई कि उसे वापस खींच लिया। पता नहीं उसने यह सब कैसे कर लिया।”

उदाहरण 9 (क) में निश्चित रूप से वह बच्ची अपने पिता या किसी अन्य बड़े की आंख मूंदकर नकल नहीं उतार रही थी। वह अपने पिता को ललकार रही थी, देख रही थी वह कहां तक जा सकती है। इसी प्रकार से जब कोई बच्ची खिड़की की दहलीज़ पर चढ़े तो यकीनन, यह नकल नहीं है, क्योंकि बाहर झांकने के लिए कोई भी बड़ा खिड़की की दहलीज़ पर नहीं चढ़ता। उसने किया यह कि बाहर देखने के लिए अपनी क्षमता में वृद्धि करने का एक तरीका खोज लिया। अर्थात् वह बड़ों के समान बनना चाहती है, वह सब करना चाहती है जो बड़े लोग करते हैं, उनसे ज्यादा करना चाहती है, उनकी नकल नहीं करना चाहती।

इसी प्रकार से बड़े बच्चों के पास भी बहुत सा ज्ञान और सूझबूझ होती है। मौका मिले तो वे भी इसे व्यक्त करते हैं।

उदाहरण 10 : गंगा दूर दराज़ के एक गांव में कक्षा 3 के बच्चों को एस्क़िमो (eskimo) के बारे में पढ़ाने जा रही थी। 'बर्फ' शब्द का उपयोग करने में हिचकिचाते हुए उसने बच्चों से पूछा कि क्या उन्होंने कभी बर्फ देखा है। बच्चे झिझकते हुए जवाब देने लगे। कुछ बच्चों ने कहा कि उन्होंने मेले में बर्फ देखा था। कुछ ने कहा कि उन्होंने बर्फ का गोला खाया है। कुछ ने कहा कि बर्फ सफेद होता है और पिघलकर पानी बन जाता है। चूंकि शिक्षक जानना चाहती थी कि वे कितना जानते हैं, उसने उन्हें बोलने का मौका दिया। बच्चों से ही बर्फ के विभिन्न गुण उभर रहे थे। – कड़ापन, ठण्डापन, टूटकर किरचें बनना, उसे काटा कैसे जाता है, उसका भण्डारण कैसे करते हैं, आदि।

किसी अन्य दिन गंगा को कक्षा 4 के बच्चों के साथ फ़सलों पर एक अध्याय करवाना था। कुछ सोचकर गंगा ने बच्चों से पूछा कि उनके आसपास कौन सी फ़सलें होती हैं। मानो, सारे बच्चे बस बोलने के मौके के लिए रुके हुए थे। एक साथ बोलने लगे। उन्होंने फ़सलों के नाम, उन्हें कैसे बोया जाता है, खाद और कीड़ों के बारे में बताया, गंगा भौचक्की थी। इतनी सारी जानकारी जो उसे कक्षा में मिली थी, वह न तो किताब में थी, न उसे पता थी।

गंगा का अनुभव स्कूल के अन्य शिक्षकों से मेल नहीं खाता। अन्य शिक्षकों की कक्षा में आम तौर पर होता यह है कि शिक्षक सवाल पूछते हैं और बच्चे टुकर – टुकर देखते रहते हैं। ये शिक्षक बताते हैं कि बच्चे बोलने में हिचकते हैं, गलत – सलत बोलते हैं और ऐसा लगता नहीं कि वे कुछ जानते हैं।

जब गंगा से पूछा गया कि बच्चों के बारे में उनकी सोच में इतना अन्तर क्यों है, तो उसने कहा, "जब हम बच्चों से वही दोहराने को कहते हैं जो हम पहले से जानते हैं, और जब भी वे गलती करें तब (कठोरता से या प्यार से) उनकी गलती सुधारते हैं तो वे हमारे साथ अपने मत बांटने को उत्सुक नहीं होते। जब उन्हें लगता है कि हम सचमुच उनकी बात सुनना चाहते हैं और उनकी भूल-चूक नहीं ढूंढेंगे तो उनमें हौसला आता है और वे चर्चा में भाग लेते हैं।"

E14) बच्चों के एक ही समूह के बारे में शिक्षकों द्वारा प्रस्तुत दो बिल्कुल ही अलग मत क्यों हैं?

अब तक जो कहा गया, यदि हम उसका विश्लेषण करें तो आप सहमत होंगे कि सीखने के बैंकिंग व प्रोग्रामिंग मॉडल (बॉक्स में देखें) इस बात का ब्यौरा प्रस्तुत नहीं करते कि कोई बच्ची दुनिया के साथ कैसे संबंध स्थापित करती है। अपने विकास के दौरान बच्ची आसपास की दुनिया के साथ एक संबंध जोड़ने की कोशिश करती है और हर चीज़ का अर्थ अपने ही सोच के ढांचे में परिभाषित करती है। वह आसपास की हर चीज़ को टटोलना चाहती है। असलियत के साथ इस संपर्क के जरिए वह अपनी अवधारणाएं रचती है।



चित्र 6 : बच्चे दुनिया के साथ संपर्क करके सीखते हैं।

बच्चों को पढ़ाते वक्त तो ख़ास तौर से हमें इन बातों को ध्यान में रखना चाहिए। ऐसा इसलिए कि गणित सीखने को बच्चे ख़ास तौर से कठिन मानते हैं। हमने कई मर्तबा शिक्षकों से गणित सीखने के बारे में बातचीत की है। शिक्षकों और शिक्षक-प्रशिक्षकों के साथ ऐसी सारी चर्चाओं में यही पता चलता है कि वे मानते हैं कि बच्चे गणित सीखने के लिए प्रेरित नहीं होते, इसलिए वे गणित सीख नहीं पाते। उनके मुताबिक इसका दूसरा कारण यह हो सकता है कि शायद शिक्षक ने अवधारणा ठीक से न समझाई होगी। उन्हें लगता है कि यदि शिक्षक ठीक से समझाए और उसे कई मर्तबा दोहराए तो बच्चे समझ जाएंगे।

बैंकिंग मॉडल – इसमें याद करने को सीखने के बराबर मानना ऐसा है मानो जानकारी के एक ढेर को किताब में से निकालकर दिमाग में रखना, और बाद में परीक्षा के समय इसे दिमाग से उत्तर पुस्तिका में उतार देना ही सीखना हो। सीखने के इस नज़रिए को बैंकिंग मॉडल कहा जा सकता है क्योंकि इस मॉडल के अनुसार, किसी बैंक की तरह याददाश्त में तथ्य रखे व निकाले जाते हैं। शिक्षक छात्रों के दिमागी-बैंक में ज्ञान जमा कर देते हैं, और फिर छात्र ज़रूरत पड़ने पर इन्हीं तथ्यों को निकाल लेते हैं।

प्रोग्रामिंग मॉडल में सीखने की प्रक्रिया यह है कि बच्ची को शुरू में उसके द्वारा प्रदर्शित क्षमताओं से अन्तिम अपेक्षित व्यवहार तक ले जाना। इस प्रक्रिया को छोटे-छोटे टुकड़ों में या उप-चरणों में बांटा जाता है। प्रत्येक उपचरण में सीखने के एक कार्य को एक उत्प्रेरक के रूप में बनाया जाता है।

इस उत्प्रेरक के उपयुक्त जवाबों को चुनकर अभ्यास के माध्यम से पुष्ट किया जाता है। अनचाहे जवाबों को हटा दिया जाता है। बच्चों ने व्यवहार के प्रत्येक 'टुकड़े' को सीखना है और उसमें महारत हांसिल करनी है। आखिर में जो व्यवहार हम बच्ची से चाहते हैं उसे हासिल करने के लिए जवाबों की इस श्रृंखला के जरिए सीखना पूरा हो जाता है।

पर आप क्या सोचते हैं नई जानकारी को समझने व व्यवस्थित करने की क्षमता को ये दोनों मॉडल समझा पाते हैं। क्या आपको लगता है कि ये मॉडल परिकल्पना बनाने, अनुमान लगाने, अटकल लगाने, तर्क करने, निष्कर्ष निकालने की क्षमताओं को समझा सकते हैं? इनमें से किसी भी क्षमता को इन दो मॉडलों में कोई स्थान नहीं दिया जाता है।

उदाहरण 11 : कक्षा 4 के एक गणित शिक्षक ने अपने छात्रों को निहायत ईमानदारी से भिन्नों का जोड़ सिखाया। उसने इस पर तीन हफ्ते लगाए थे और उसे खुशी थी सारे बच्चे सवाल हल कर सकते थे। बच्चे उन सवालों का भी हल कर लेते थे जिनमें LCM की गणना करनी होती है। मैंने उससे छात्रों को भिन्न के कुछ आसान सवाल देने की इजाज़त चाही। उसने मेरे द्वारा बनाए गए सवालों को देखकर कहा कि ये तो मामूली सवाल हैं। उसे यकीन था कि सभी छात्र इन सवालों को कर लेंगे। बल्कि उसने मुझसे कुछ कठिन सवाल भी बनाने को कहा था। मैंने कहा मैं बहुत पेचीदा चीज़ें नहीं बल्कि सिर्फ इतना देखना चाहता हूं कि क्या भिन्नों का छात्रों के लिए कोई अर्थ भी होता है।

हमने कक्षा के 44 छात्रों को वे सवाल दिए। जब शिक्षक ने बच्चों की उत्तर पुस्तिकाएं देखीं तो वह हक्का-बक्का रह गया और कहने लगा, "ऐसा कैसे हो सकता है ? पिछले सप्ताह ही मैंने इससे भी कठिन टेस्ट दिया था और बच्चों ने अच्छा किया था। वैसे ये सारी बातें उन्हें बार-बार समझाई थी। मैंने कोशिश की थी कि उन्हें सरल से सरल ढंग से समझाऊं और उदाहरण देकर यह भी बताया था कि वे सवाल कैसे हल करें। वास्तव

में, मैंने उनसे कहा था कि जितनी बार जरूरी लगे वे मुझसे पूछ लें।” उसने कहा कि वह अब तक तो खुश था कि ज्यादातर बच्चे भिन्न सीख गए हैं, किन्तु इस टेस्ट ने दिखा दिया है कि वे कुछ नहीं सीखे हैं।

ऊपर के उदाहरण में शिक्षक साफ तौर पर प्रोग्रामिंग मॉडल में भरोसा रखता है। वही हाल इस शिक्षक-प्रशिक्षक का भी है जो शिक्षकों को यह समझाने का प्रयास कर रहा है कि बच्चों को गणित सीखने में क्या दिक्कत आती है। उसका कहना है, “बच्चे सीखना ही नहीं चाहते। चूंकि उन्हें गणित कठिन व उबाऊ लगता है, इसलिए हमें चाहिए कि उसे सरल बनाएं और छोटे-छोटे चरणों में पढ़ाएं। बच्चे तभी तो कर पाएंगे ना, जब हम उन्हें स्पष्टता से बताएंगे और हर चरण समझाएंगे। यदि हम अच्छे से पढ़ाएं और उचित ढंग से समझाएं तो बच्चे जरूर सीखेंगे।” लिहाजा उसका सुझाव था कि शिक्षक को चाहिए कि वह अवधारणाओं को उप – अवधारणाओं में बांट दे, हर टुकड़ा अलग – अलग समझाए और बच्चों से कहे कि वे इस प्रक्रिया का अनुसरण करें, अभ्यास करें।

E15) क्या आप उदाहरण 11 में शिक्षक के अंतिम कथन से सहमत हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

E16) आपने इस पाठ में जो कुछ पढ़ा उसे ध्यान में रखते हुए आप गणित सीखने-सिखाने को लेकर उक्त शिक्षक-प्रशिक्षक के सुझाव पर क्या कहेंगे? आपका इस संबंध में क्या सुझाव होगा कि बच्चों को गणित के सीखने में ज्यादा भागीदार बनाने के लिए शिक्षक क्या करें।

E17) आपके विचार से बच्चे गणित कैसे सीखते हैं?

सारांश

इस पाठ में हमने पूर्वस्कूली और प्राइमरी स्कूल के बच्चों के सोचने और सीखने की कुछ प्रक्रियाओं को गणित सीखने के संदर्भ में प्रस्तुत किया है। हमने खास तौर से निम्न मुद्दों पर जोर दिया है:

1. बच्चे गणित की शुरुआत की अवधारणाओं की समझ कैसे बनाते हैं, खासकर

(a) बच्चों का चीजों और लोगों से संपर्क उनके सीखने का प्रमुख आधार होता है। यह संपर्क लगातार बना रहता है। इसलिए बच्चे लगातार सीखते रहते हैं; अगर हम उन्हें न रोकें, तो!

(b) ज्ञान हासिल करना और सूचनाओं को तोते की तरह दोहरा देना एक ही बात नहीं है।

2. बच्चे बड़ों की नकल करके नहीं सीखते।

3. यह जरूर है कि बच्चे बड़ों का अवलोकन करते हैं और अक्सर वह करने की कोशिश करते हैं जो बड़े करते हैं। लेकिन यह नकल नहीं है। वे संबंधित क्रिया अवधारणा को समझने की कोशिश करते हैं और फिर उसे अपनी समझ के अनुसार अपने तरीकों से पेश करते हैं। वे अपने मां – बाप व आसपास के अन्य बड़ों से आगे बढ़ने को उत्सुक रहते हैं।

4. बच्चे अपने आसपास की दुनिया से अपनी शर्तों पर अन्तर्क्रिया करके सीखते हैं।

5. बच्चे सीखने को उत्सुक रहते हैं तथा कुदरती तौर पर जिज्ञासु होते हैं। वे हर उस चीज़ की सीखते हैं जो उन्हें सार्थक व रोचक लगे।

6. हम शिक्षक का प्रदर्शन करते हैं, बशर्ते कि वे किसी काम में लगन से लगे हों और अपने ही सवालों को लेकर आगे बढ़ रहे हों।

सबक—1 के पाठ 1, 2 व 3 के अभ्यासों पर टिप्पणियां

पाठ—1

- E1) उदाहरण के लिए ताश खेलते समय, मुझे उन्हें छांटना पड़ता है, उन्हें क्रम में लगाना पड़ता है, जो पिछला पत्ता गिराया गया है, उससे बड़ी संख्या को जानना पड़ता है।
- E2) उदाहरण के लिए हमें अनुपात और समानुपात, अनुमान लगाना, गिनती करना, आदि। क्षमताओं का इस्तेमाल करना।
- E4) i) लम्बाई नापने में।
 ii) भार नापने और डाल की मजबूती और तनाव का अंदाजा लगाने में।
 iii) लंबाइयों को नापने और उनकी तुलना करने में।
 iv) मोटाई को मजबूती से और उस भार से जो वह उठा सकती है, संबद्ध करने में।
 v) झूले पर वजन और उसकी चाल का ज्यामिति से संबंध स्थापित करने में।
- E5) उदाहरण के लिए, हरि को दूरी, जाने की गति इत्यादि का अंदाजा लगाना है, और सड़क की हालत को गति से संबद्ध करना है आदि।
- E6) उदाहरण के लिए क्षेत्रफल, अनुपात—समानुपात, फोकस बिन्दु से दूरी आदि।
- E7) हम अपने चारों ओर बहुत सी सममिति देखते हैं, और हम पैटर्नों को देखते व पहचानते हैं। पुष्प सज्जा, लोक चित्रकला, कपड़ों की डिज़ाइन, इत्यादि सब में सममिति और पैटर्नों का उपयोग होता है। पौधों में सममिति, आकार और पैटर्नों इत्यादि के असंख्य उदाहरण हैं। ऐसे उदाहरण जानवरों, वस्तुओं, तस्वीरों और अन्य चीजों में पाए जाते हैं। लेकिन इस सब को हम गणित से संबंधित नहीं मानते हैं। इसलिए जब हम गणित की कक्षा में इन अवधारणाओं को पढ़ते हैं, तो ये हमारे जीवन के अनुभवों से बिल्कुल हटकर होते हैं।

हम दैनिक बातचीत में प्रायिकता की संकल्पना का उपयोग भी कई बार करते हैं। उदाहरण के लिए,

- इंदौर—बिलासपुर गाड़ी कई बार देर से आती है। वह आज भी देर से आएगी।
- आज बारिश होने की कोई संभावना नहीं है।
- वह जरूर आएगा। वह अपनी बात का पक्का है।

पाठ-2

- E1) उदाहरण के लिए, जब कोई बच्चा आपके साथ टहलने जाता है और पूछता है, “क्या फूलों के भी मम्मी पापा होते हैं?”
- E2) जैसे 6 साल के बच्चे के लिए 20 साल से ज्यादा किसी की उम्र हो ही नहीं सकती। समय की अवधारणा से संबंधित कई उदाहरण मिल सकते हैं।
- E3) जब कोई बच्ची बिल्ली की तस्वीर को नीला रंग देती है, और बड़ा उसे देखकर जोर देता है कि बिल्ली नीली हो ही नहीं सकती।
- E4) (क) जब कोई बच्ची दस (या बीस) तक गिनती बोलती है तो शिक्षक मान लेते हैं कि वह हर संख्या का मतलब समझती है। जबकि हकीकत में हो सकता है कि बच्ची 6 चीजों की गिनती भी नहीं कर पाए।
- (ख) एक तो बच्चे को बढ़ावा दें कि जो अवधारणा या प्रक्रिया आप सिखा रहे हैं उसके बारे में अपनी समझ को वह बताए। इस तरह आपको उसके नज़रिए से चीजों को देखने में मदद मिलेगी। बच्चों से बातचीत के दौरान आप जिन और बातों का ध्यान रखना चाहेंगे, उन्हें आप लिख सकते हैं।
- E5) उदाहरण के लिए, दो अंकों वाली दो संख्याओं को गुणा करने का ऐल्गोरिद्म लें, जो कक्षा 3 के बच्चों को सिखाया जाता है। मान लीजिए कि इसे इस्तेमाल करके बच्ची 35 को 42 से गुणा करती है। वह दूसरी पंक्ति के दायें कोने में $\times$ का निशान लगाती है, बिना यह जाने कि वह ऐसा क्यों कर रही है। उसे यह नहीं पता होता कि वह वास्तव में $42 \text{ को } 2 + 40$ के रूप में लिख रही है और 35 को पहले 2 से और फिर 40 से गुणा कर रही है। 40 से गुणा करने का मतलब है कि दी हुई संख्या को सिर्फ 4 से गुणा करके, प्राप्त परिणाम के अंकों को बाईं ओर एक-एक स्थान खिसकाना और हम ऐसे एक स्थान क्यों खिसका देते हैं? इसके जवाब के लिए स्थान और स्थानीय मान की सही समझ की जरूरत है।
- E6) (क) ✓
- (ख) $\times$
- (ग) $\times$
- (घ) $\times$
- E8) मैंने जब यह हल किया तो मैंने पहले तो एक दूसरी संख्या पद्धति में संख्याओं को लिखा। उदाहरण के लिए, 4 को तो 4 ही लिखा, लेकिन 5 को 10 लिखा। क्योंकि हमदशमलव पद्धति में 10 का एक बंडल बनाने पर दहाई बनती है इसी प्रकार आधार पद्धति में 5 का बंडल बनने पर पंचाई बनेगी। स्थानीय मान अब इकाई, पंचाई, वगैरह हो गए हैं। आगे सवाल को हल करने में हर चरण में आपको जो समस्याएं होती हैं, उन्हें लिखें। आप इनसे कैसे निपटें?

- E9) उदाहरण के लिए, जब मैंने कुछ 8 साल के बच्चों को 12 से 8 का गुणा करने को कहा तो पाया कि उनमें से एक 12 को 8 बार जोड़ रही थी, दूसरा $12 \times 10 - 12 - 12$ कर रहा था आदि।
- E10) (क) फिर से समूह बनाना और जोड़ना
(ख) आगे गिनना
(ग) क्रमविनिमयता का प्रयोग और आगे गिनना
(घ) सभी गिनना
- E11) जब पहली कक्षा के बच्चे को बताया गया कि '3-1' का मतलब है '3 से 1 निकालें, और यह सवाल करने को दिया गया तो उसने 1 मिटा दिया और 3 रहने दिया। यह पूछे जाने पर कि उसने ऐसा क्यों किया, उसने कहा, "आपने मुझे कहा कि एक निकालो, सो मैंने उसे मिटा दिया।" आप ऐसे कई उदाहरण सोच सकते हैं।
- E12) कक्षा 2 के बच्चे को मैं कई ठोस उदाहरणों से और कक्षा 4 के बच्चे को चित्रों और प्रतीकों से समझाने की कोशिश करूंगी। हां, उनकी समझ के स्तर को मैं जरूर ध्यान में रखूंगी। मैं बच्चों से बात करूंगी और उन्हें अपने अनुभवों के बारे में बात करने को प्रोत्साहित करूंगी। इस तरह यह जाना जा सकता है कि वे $\frac{1}{2}$ या $\frac{1}{4}$ को कितनी अच्छी तरह समझे।
- E14) एक ही लंबाई को दो डोरियां लें। 5 साल की बच्ची के सामने एक को सीधा और दूसरी को टेढ़ा-मेढ़ा करके रखें। ज्यादा संभावना यही है कि टेढ़ी-मेढ़ी करके रखी गयी डोरी को छोटा बतायेगी। आप ऐसे कई उदाहरण सोच सकते हैं।
- E15) (ग) क्योंकि 3 साल के बच्चे शायद ही गिनती की अवधारणा समझ पाए हों।
- E16) एक शहरी मध्यमवर्गीय माहौल में अधिक संभावना है—
(i) 4 वर्ष
(ii) 7 वर्ष
(iii) 9 वर्ष
(iv) 9-11 वर्ष
(v) सरल स्तर पर, 9 वर्षीय
- E17) (क) ✓। उन्हें अभी भी अवधारणाओं और प्रक्रियाओं को समझाने के लिए ठोस अनुभव चाहिए।
(ख) ✓।
(ग) ✓। जब एक बच्ची संरक्षण कर सकती है तो वह मूर्त संक्रियात्मक अवस्था में प्रवेश के लिए तैयार है। इसलिए 6 साल के या उससे बड़े प्राइमरी स्कूल के बच्चे मूर्त संक्रियात्मक अवस्था में होते हैं।

(घ) ✓। सोच-विचार की प्रक्रिया को प्रतिवर्तित कर सकना संरक्षण की क्षमता में शामिल है, जो गणितीय सोच के लिए जरूरी है।

E18) यह कथन सही है क्योंकि बच्चे का संज्ञानात्मक विकास सिर्फ उसकी उम्र से ही तय नहीं होता। और बातों के साथ-साथ बच्चे के सामाजिक और आर्थिक परिवेश पर और उसके अनुभवों पर भी निर्भर करता है।

E19) यह अभ्यास करते हुए मैंने नीचे दी गई सूची तैयार की।

- जानवरों को उनके लक्षणों से पहचानना,
- जब जानवर लौटते हैं तब हरेक जानवर के लिए कए पत्थर या डंडी रखना,
- अगर वे संख्या में बहुत हों तो उन्हें पांच-पांच के समूहों में बांटकर, हर समूह के लिए एक चिन्ह रखना।
- हर जानवर के लिए एक स्थान निर्धारित करना और खाली स्थानों से खोए हुए जानवरों का अंदाजा लगाना।

पाठ-3

- E2) शिक्षक बच्चों को एक, दो वगैरह से परिचित करा रहा है। वह उन्हें कोई चीज़ दिखाता है और चाहता है कि वे उसकी बात को दोहराएं। इसके तरीके से यह निष्कर्ष निकलता है कि वह मानता है कि कक्षा 1 के बच्चे इन संख्याओं को नहीं जानते। और क्या निकलता है इसमें? बच्चों के साथ अपने अनुभव और वे क्या जानते हैं व कैसे सीखते हैं की अपनी समझ के आधार पर क्या आपको शिक्षक की समझ सही लगती है? आप किस बात से असहमत हैं और किस बात से सहमत हैं? क्या आपको लगता है कि कक्षा 1 के बच्चों को एक, दो, तीन से परिचित कराना जरूरी है? क्या एक समूह गान के रूप में दोहराना सीखने का अच्छा तरीका है?
- E3) कल्पना कीजिए कि बच्चे क्या देख रहे हैं और उनसे दोहराने को कहा जा रहा है। क्या यह हो सकता है कि उन्हें 'एक', 'दो', वगैरह के अर्थ का बिल्कुल ही अलग संदेश मिल रहा हो? मसलन, वे शायद सोचें कि संख्याएं उन चोंक के टुकड़ों के नाम हैं। और कौनसी गलत धारणाएं बच्चों को मिल रही होंगी ?
- E4) आप किसी बच्ची को ऐसी स्थिति में देखिए जब उसके पास सामग्री हो। आप उसे कुछ और चीज़ें देकर उसके साथ बातचीत शुरू कर सकते हैं। उससे कहिए कि वह गिनकर बताए कौन सी चीज़ ज्यादा हैं, कौन सी कम, या एक किस्म की कितनी चीज़ें हैं, या उन चीज़ों से क्या बनाया जा सकता है, वगैरह। बच्ची को इन चीज़ों के साथ जितना और जैसा चाहे खेलने दीजिए। जब आप रिकॉर्ड कर रहे हैं कि बच्ची क्या कह रही है या क्या कर रही है, उससे अपेक्षित उत्तर की उम्मीद न करें और न ही उसे किसी खास उत्तर की ओर धकेलने का प्रयास करें। वह जो भी कहे उसे रिकॉर्ड करने तथा उसकी क्रियाओं व कथनों का भावार्थ समझने की कोशिश कीजिए।
- E5) इन सारी घटनाओं में बच्चे नई धारणाएं बनाते हैं और उनका उपयोग नई स्थितियों का वर्णन देने में करते हैं। वे यह समझने का प्रयास कर रहे हैं कि उनके आसपास क्या हो रहा है। इस प्रक्रिया में वे मिला-जुलाकर ऐसे विचार व्यक्त करते हैं जो शायद उन्होंने पहले कभी नहीं सुने, या वे अपने व्यापकीकरण बना रहे हैं। तीनों ही स्थितियों में बच्चे अपने आसपास की चीज़ों के बारे में अपनी पसंद और अपनी समझ का प्रदर्शन कर रहे हैं। क्या आपको लगता है कि इनमें से किसी भी उदाहरण में बच्चे किसी बड़े की नकल कर रहे हैं। क्या वे ऐसी क्षमताओं का प्रदर्शन कर रहे हैं जो नकल करके सीखी जा सकती हैं? कौन सा बड़ा इन्सान बकरी को माया कहता है?
- E6) बच्ची ने मां को देखा, विश्लेषण किया कि वह क्या कर रही है और (मां के मुताबिक) शायद उसी तकनीक का इस्तेमाल किया। वह कैल्कुलेटर को ठीक कर पाई, जो उसकी मां नहीं कर पाई थी। वास्तव में, जब मां ने चलता हुआ कैल्कुलेटर देखा तो वह अचम्भित हो गई थी। ऐसा इसलिए हुआ क्योंकि बच्ची ने सिर्फ मां की नकल नहीं की थी।
- E7) अब तक दिए गए उदाहरणों तथा बच्चों के सीखने के बारे में अपने अन्य अनुभवों का विश्लेषण कीजिए। यह सोचिए कि इनमें सीखने के जो प्रमाण हैं, उनकी व्याख्या क्या नकल के आधार पर की जा सकती है। मसलन, जब कोई बच्ची कोई चीज़ और मांग रही हो और मां-बाप लगातार मना कर रहे हैं, तो बच्ची किसकी नकल कर रही है ? इस प्रक्रिया में बच्ची अपने व्यवहार से दर्शाती है कि वह सीख रही है, किन्तु नकल करके नहीं।
- E8) इसका महत्व बच्चों के सीखने के बारे में आम धारणाओं में परिवर्तन के लिहाज़ से है। बच्चे नकल करने को कतई उत्सुक नहीं होते और वे जो अधिकांश बातें सीखते हैं वे नकल करके नहीं सीखते। परन्तु

दुर्भाग्यवश अधिकांश गणित शिक्षक बच्चों को नकल करने व रटने पर मजबूर करते हैं। क्या बोर्ड पर एक सवाल हल करके बच्चों से वैसे ही सवाल छुड़ाने को कहना सार्थक सीखना कहा जा सकता है? इस तरह कोई चीज़ बच्चों के गले ज़बरदस्ती उतारने की बजाय, हम बच्चों को सीखने में मदद कैसे कर सकते हैं ?

- E9) आफताब जैसे आप भी अन्य घटाने के उदाहरण लेकर दोनों तरीकों से करके देखें और उत्तर तक पहुंचें।
- E10) ऊपर के सारे उदाहरण बताते हैं कि बच्चों के दिमाग कई अलग-अलग तरह से विकसित होते हैं, सिर्फ उस तरह से नहीं जैसे बड़े चाहते हैं।
- E11) मसलन, किसी शिशु को देखिए। आपने उसे आपकी उंगली पकड़ना नहीं सिखाया, किन्तु वह पकड़ लेती है। नर्सरी स्कूल के बच्चों को देखिए। वे अपने जीवन के 3-4 वर्ष गुज़ार चुके हैं, हर दिन खोजबीन करके सीखते हुए। तो, वे खाली स्लेट कैसे हो सकते हैं?
- E12) इस भाग में हमने यह चर्चा की कि यदि बच्चे व बड़े के किसी संपर्क में बच्चों के लिए आज़ादी व गुंजाइश हो, तो इससे बच्चे (और बड़े) बहुत कुछ सीखते हैं। भाग में यह भी कहा गया कि खिलौनों से खेलते वक्त बच्चे काफी ध्यान लगाकर खेलती हैं और विभिन्न विचारों को आजमाती हैं। अन्य बच्चों के साथ वह कल्पनाएं कर सकती हैं और नई-नई स्थितियां रच सकती हैं। इसमें काफी सीखना, खोजबीन और विचारों का विकास होता है।
- E13) बताइए कि कैसे बच्ची के प्रति बड़े के कुछ रवैयों की वजह से बच्ची वह करने से कतराने लगती है जो कहा जाए। वास्तव में, मां-बाप जब किसी बच्ची को ज्यादा बच-बचाकर रखते हैं तो वे भी उसके सीखने में बाधा पहुंचाते हैं। बच्चे अपने आप बहुत कुछ कर सकते हैं, और इस तरह कर सकते हैं जैसा वे बड़ों की मौजूदगी में नहीं कर पाते। यदि बड़े लोग उन्हें नई-नई चीज़ें आजमाने दें और उनके खेलों में शामिल हों, तो वे सीखने में बच्चों की मदद ही करेंगे।
- इस तरह की कई और बातें आप सोच सकते हैं।
- E14) दोनों शिक्षकों के बीच बुनियादी फर्क सीखने न सीखने की प्रक्रिया के बारे में समझ का है। प्रत्येक शिक्षक के रवैये के सम्भावित महत्व के ऐसे बिन्दु बताइए जिनकी वजह से वे बच्चों के बारे में इतनी अलग-अलग बातें कह रहे हैं। (मसलन, कक्षा में अपनाई गई पद्धति, सीखने के अर्थ को लेकर समझ, बच्चों से अपेक्षाएं, वगैरह।)
- E15) क्या बच्चे कुछ भी नहीं सीखे थे? हर बच्ची अपने-अपने ढंग से कुछ न कुछ सीखी होगी— अवधारणा सीखने की दिशा में किसी बीच के चरण पर पहुंची होगी।
- E16) शिक्षक-प्रशिक्षक की सोच में सीखने वाले और सीखने की प्रक्रिया के बारे में कुछ मान्यताएं हैं। मसलन, उसकी धारणा है कि बच्चे खुद कुछ सीखने को उत्सुक नहीं होते, बल्कि उन्हें उत्साहित करना होता है। उसे यह भी लगता है कि बच्चों को कोई भी अवधारणा टुकड़े-टुकड़े में और एक सुव्यवस्थित क्रम में सीखना चाहिए। इस नज़रिए पर और इस कोर्स में हमने जो कुछ चर्चा की उस पर विचार कीजिए। अपनी राय के आधार पर बच्चों को गणित सीखने में ज्यादा प्रेरित करने के कुछ तरीके सुझाइए।
- E17) इस पाठ में जो कुछ सीखा, उसके आधार पर आपकी समझ क्या है कि बच्चे कैसे सीखते हैं? क्या वे किसी एल्गोरिद्म के इस्तेमाल से कई सवालों को हल होता देखकर उस एल्गोरिद्म को सीखकर गणित सीखते हैं? या पहाड़ों को रटकर? या सीखने में उनकी मदद करने के लिए कुछ और करना होगा?

जड़ में है : गिनती

इस अध्याय के विषयवस्तु

पाठ – 4 गिनना कैसे सिखायें

परिचय – उद्देश्य – गिनती का मतलब – अनुभव से अवधारणा तक गिनती।

पाठ – 5 इकाई, दहाई और आगे

परिचय – उद्देश्य – बुनियादी समझ – संक्रियाएँ लगाने में दिक्कतें – स्थानीय मान क्या है?

पाठ-4 व 5 के अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

गिनती-गणना-गणित! सारा गणित का महल गिनती पर खड़ा होता है। पुराने, दिनों में टीचर बोर्ड पर लिख देता था— 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, फिर बेंत 1 पर रखकर बोलता था “एक” और पूरी क्लास चिल्लाती थी “एक” — जो न चिल्लाये उस पर सटाक! फिर आगे 2 पर जाकर बोलता था “दो” — और यह सिलसिला 10 तक जाता था। दो महीने के अन्त में पूरी क्लास 1, 2, 3 ... लिख लेती थी और बोल भी लेती थी एक, दो, तीन, ...। बस, हो गया। गिनती सीख ली गयी। माँ, बाप भी खुश।

लेकिन इस विधि से गणित की समझ नहीं बनी—बने गणित करे रटने वाले होते तोते अच्छे लगते हैं मगर अफसोस ये किसी को समझा नहीं सकते

तो अब क्या होता है? शिक्षाविदों ने बहुत मेहनत की है। शिक्षकों को बेहतर पढ़ाया जाने लगा है। कहा गया है गणित की शिक्षा बच्चों के आसपास के जीवन से जुड़ी होनी चाहिए गतिविधियों से “अवधारणाएँ” सिखायी जानी चाहिए, बच्चों को पाठों से आनन्द आना चाहिए।

चलो, ठीक है। मगर कैसे? अमूर्त लकीरें जैसे 1, 2, 3 न लिखकर बच्चों को एक किताब, एक माचिस की तीली, एक कंकर, एक डिब्बा सामने रखकर, सब पर बारी-बारी से उंगली रखकर कहा जाना चाहिए। एक, एक, ...। फिर दो-दो किताबें, माचिस की तीलियाँ, कंकर आदि सामने रखकर वैसे ही कहना चाहिए दो, दो, दो ...। ऐसे ही फिर तीन, चार, आदि। उम्मीद है, इस तरह बच्चे ‘2’ की तस्वीर से ‘दो’ की आवाज़ चीजों को जोड़ लेंगे। ठीक है। ऐसा होता भी है— करके देखा गया है।

क्या बच्चों के जीवन से जुड़ी गिनती सिखायी जा रही है? सोचो, अगर माचिस की तीलियों, कंकरों की जगह चॉकलेट, टाफियों, मिठाइयों का इस्तेमाल किया जाए तो क्या बच्चों के जीवन से जुड़ाव बेहतर होगा, या नहीं? ठीक समझने पर बच्चे इनको खा सकेंगे।

स्कूलों में खर्चा बढ़ जाएगा। बच्चों का पेट खराब होगा। शिक्षाविद डाँटेंगे, कहेंगे गणित की जगह लालच सिखाया जा रहा है। ये आरोप शायद सही है, मगर बेशक बच्चे गिनती बेहतर सीखेंगे।

ये पूरा किस्सा शायद आधा— मज़ाक है। असली बात है कि “जीवन से जुड़ना”।

यही बात लागू होती है बड़े अंकों की गिनती पर। इकाई, दहाई, सैंकड़ा, ... इन सबकी अवधारणा वास्तविक

जीवन से उपजा है, किसी गणित शास्त्री के दिमाग से नहीं। यह भी ज़रूरी नहीं कि दस के पैमाने (दशमलव) पर ही गिनती की जाये – दो, चार, आठ, बीस ... किसी भी पैमाने पर की जा सकती है। पूरा कम्प्यूटरों का जगत सिर्फ दो अंकों (0 और 1) पैमाने पर बनाया गया है। पुराने जमाने में व्यापार बैलगाड़ियों पर किया जाता था। मंडियों में हिसाब कैसे होता था? अनाज के एक बोरे का नाप उतना होता था जितना एक हम्माली/खटीक अपनी पीठ पर ढो सके। एक बैलगाड़ी का नाप उतना होता था जितना दो बैल चला सकें। सड़कों के पड़ाव (और उनसे जुड़े गोदाम) उतनी दूर होते थे जितना कि बैल एक दिन में चल सकें (16 कोस)। व्यापारी गिनते थे— इतने गोदाम, इतनी बैलगाड़ियाँ, इतने बोरे। इन “वास्तविक जीवन” की ज़रूरतों से उपजा था। गणित।

इकाई, दहाई, सैंकड़ा... आदि के विचार! और बच्चों को इकाई, दहाई, सैंकड़ा आदि की समझ उनके “जीवन से जुड़ी” चीज़ों के इस्तेमाल से की जाएँ तो बेहतर है। हाँ, टाफी, चाकलेटों से नहीं! सिर्फ शिक्षाविद ही नहीं, हर कोई इन पर एतराज़ करेगा।

हाँ, और विषयों की तरह गणित की भी अपनी भाषा है। अ, ब, ज, ल, प की जगह 1, 2, 3, 4, ... आदि अक्षर हैं। हर अक्षर की अलग जगह होती है। कमल और कलम में फर्क है – जैसे 123 और 132 में। गणित का भी अपना व्याकरण है। इसको भी उसी तरह की संजीदगी, और मज़े से सीखना-सिखाना है।

पाठ—4

गिनना कैसे सिखायें

गिनती का मतलब – अनुभव से अवधारणा तक गिनती

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - गिनती का मतलब
 - अनुभव से अवधारणा तक गिनती।
- सारांश

परिचय

तीन साल के बच्चों को गणित का पहला अनुभव क्या दिया जाए, इस पर विचार करते समय हममें से ज्यादातर लोग यही सोचते हैं कि उन्हें 1 से 20 तक की गिनती याद कराई जाए। हम उन्हें यह भी सिखाते हैं कि उंगलियों से 10 तक की संख्याएं कैसे दिखाएं। इसके बाद चाहते हैं कि बच्चे जल्द से जल्द संख्याएं लिखने लगें, और उन्हें पहचानने लगें (हम इस बात की कोई चिन्ता नहीं करते कि बच्चे पहले लिखना सीखें या पहले पहचानना या वे दोनों काम साथ-साथ करें!)

बच्ची जब 'एक से बीस' तक की गिनती याद कर लेती है तो हम रिश्तेदारों—दोस्तों के सामने इसका प्रदर्शन करवाते हैं, और हम गर्व से बैठ कर सुनते हैं। लेकिन क्या आपने कभी इस बात पर गौर किया है कि जब 'प्रदर्शन' के दौरान उसे यह याद नहीं आता कि छः के बाद क्या आएगा, तो वह कितनी घबराई नजर से आपकी ओर ताकती है? और जब वह अंदाजे से—सात— फुसफुसाती है और देखती है कि आप सिर हिलाकर हामी भर रहे हैं, तो उसे कितनी राहत मिलती है? आपके लिए तो यह आपकी बिटिया का एक और सफल प्रदर्शन था, जबकि बच्ची के लिए यह एक और अग्नि परीक्षा थी।

इस तोता रटन्त, नीरस और कवायदनुमा तरीके से 'गिनती सिखाने' के बाद हम इसी ढंग से जोड़ना, घटाना, गुणा, भाग और आगे चलकर भिन्न व दशमलव भी सिखाते हैं। इस तरह जब हम सीखने की प्रक्रिया में से मजा निकाल देते हैं, तो कोई हैरानी की बात नहीं कि बच्चे गणित से डरने लगें उसे कठिन समझे और इन्तजार करें कि कब गणित की कक्षा खत्म हो। जब गणित

रोजमर्रा के जीवन से कटा हुआ हो और इस कदर बेमजा व उबाऊ हो, तो शायद बच्चे कुछ इस तरह सोचते होंगे:

मम्मी फिर आ गई। रेत में खेलने में इतना मजा आ रहा है, और मम्मी कहती है कि कॉपी में चित्र बनाओ। वह इनको 'संख्या' कहती है। चित्र बनाना तो ठीक है, पर वे कहती हैं कि एक ही चित्र बार-बार, बार-बार, पूरे पन्ने पर बनाओ। और अगर मैं चित्र को थोड़ा बदल दूँ, तो गुस्सा हो जाती हैं। काश, आज मौसी न आएँ। जब मम्मी कहती हैं कि मौसी को '1 से 20 सुनाओ' तो बोरियत होती है। मैं 'पाँच' के पहले 'सात' या 'एक' के पहले 'दो', बोल दूँ तो क्या हो जाएगा ? ज्यादा मजा तो रेत में खेलने में आता है। पर मम्मी कहती है उसमें वक्त बर्बाद होता है। लो, वो फिर बुला रही है। जल्दी जाऊँ, नहीं तो एक के बजाय दो पन्ने लिखने को कहेंगी।"

आपने अगर कभी सोचा है कि बच्चों को गिनती सीखने में इतनी दिक्कत क्यों होती है और इस काम में उनकी मदद कैसे करें, तो इस पाठ को पढ़ने से आपको मदद मिल सकती है।

उद्देश्य

इस पाठ को पढ़ने के बाद

- गिनती करने में शामिल प्रक्रियाओं को समझ सकेंगे।
- यह समझ पायेंगे कि संख्याओं के नाम बता पाना बच्चे की गिनने की क्षमता को नहीं दर्शाता।
- ऐसी गतिविधियाँ आयोजित कर पायेंगे जिससे बच्चों में वर्गीकरण को क्रम में रखने की तथा एक-एक की संगति बनाने की क्षमता बेहतर हो सके।
- ऐसी गतिविधियाँ आयोजित कर पायेंगे जिनसे बच्चों को गिनती सीखने में मदद मिले।

गिनती करने का मतलब

'गिनती कर पाने की क्षमता' से हम क्या समझते हैं ? इसका जवाब देने से पहले जरा निम्नलिखित स्थिति पर विचार कीजिए।

उदाहरण 1: तीन वर्षीय मिनी 1 से 20 तक गिनती सही क्रम में बोल सकती थी। एक बार उसकी दादी ने उससे दराज में से 12 बटन लाने को कहा। मिनी ने बटन उठाते हुए 12 तक 'गिना' और बटन दादी को दे दिए। कुल सात बटन थे। दादी ने मिनी से कहा कि फिर से गिनकर देख ले कि 12 बटन हैं या नहीं। मिनी ने फिर से 'गिना' और कहा, "नहीं, ये तो पन्द्रह बटन हैं।"

(i) आपका क्या ख्याल है, मिनी गिनना जानती है या नहीं ? (ध्यान रखें कि वह 1 से 20 तक की संख्याएँ सही क्रम में बोल सकती है।)

(ii) आपके ख्याल से मिनी 12 बटन क्यों नहीं उठा पाई ?

इन सवालों पर गौर करने के बाद, अपने घर या पड़ोस के किसी चार वर्षीय बच्चे के साथ निम्नलिखित गतिविधि आजमाइये।



चित्र 1 : क्या मिनी गिन सकती है?

E1) किसी ऐसे चार वर्षीय बच्चे के सामने दस कंकड़ रखिए जो दस तक की संख्याएँ सही क्रम में बोल सकता/सकती हो। अब उससे कहिए कि वह उन कंकड़ों को अपनी उंगली से छूते हुए जोर से गिने। शायद उसे दिखाकर समझाना पड़े कि आप क्या चाहते हैं। लेकिन एक बार वह गिनना शुरू कर दे, तो बीच में टोकिए मत।

- क) क्या बच्चे ने कुछ कंकड़ों को एक से ज्यादा बार गिना ?
- ख) क्या उसने कुछ कंकड़ छोड़ दिए ?
- ग) क्या उसने बगैर किसी कंकड़ को छुए भी संख्या बोली ?
- घ) क्या सारे कंकड़ छू लेने के बाद भी वह संख्याएँ बोलता रहा/बोलती रही?

अपने अवलोकनों के आधार पर आप बच्चे की गिनने की क्षमता के बारे में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

यदि अभ्यास E1 के सारे सवालों के उत्तर 'नहीं' हैं, तो सम्भावना है कि बच्चे को दस तक गिनना आता है। यदि **किसी एक** प्रश्न का उत्तर भी 'हां' है, तो इसका मतलब यह होगा कि बच्चे को गिनना नहीं आता। E1 से जाहिर होता है कि संख्याओं के नाम बोलने से सिर्फ इतना ही पता चलता है कि बच्चे की याददाश्त अच्छी है। दूसरी ओर, गिन पाने की क्षमता से पता चलता है कि बच्ची संख्या की अवधारणा समझने की ओर बढ़ रही है।

उदाहरण 1 में हालांकि मिनी सही क्रम में संख्याओं के नाम बोल सकती है, मगर गिनना उसे नहीं आता। गिनती करते समय वह निम्नलिखित में कोई एक या अधिक गलतियाँ कर रही है — एक ही बटन को एक से ज्यादा बार गिनना, गिनते वक्त किसी-किसी बटन को छोड़ देना, किसी बटन को छुए बगैर संख्या बोल देना या सारे बटन पूरे हो जाने बाद भी संख्याएँ बोलते रहना। वह ऐसी गलतियाँ क्यों करती है ? इसे समझने के लिए हमें यह देखना होगा कि गिनते वक्त हम किन-किन प्रक्रियाओं से गुजरते हैं। यह देखने का सबसे अच्छा तरीका होगा कि आप खुद मोतियों के एक ढेर में मोतियों को गिने। हां, क्यों नहीं ? यह करके देखें, और करते हुए सोचें कि आपने क्या किया।

“संख्याओं को क्रम से बोल पाना और गिनने की क्षमता एक ही बात नहीं है।”

इस गतिविधि से निकले मेरे अवलोकन मैंने नीचे दिये हैं। आपके अवलोकन से ये कितने मिलते-जुलते हैं?

i) सबसे पहले तो मैंने मोतियों को एक पंक्ति में जमा दिया ताकि गिनते वक्त न तो कोई छूटे और न दो बार गिना जाए। दूसरे शब्दों में मैंने उन्हें एक **क्रम में रखा**।

ii) अब इनको गिनने के लिए मैंने मान्य क्रम में संख्याओं के नाम बोलना शुरू किया। मेरे लिए ऐसा करना सम्भव था क्योंकि मुझे इस क्रम के अनुसार काफी संख्याएँ मालूम हैं, कम से कम गिनी जाने वाली मोतियों जितनी। गिनते वक्त मैंने हर संख्या का नाम बोलते हुए एक मोती को (वास्तव में या ख्यालों में) छुआ, और इस तरह हर मोती को छुआ। यानी मैंने एक मोती को एक संख्या के साथ **जोड़ा**। दूसरे शब्दों में, मैंने **एक-एक की संगति** बनाई।

iii) गिनती के हर कदम पर मैंने मोतियों का दो समूहों में **वर्गीकरण (classification)** किया — वे मोती जो गिने जा चुके थे और वे मोती जिन्हें गिनना बाकी था।

iv) जब मैंने दसवें मोती को छुआ (कुल दस मोती ही थे), तो मैंने बोला 'दस'। पल भर बाद मैंने बता दिया कि मेरे पास दस मोती हैं। यानी 'दस' शब्द का इस्तेमाल दो तरह से हो रहा था। आखिरी मोती को छूते हुए जब मैंने 'दस' बोला था तब वह सिर्फ **उसी मोती** से जुड़ा था। मगर बाद में वही शब्द 'दस' **सारे** मोतियों की कुल संख्या बता रहा था।

यानी मोतियों को गिनने के दौरान **चार अलग-अलग प्रक्रियाओं** से गुजरना पड़ा – क्रम में रखना, वर्गीकरण करना, एक-एक की संगति बनाना और एक ही संख्या को दो अलग-अलग अर्थों में इस्तेमाल करना।

किन्तु जब हम बच्चों को गिनती से परिचित कराना शुरू करते हैं, तो कहां से शुरू करते हैं? हम यह तक पता करने की कोशिश नहीं करते कि क्या बच्चे को चीजें छांटना या क्रम में रखना आता है या नहीं। और, जहाँ तक एक-एक की संगति का सवाल है, तो हम बस एक-दो बार उसे बता देते हैं कि गिनते वक्त हर एक चीज को एक ही बार छुआ जाता है। हम उसे इतना समय ही नहीं देते कि वह समझ पाए कि इसका मतलब क्या है या इसका अभ्यास कर पाए। कई बार जब किसी बच्चे को गलत गिनने के लिए डांट पड़ती है तो कोई हैरानी नहीं होनी चाहिए कि वह यह जवाब दे :

“लेकिन गलत क्या है ? आपने मुझसे ‘एक, दो, तीन, ...’ बोलने को कहा और साथ-साथ इन चीजों को छूने को कहा। इससे क्या फर्क पड़ता है कि इन्हें छूते हुए मैं 20 तक बोल सकती हूँ जबकि आप सिर्फ 15 तक बोल पाते हैं।”

ऊपर बताई गई चार प्रक्रियाओं में से आखिरी प्रक्रिया बच्चों के लिए सबसे मुश्किल होती है। इस संदर्भ में निम्नलिखित स्थिति कई बार देखने में आती है।

उदाहरण 2: एक व्यक्ति ने अपनी बच्ची को चार पेंसिलें दिखाई। फिर उन्हें बच्ची के सामने एक लाइन में रख दिया। अब पहली पेंसिल की ओर इशारा करके बोला 'एक', दूसरी की ओर इशारा करके बोला 'दो', तीसरी की ओर इशारा करके 'तीन' तथा चौथी की ओर इशारा करके बोला 'चार'। उसने एक बार इसे दोहराया ताकि बच्ची भलीभांति समझ जाए। इसके बाद उसने मुस्कुराते हुए बच्ची से कहा 'मुझे दो पेंसिलें दे दो'। बच्ची ने पंक्ति में से दूसरी पेंसिल उठाकर दे दी। इस पर पिता ने कहा कि “नहीं बिटिया, मैंने कहा **दो** पेंसिलें। (एक और पेंसिल उठाते हुए) यह देखो, अब ये दो पेंसिलें हैं।” यह सुनकर बच्ची चक्कर में पड़ गई। “सचमुच ?”, बच्ची ने सोचा, “लेकिन पहले तो उन्होंने कहा था कि यह पेंसिल **‘दो’** हैं ?”

[?] आपको क्या लगता है, ऊपर वाले उदाहरण में बच्ची चक्कर में क्यों पड़ गई?

जब हम संख्याओं के नाम और वस्तुओं के बीच एक-एक की संगति जमाते हैं, तब हम संख्या को वस्तु के अस्थायी लेबल के रूप में इस्तेमाल करते हैं। ऊपर दिए गए उदाहरण में उस पेंसिल और संख्या 'दो' के बीच कुछ भी समान (common) नहीं है। वह पेंसिल वस्तुओं के क्रम में दूसरी है, बस। मगर जब हम बच्चे से दो पेंसिलें देने को कहते हैं तो हमारी अपेक्षा यह होती है कि वह 'दो' के लेबल को दूसरी पेंसिल से अलग कर दे और उसे किन्हीं भी दो पेंसिलों से जोड़कर देखें। यानी कि संख्या के नाम का इस्तेमाल दो तरह से हो रहा है। जो बच्चे अभी संख्याओं से निपटना सीख ही रहे हैं, उनके लिए यह बात समझना आसान नहीं है।

E2) नीचे लिखे कथनों में से कौन-कौन से सही हैं? गलत वाक्यों में उचित परिवर्तन करके उन्हें सही बनाइए।

- i) यदि कोई बच्ची गिन नहीं सकती, तो वह संख्याओं के नामों को एक क्रम में बोल ही नहीं सकेगी।
- ii) यदि कोई बच्ची गिन नहीं सकती, तो सम्भव है कि वह यह नहीं समझ पाई है कि दी गई वस्तुओं और संख्याओं के नामों की जोड़ी कैसे बनाई जाए।
- iii) जब कोई बच्ची पांच चीजों की संख्याओं के नामों के साथ सही जोड़ी बना ले, तो इसका मतलब यह है कि वह 'पांच' शब्द का उपयोग दोनों अर्थों में कर सकती है।
- iv) गिनना सीखने से पहले किसी भी बच्चे को वर्गीकरण, क्रम में रखने तथा एक-एक संगति की कुछ समझ होना जरूरी है।

गिनने की प्रक्रिया में शामिल प्रक्रियाओं पर चर्चा करना हमें इसलिए जरूरी लगा क्योंकि कई ऐसे स्कूल हैं जो सिर्फ संख्याओं के नाम याद कराने पर जोर देते हैं। इनमें से ज्यादातर का विश्वास है कि यदि बच्चे संख्याओं के नाम गिनती के क्रम में बोलना सीख जाएं, तो इसका मतलब यह है कि वे गिनना सीख गए हैं। आप अब तक शायद इससे सहमत होंगे कि यह धारणा गलत है और बच्चों में संख्या की समझ धीरे-धीरे ही विकसित होती है। गिनती सीखने से पहले उन्हें वर्गों में बांटना, क्रम में रखना और एक-एक की संगति जमाना कुछ हद तक आना चाहिए। इसीलिए इन क्षमताओं को **संख्या-पूर्व अवधारणाएं** (pre-number concepts) कहा जाता है। यानी संख्या का अर्थ समझने से पहले बच्चों को ये क्षमताएं विकसित करनी होंगी।

संख्या-पूर्व अवधारणाओं का विकास

आप जानते ही हैं कि किसी अवधारणा पर पकड़ बनाने के लिए बच्चों को उसे टटोलने व उसका अनुभव करने के कई अवसर मिलने चाहिए। **उन्हें प्रोत्साहित किया जाना चाहिए कि, किसी अवधारणा को टटोलते हुए वे जो कुछ करते हैं, उसके बारे में बातचीत करें।** और इस सबके लिए हमें धीरज रखने की जरूरत है। हममें से कुछ लोग पहले तो बच्चों को खुद जवाब खोजने के लिए प्रेरित करते हैं। मगर जब उन्हें समय लगता है, तो हमारा धीरज टूट जाता है और हम खुद ही उन्हें जवाब दे देते हैं या जल्दी से खुद कार्य को निपटा देते हैं। इससे बच्चे खुद तर्क करने व जवाब खोज निकालने से रह जाते हैं। वास्तव में हमें सवाल को परिभाषित करने में तथा अलग-अलग सम्भव जवाबों को खोजने में उनकी मदद करनी चाहिए। इसके लिए उन्हें काफी समय देना होगा। इसी तरह वे गणितीय अवधारणाओं की समझ और गणितीय ढंग से सोचने की क्षमता विकसित कर पायेंगे।

“बच्चे को सवाल को समझने और हल करने के लिए काफी वक्त दें।”

बच्चे में वर्गीकरण करने, क्रम जमाने व जोड़ी बनाने की क्षमता विकसित करने के लिए बच्चों को मजेदार गतिविधियों द्वारा अवधारणाओं को खोजने का मौका दिया जा सकता है। यहाँ हम कई गतिविधियों पर गौर करेंगे। **जो सिर्फ बतौर उदाहरण है।** इन्हें आसानी से पाई जाने वाली सामग्री के अनुसार अपनी विशिष्ट परिस्थिति के अनुरूप ढालकर इस्तेमाल करें।

वर्गीकरण

जैसा कि आप जानते हैं, ऐसी चीजों को जिनमें कुछ गुण एक-से हों, **साथ-साथ रखने को ही वर्गीकरण या समूहीकरण कहते हैं।** किसी बच्चे को वर्गीकरण करना आ गया है, यह तभी कहा जा सकता

है जब वह वर्गीकरण की कसौटी का निर्णय कर सके और पूरी गतिविधि के दौरान इस कसौटी को बनाए रख सके। यह क्षमता तार्किक व गणितीय अवधारणाओं के विकास की बुनियाद है।

बच्चे रोजमर्रा के कामकाज में अक्सर वर्गीकरण करते हैं। मसलन जब बच्चों को कहा जाता है कि गुड़िया के कपड़े एक थैली में और गहने दूसरी थैली में रखे, या गंदे बर्तन एक जगह और साफ बर्तन दूसरी जगह रखें, या कटे हुए कागज के चौकोर और तिकोने टुकड़े को अलग-अलग करे, तो वह वर्गीकरण ही तो करते हैं। लेकिन वर्गीकरण की अवधारणा विकसित करने के लिए बच्चों को ऐसे और अनुभवों की जरूरत है। खेल इसका अच्छा माध्यम हो सकता है।

गतिविधियाँ बनाते समय ध्यान में रखी जाने वाली बातें—

i) बच्ची के लिए कोई भी कार्य आयोजित करते समय हमें यह पता होना चाहिए कि वह पहले से किन बातों से परिचित है और उसकी क्षमताएँ क्या हैं। यदि इन बातों पर ध्यान न रखा गया, तो हो सकता है कि बच्ची वह गतिविधि न कर पाए इसलिए हमें गतिविधियों को ऐसी चीजों व परिस्थितियों के इर्द-गिर्द बनाना होगा जिनसे वह घुली-मिली हो।

ii) बच्ची की क्षमताओं के बारे में कोई फैसला करने से पहले जरूरी है कि हम उसे अलग-अलग स्थितियों में देखें। हाल के शोधों से पता चला है कि स्कूलपूर्व स्तर के बच्चे कई स्थितियों में वर्गीकरण कर पाते हैं, बशर्ते कि वे परिस्थितियाँ उनके लिए सार्थक हों तथा उन्हें साफ-साफ समझ में आ जाए कि क्या करना है।

“गतिविधि बच्चे के लिए सार्थक और दिलचस्प हो।”

iii) हमें बच्चों को प्रोत्साहित करना चाहिए कि किसी गतिविधि के दौरान वे जो भी करें, उसके बारे में बातचीत करें। इससे हमें यह जानने में मदद मिलती है कि बच्चे वर्गीकरण की अवधारणा किस हद तक समझ पाए हैं। इसके जरिये उन्हें ‘समान’, ‘असमान’, ‘समूह’ का सदस्य जैसी अवधारणाएँ सीखने में भी मदद मिलेगी। ये अवधारणाएँ वर्गीकरण की बुनियाद हैं। ‘तुमने ऐसे समूह क्यों बनाए?’ या ‘इन चीजों में क्या समानता है कि तुमने इन्हें साथ-साथ रखा है?’ जैसे सवालों से उन्हें अपने विचारों को स्पष्ट करने तथा समझ को बेहतर बनाने में मदद मिलती है।

iv) शुरू की गतिविधियों में वर्गीकरण एक ही गुण के आधार पर होना चाहिए। धीरे-धीरे, जब बच्चे इस स्तर पर वर्गीकरण करना सीख जाएं तो गतिविधि को ज्यादा पेचीदा बनाया जा सकता है। तब आप दो गुणों, मसलन रंग व आकार, या आकृति व रंग, के आधार पर समूह बनाने को कह सकते हैं। कई स्कूलपूर्व बच्चों को ऐसी गतिविधियाँ कठिन लगेंगी क्योंकि इनमें वर्गीकरण एक से ज्यादा तरीके से किया जा सकता है।



चित्र 2 : वर्गीकरण की गतिविधि

आइए, अब ऐसी कुछ गतिविधियों पर गौर करें जिनके जरिये स्कूलपूर्व बच्चों को वर्गीकरण की क्षमता विकसित करने में मदद मिल सकती है।

• शुरु में आप बच्चों को तरह-तरह की सामग्री खेलने के लिए दे सकते हैं। खेलते वक्त वे अपने आप उन चीजों को 'व्यवस्थित करने' के तरीकों के बारे में सोचते हैं। हो सकता है कि उनके द्वारा किया गया 'वर्गीकरण' आपको मनमाना सा लगे पर चिन्ता की कोई बात नहीं। महत्वपूर्ण बात यह है कि उन्हें अलग-अलग तरह की सामग्री उलटने-पलटने को मौका मिल रहा है और वे उन्हें किसी-न-किसी ढंग से 'व्यवस्थित' करने की कोशिश कर रहे हैं। इस चरण में बच्चे शायद किसी एक कसौटी के आधार पर भी वर्गीकरण न कर पाएं।

• अगले चरण में आप उन्हें **कुछ परिचित चीजें** देकर उन्हें एक गुण के आधार पर समूहों में बांटने को कह सकते हैं, जैसे आकृति या रंग या सतह की बनावट, वगैरह। यह अच्छी तरह से समझाएं कि करना क्या है – “लाल रंग की सारी चीजों को एक साथ रखो।” या “इस छड़ी जैसी चीजों को एक साथ रखो।” वगैरह। हो सकता है कि शुरु में आपको समूह बनाकर दिखाना भी पड़े कि गतिविधि कैसे करनी है।

• बच्चों को तरह-तरह की पत्तियाँ/पत्थर/दालें/गेंदें देकर उन्हें समूहों में बांटने को कहा जा सकता है। समूह बनाने के लिए कसौटी स्वयं बच्चे तय करें, तथा जैसे चाहें समूह बनाएं। जब वे यह गतिविधि पूरी कर चुकें तो उनसे उनके द्वारा निर्धारित कसौटी के बारे में चर्चा करें। आप उनसे इस तरह के सवाल पूछ सकते हैं – “इन्हें साथ-साथ क्यों रखा है ?” या “इसे यहां क्यों नहीं रख देते ?”, वगैरह।

• जब बच्चे खाना खा रहे हों तब आप उनसे पूछ सकते हैं कि कौन सी चीजें मीठी हैं, और कौन सी नमकीन।

• एक ज्यादा पेचीदा गतिविधि यह हो सकती है कि आप कुछ चीजों को किसी गुण के आधार पर समूहों में बांट दें। अब बच्चों से यह पता लगाने को कहिए कि आपने कौन सा गुण चुना था।

E3) ऐसी दो और गतिविधियाँ सुझाइए जिससे बच्चों में वर्गीकरण की क्षमता विकसित करने में मदद मिल सके।

अनुक्रम बनाना

(i) चीजों को क्रम में जमाने का अर्थ होता है कि उन्हें किसी नियम के आधार पर क्रम से रखना। यह जमावट आकृति, आकार, रंग या ऐसे ही किसी भी गुण के आधार पर की जा सकती है। मसलन लाल व हरी पत्तियों को आप एक लाल, एक हरी, एक लाल के क्रम में जमा सकते हैं।

(ii) **अनुक्रम में रखना (Seriation)** क्रम जमाने का एक खास तरीका है। इसमें चीजों को किसी खास गुण (जैसे लम्बाई, आकार, वजन, वगैरह) के बढ़ते (या घटते) क्रम में रखा जाता है। उदाहरण के लिए, आप कुछ पत्थरों को वजन के आधार पर इस तरह अनुक्रम में रख सकते हैं कि सबसे भारी पत्थर सबसे पहले आए और फिर उससे कम वजन वाला, वगैरह, अन्त में सबसे हल्का पत्थर होगा।

बच्चों के लिए अनुक्रम सम्बन्धी गतिविधियाँ बनाते वक्त उनकी क्षमताओं को ध्यान में रखना होगा। जैसे, हो सकता है कि स्कूलपूर्व बच्चे तीन से ज्यादा चीजों को अनुक्रम में न रख पाएं। नीचे उदाहरण देखे—

उदाहरण 3 : चार वर्षीय बच्ची को अलग-अलग लम्बाई की चार डंडियाँ देकर कहा गया कि उन्हें लम्बाई के अनुसार क्रम में रखे। उसने पहली डंडी को अपने करीब रखा। इसके बाद उसने अगली डंडी उठाई और उसे पहली की तुलना में रख दिया। अब तक तो सब ठीक चला। तीसरी डंडी रखते वक्त उसने पहली दो को देखा और तीसरी को भी सही जगह रख दिया। अब चौथी डंडी रखते वक्त उसने पूरी जमावट को देखने की बजाय सिर्फ तीसरी डंडी को देखा। इसलिए उसके द्वारा बनाई गई जमावट चित्र 3 की तरह थी।

बच्ची तीन चीजों को अनुक्रम में रख सकती थी। लेकिन जब चौथी की बारी आई, तो इसका सम्बन्ध पहले की सारी डंडियों से नहीं जोड़ पाई। वह यह नहीं देख पाई कि यह दूसरी डंडी से लम्बी है लेकिन तीसरी से छोटी है; इसलिए इसे उन दोनों के बीच रखना होगा। तीसरी डंडी के बाद की हर डंडी को वह सिर्फ पिछली डंडी की तुलना में देखती है।

उदाहरण 3 से यह भी उभरता है कि बच्चों को दिए जाने वाले हर काम में जिन तार्किक प्रक्रियाओं की जरूरत होती है, उसकी स्पष्ट समझ हमें होनी चाहिए। खास तौर से जब बच्ची से अनुक्रम बनाने की उम्मीद करें, तो हमें पहले यह पता कर लेना होगा कि क्या वह :



चित्र 3 : तीन डंडियों के बाद यह बच्ची पूरे क्रम को न देखकर सिर्फ आखिरी डंडी को ही देखती है।

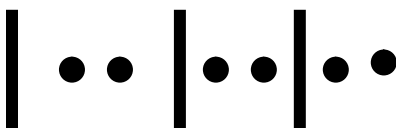
i) दो दिशाओं में क्रम जमा सकती हैं ? (मसलन, क्या वह एक साथ दो संबंध 'उससे बड़ा और उससे छोटा लागू कर सकती है ?)

ii) संक्रामकता (transitivity) के तर्क को समझ सकती है ? (यानी, अगर A, B, से बड़ा और B, C से बड़ा है, तो A, C से बड़ा होगा।

आइए अब कुछ ऐसी गतिविधियों को देखते हैं जिनका सम्बन्ध क्रम व अनुक्रम जमाने से है। यहाँ इन्हें कठिनाई के बढ़ते क्रम में दिया गया है।

- क्रम जमाने की सबसे आसान गतिविधि यह है कि बच्चों से किसी पैटर्न की नकल करने को कहा जाए। मसलन एक पंक्ति में एक चॉक, एक पेंसिल, एक चॉक व इसी क्रम में चॉक (Chalk) व पेंसिल के ढेर से वैसी ही एक और पंक्ति बनाएं।

- इससे थोड़ी मुश्किल गतिविधि यह हो सकती है कि बच्चों को किसी पैटर्न को आगे बढ़ाने को कहा जाए। जैसे कि, एक टहनी और दो मोती रखें, और इस क्रम को दो-तीन बार दोहराएं। अब बच्चों से कहें कि इसी सिलसिले को आगे बढ़ाएं।



क्रम जमाने की गतिविधि में जिस प्रश्न का उत्तर खोजना होता है, वह है 'अगला क्या आएगा?'

- कठिनाई का अगला स्तर अनुक्रम जमाने का हो सकता है। बच्चों से कहा जा सकता है कि वे दी गई चीजों को किसी गुण के आधार पर अनुक्रम में जमाएं। शुरू में तीन चीजें दी जा सकती हैं, और आगे चलकर उन की संख्या बढ़ाई जा सकती है। शुरू में शायद कुछ प्रश्न पूछकर (जैसे "सबसे छोटा कौन सा है ?" या "सबसे लम्बा कौन सा है ?") उनकी मदद करनी पड़े और यह भी समझाना पड़े कि यह कार्य कैसे करना है। यदि बच्चे चीजों को गलत क्रम में रख दे तो उनसे इस तरह के प्रश्न पूछे जा सकते हैं: "क्या A (चीज की ओर इशारा करके) C से छोटा है ?" या "यह बड़ा लगता है, इसे यहां क्यों न रख दें?" वगैरह। इससे उन्हें व्यवस्था का विश्लेषण करने में मदद मिलेगी, और संबंधित अवधारणाओं की उनकी समझ बेहतर होगी।

अनुक्रम सम्बन्धी गतिविधियाँ करते वक्त 'पहली', 'आखिरी', 'इससे पहले' जैसे शब्दों को इस्तेमाल करने से बच्चों को इन अवधारणाओं को समझने में मदद मिलती है। इन गतिविधियों से बच्चों को यह समझने में भी मदद मिलेगी कि **गुण वास्तव में सापेक्ष होते हैं** जैसे, कोई बटन किसी एक समूह में सबसे बड़ा हो सकता है, जबकि किसी अन्य समूह में सबसे छोटा इस तरह, कोई निरपेक्ष परिणाम नहीं होते।

E4) ऐसी एक-एक खेल गतिविधि सुझाइए जिनमें बच्चे आकार, वजन तथा खुरदुरेपन के आधार पर अनुक्रम जमाएं। इनके कार्यों को करते हुए वे कौन सी अवधारणाएं विकसित कर पाते हैं?

अभी तक हमने बच्चों में वर्गीकरण व अनुक्रम बनाने से सम्बन्धित क्षमताओं के विकास की गतिविधियों पर चर्चा की। आइए अब ऐसी गतिविधियों पर विचार करें जिनसे उन्हें एक-एक की संगति की अवधारणा समझने में मदद मिलेगी।

एक-एक की संगति

मान लीजिए कि आपको कुछ प्यालियाँ और तश्तरियाँ (छोटी प्लेटें) दी गई हैं और यह पता लगाने को कहा गया है कि क्या सारी प्यालियों के लिए काफी तश्तरियाँ हैं। आप कैसे पता लगाएँगे? प्यालियों और तश्तरियों की संख्या गिनकर। लेकिन अगर आपको गिनना न आता हो, तब क्या आप इस सवाल का जवाब दे सकेंगे? जरूर, एक-एक प्याली का एक-एक तश्तरी से मेल बिठाकर। इसका मतलब है कि आप प्यालियों और तश्तरियों को परस्पर **एक-एक की संगति** में रख देते हैं। यानी, जोड़ी बनाना गिनने से ज्यादा आसान है, और गिनने की क्षमता की बुनियाद है। गिनती सीखते हुए स्कूलपूर्व बच्चों के साथ आपने कई बार नीचे दी गई स्थिति से मिलती-जुलती स्थितियों का सामना किया होगा।

उदाहरण 4 : एक शिक्षक ने 10 कंचे एक कतार में रख दिए और चार वर्षीय जसवंत से उन्हें गिनने को कहा। शिक्षक ने उसे कहा कि गिनते हुए वह कंचों को छूता जाए। जसवंत ने कंचों को तीन बार गिना, और हर बार अलग जवाब आया। हो यह रहा था कि गिनते वक्त वह या तो किसी कंचे को छोड़ देता था या किसी कंचे को दो बार गिन लेता था। उसकी गिनती कुछ-कुछ निम्नानुसार थी:

•	• •	•	• • •	•	•	•
एक	दो	तीन	चार	पाँच छः	सात	आठ

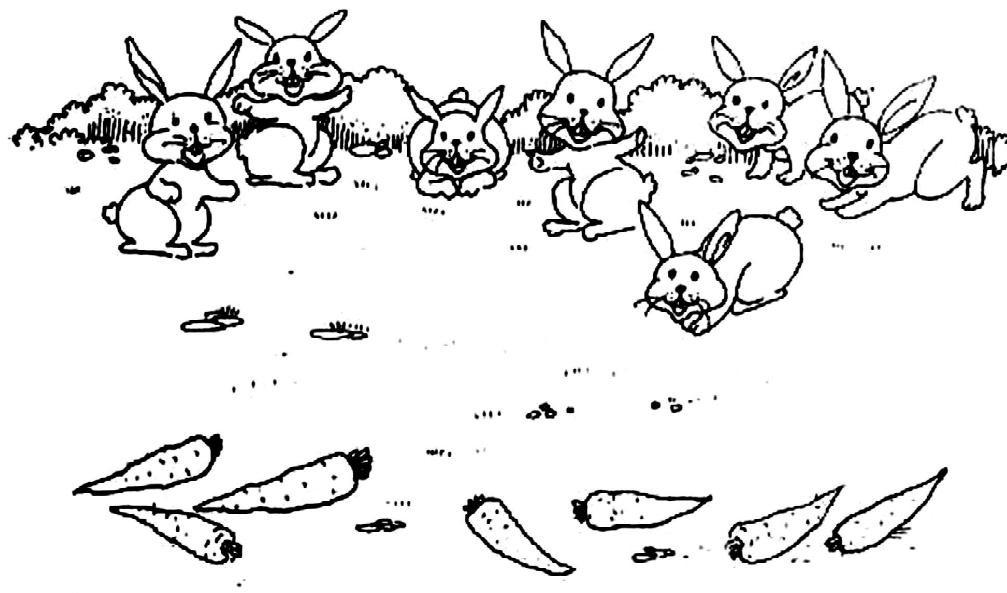
[?] आपके हिसाब से जसवंत इस तरह क्यों गिन रहा था?

जसवंत जैसे बच्चे अभी इस बात को नहीं पकड़ पाए हैं कि गिनते वक्त हर चीज को एक ही बार छुआ जाता है, किसी चीज को अछूता नहीं छोड़ा जाता और एक चीज को छूते वक्त एक ही संख्या बोली जाती है। दूसरे शब्दों में, उन्हें अभी एक-एक की संगति की अवधारणा समझना बाकी है। इस अवधारणा की समझ बनाने के लिए जरूरी है कि आप उन्हें ऐसे कई अवसर दें जिनमें वे चीजों को एक-एक की संगति में रखें। यह काम उनके गिनती को सीखने से **पहले** और उन्हें गिनती सिखाने के **दौरान** करना चाहिए।

एक-एक की संगति की समझ के अन्तर्गत बच्चों को 'बहुत सारे', 'थोड़े', 'से ज्यादा', 'से कम' और 'बराबर' जैसे शब्दों का अर्थ समझना होगा। इनके अर्थ समझने में रोजमर्रा के बहुत से अनुभवों से बच्चों को मदद मिलती है — जैसे कई बार उन्हें यह देखना पड़ता है कि क्या सब लोगों को खाना खिलाने के लिए काफी

थालियाँ है, या जब वे दोस्तों के साथ मिठाई का बंटवारा करते हैं, वगैरह। हमें इन अनुभवों को और विस्तार देने की जरूरत है। **कुछ गतिविधियाँ—**

- बच्चों की एक कतार बनाकर बच्चे से कहिए कि वह उतनी ही तीलियों की एक कतार बनाए।
- बच्चे से कहिए कि वह उतनी पत्तियाँ (या फूल या मोती) इकट्ठे करे जितने कि समूह में कुल बच्चे हैं।
- आप एक समूह खरगोशों का और एक समूह गाजर का बना दें (चित्र 4 देखिए)। अब बच्चे से कहें कि वह एक-एक खरगोश को एक लाइन के जरिये एक-एक गाजर से जोड़ दें।



चित्र 4

ऐसी गतिविधियों से बच्चे यह देख और समझ पाएंगे कि एक-एक की संगति का अर्थ क्या है।

गतिविधि जो भी हो, यह जरूरी है कि उस दौरान बच्चों को उसके बारे में बात करने को प्रोत्साहन किया जाए। बच्चों से इस तरह के प्रश्न पूछें कि “क्या जितने बच्चे हैं, उतनी ही पत्तियाँ भी हैं?” या “पत्तियाँ ज्यादा या मोती?”, आदि। इस तरह के प्रश्नों से बच्चों की समझ बेहतर बनाने में मदद मिलती है।

E5) बच्चों को ‘एक जितना’ और ‘एक-एक की संगति’ समझाने के लिए एक-एक गतिविधि बनाइए। अपने पड़ोस के बच्चे/ बच्चों पर इन्हें आजमाइए और अपने अवलोकन लिखिए।

इन गतिविधियों से हम बच्चों में वर्गीकरण, क्रमबद्ध करने और एक-एक की संगति बनाने की अवधारणाएं विकसित की जा सकती हैं। इन गतिविधियों के आयोजन में सावधानी बरतनी बहुत जरूरी है। वरना हम अनजाने में बच्चों में गलत धारणा पैदा कर देंगे, जैसा कि नीचे दिए गए उदाहरण में हुआ।

‘उतना ही लम्बा जितना’ की बात करते हुए डॉली की शिक्षक हर बार तुलना के लिए एक छड़ का इस्तेमाल करती थी। नतीजा यह हुआ कि ‘बराबर की लम्बाई’ की अवधारणा डॉली के दिमाग में उस छड़ से जुड़ गई और वह यह मानने लगी कि ‘बराबर की लम्बाई’ की बात सिर्फ उस जैसी छड़ पर ही लागू होती है।

इसलिए जरूरी है कि किसी अवधारणा को समझाते वक्त हम जितनी ज्यादा हो सके उतनी गतिविधियाँ, तरह-तरह की सामग्री के साथ बनाएं ताकि बच्चे अवधारणा की सही समझ बना सकें और उसे व्यापक कर सकें। बतौर उदाहरण, बच्चों को यह अवसर दीजिए कि वे 'बराबर की लम्बाई' की बात को तीलियों, पेंसिलो, फीता, चम्मच, रस्सी जैसी अलग-अलग चीजों के संदर्भ में और अलग स्थितियों में देख सकें। तब इन सारे अनुभवों में से वे 'बराबर की लम्बाई' का अर्थ निकाल पाएंगे।

एक बात और कि कई बार बच्चे समझ सकने की क्षमता की कमी की वजह से नहीं, बल्कि भाषा को न समझ पाने की वजह से कुछ गतिविधियाँ नहीं कर पाते हैं।

जहाँ तक हो सके ऐसी सरल भाषा और जुमलों का इस्तेमाल करें, जिनसे बच्चे परिचित हों।

E6) भाषा को न समझ पाना बच्चे द्वारा कोई कार्य किए जाने में कैसे रुकावट बन जाता है, इस बात को दर्शाने के लिए कोई उदाहरण दीजिए।

E7) वर्गीकरण की एक गतिविधि में शिक्षक ने बच्चों को गोल व चौकोर बटन दिए। सारे गोल बटन जामुनी रंग के थे जबकि सारे चौकोर बटन काले थे। अब शिक्षक ने एक गोल बटन उठाया और बच्चों से कहा कि वे बटनों के ढेर में से सारे गोल बटन उठा लें।

(क) क्या इस गतिविधि में कोई गलती है? यदि हां, तो क्या?

(ख) क्या शिक्षक पक्के तौर पर कह सकेंगे कि जिन बच्चों ने सही तरीके से गतिविधि पूरी कर ली है, वे गोलाकार की अवधारणा समझ गए हैं?

(ग) आप इस गतिविधि को कैसे बदलेंगे?

E8) गिनने के दौरान कौन-कौनसी अलग प्रक्रियाओं से गुजरना पड़ता है उदाहरण के माध्यम से स्पष्ट करें।

E9) शिक्षक ने कक्षा 2 के एक बच्चे को पांच चॉकलेट दिखाया फिर उन्हें बच्चे के सामने एक लाइन में रख दिया। अब पहले चॉकलेट की ओर इशारा करके बोले "एक" दूसरे की ओर इशारा करके बोले "दो" इसी क्रम में आगे बढ़ते हुए पांचवे चॉकलेट की ओर इशारा करके बोले पांच। इसके बाद बच्चे से तीन चॉकलेट देने को कहा। बच्चों ने पंक्ति में से तीसरे चॉकलेट उठाकर दे दिया। आपके विचार से शिक्षक के समझाने में कहां कमी रह गई एवं इसे कैसे दूर किया जा सकता है?

अब ऐसे कुछ तरीकों पर बातचीत करें जिनसे बच्चों को गिनती सीखने में मदद मिल सके।

गिनती से परिचय

हम सब जानते हैं कि गिनने का मतलब क्या होता है! आप इस बात से भी सहमत होंगे कि संख्याओं के नाम रट लेने का यह अर्थ नहीं होता कि बच्चे को संख्या की अवधारणा समझ आ गई हो, या उसे गिनना आता है। यहाँ तक कि अगर कोई बच्ची अंक लिख पाए, तो भी यह जाहिर नहीं होता है कि उसे गिनती करना आता है।

उदाहरण 5: चार वर्षीय मरिअम्मा संख्याएं बोल रही थी — कुछ गिनती क्रम में, तो कुछ जो भी संख्या याद आ गई। उसकी चाची पास ही बैठी थी। उन्होंने मरिअम्मा से पूछा, "क्या तुम 'दो' लिख सकती हो?" मरिअम्मा ने हां कहा, और निम्नानुसार लिख दिया:

चाची ने पूछा कि यह साथ में क्या बनाया है तो मरिअम्मा ने जवाब दिया, "बत्तख।" जब पूछा गया कि

बत्तख क्यों बनाए, तो मरिअम्मा ने जवाब दिया,—“किताब में दो ऐसे ही लिखा है।” चाची ने जब लिखकर पूछा कि क्या यह ‘दो’ है, तो मरिअम्मा का जवाब था “नहीं”।

जाहिर है कि मरिअम्मा को इस बात की बिल्कुल समझ न थी कि “दो”, दो चीजों के किसी भी समूह पर लागू हो सकता है। तब क्या हम कह सकते हैं कि उसे संख्या पता है ? वैसे तो वह 1 से 10 तक की संख्याएं लिख सकती है।

2 ○ ○

‘2 ❀ ❀’

बच्चों में गिनती या गिनने की क्षमता विकसित करने में जिस चीज से सचमुच मदद मिलती है, वह है **वास्तविक चीजों की गिनती**। बच्चे को दो पत्तियाँ, दो पेंसिलें, दो किताबें दिखाकर, दो बार ताली बजाकर या इसी तरह की गतिविधियों से ‘दो’ का अर्थ समझने की कोशिश करने दें। हर बार शब्द ‘दो’ पर जोर दें। इन विविध अनुभवों से बच्चे धीरे धीरे समझेंगे कि दो—दो चीजों के इन सारे समूहों में एक बात समान है, और वह है समान ‘दो’ का गुण।



चित्र 5 : अब मेरे पास दो बिल्लियाँ हैं।

इस तरह से हम उन्हें पांच तक की संख्याएं सिखा सकते हैं। **कोई जरूरी नहीं कि संख्याएं आम क्रम में ही सिखाई जाएं**। मसलन, बच्चे इन संख्याओं को ‘एक’, ‘पांच’, ‘तीन’, ‘चार’, के क्रम में सीख सकते हैं। संख्याओं का परम्परागत क्रम वे बाद में सीख सकते हैं। इससे उन्हें छोटी और बड़ी संख्याओं की समझ बनाने में मदद मिलेगी। इस बार हम उनसे ऐसे प्रश्न पूछ सकते हैं : “मेरे पास कितने कंचे हैं ?”, “मैं कितनी बार कूदी ?”, “कौन से चार बच्चे बोर्ड पर आएंगे ?”, वगैरह।

लेकिन **एक चेतावनी!** बच्चों को दिखाने के लिए गिनते वक्त हम अक्सर एक—एक को छूते हुए ‘एक, दो, तीन’, वगैरह कहते जाते हैं। वे देखते हैं कि आप इन चीजों को छू रहे हैं और हर चीज के लिए एक नया शब्द बोल रहे हैं। हो सकता है कि वे एक, दो, तीन, आदि, उन चीजों के नाम हैं, जैसा कि ऊपर दिए गए उदाहरण 5 में हुआ था। हम बच्चों को यह कभी नहीं समझाते कि दूसरी चीज को ‘दो’ इसलिए कहते हैं कि क्योंकि हम वास्तव में दो चीजों के एक समूह की बात कर रहे हैं — एक चीज जो हमने पहले छुई थी और एक वह जिसे अब छू रहे हैं। चूंकि हम इस बात को समझते हैं, इसलिए हम मानकर चलते हैं कि बच्चे भी इसे समझ गए हैं। दरअसल हमें तो आभास तक नहीं होता कि बच्चे चक्कर में पड़ रहे हैं।

इस भ्रम से बचने का तरीका यह है कि अलग—अलग अवसरों पर अलग—अलग की चीजों या क्रियाओं को गिनने का अभ्यास करवाया जाए। हम यह भी कर सकते हैं कि पहली चीज को छूकर कहें, “यह एक पत्ती हुई”, और इसके बाद पत्ती को अलग रख दें। फिर दूसरी पत्ती को उठाकर पहली के साथ रख दें और कहें एक और पत्ती है, यानी अब ये दो पत्तियाँ हो गईं।” इसी तरह आगे बढ़ें। इस तरह अभ्यास तीलियों, गेंदों, पत्थरों, आदि कई चीजों के साथ किए जाने चाहिए। यह क्रियाओं के साथ भी किए जा सकते हैं। जैसे आप एक दफा ताली बजाकर कहें, एक बार ताली बजाई।” फिर दो बार ताली बजाकर कहें, “अब मैंने दो बार ताली बजाई।” इस तरह से जाहिर हो जाता है कि संख्या के नाम का संबंध उस वस्तु या क्रिया से न होकर उस समूह के आमाप से है जिसे हमने अलग किया है। इससे बच्चे को यह समझने में भी मदद मिलती है कि संख्याओं का एक क्रम होता है आने वाली हर संख्या, पिछली से एक ज्यादा होती है।

संख्याओं के संदर्भ में एक और पहलू है जिसे ध्यान में रखना जरूरी है। गिनती सिखाने के लिए चीजों का इस्तेमाल करते वक्त हम चीजों को हर बार एक खास पैटर्न में जमा देते हैं। मसलन, हम ज्यादातर दो कंचों को ऐसे •• तीन कंचों को ऐसे ••• और चार कंचों को ऐसे •••• रखते हैं हो सकता है कि बच्चे को यह

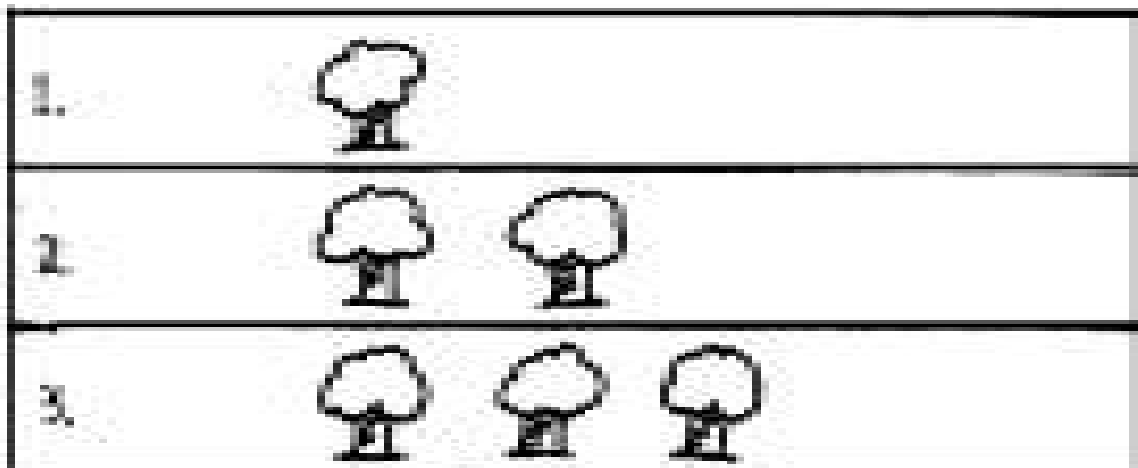
गलतफहमी हो जाए कि दो, तीन चार आदि का सम्बन्ध चीजों की उस खास जमावट से है। और इस तरह हो सकता है कि बच्ची ••• को दो कंचे बताए। यदि हम **जमाने के तरीकों को बदलते रहें**, तो इस समस्या से बच सकते हैं। तीन चीजों दिखाते समय कभी उन्हें एक पंक्ति में तो कभी तिकोनी जमावट में रखा जा सकता है। इसी प्रकार से चार चीजों को कई तरह से रखा जा सकता है:



E10) एक महिला अपनी तीन वर्षीय बच्ची को 1 से 5 तक गिनती सिखा रही थी। इसके लिए वह बच्चों की अंक सम्बन्धी किताब का इस्तेमाल कर रही थी। इस किताब में हर संख्या के सामने उतने ही पेड़ बने हुए थे,

मां किसी संख्या और उसके सामने बने पेड़ की ओर इशारा करती और संख्या का नाम बोल देती। बच्ची मां के शब्दों को ज्यों का त्यों दोहरा देती। कुछ दिनों बाद जब बच्ची से कहा गया कि किताब में चार बताए तो उसने सही-सही बता दिया।

क्या उस बच्ची ने एक से पांच तक की संख्याओं का अर्थ समझ लिया है? इस तरीके से सीखाने में क्या समस्याएं हैं?



अभी तक हमने बच्चों को प्राकृतिक संख्याएं सिखाने की चर्चा की। आप उन्हें 'शून्य' का अर्थ कैसे सिखाएंगे? क्या आप इसके लिए मेरे शिक्षक का अनुकरण करेंगे, जिन्होंने शून्य का अर्थ 'कुछ नहीं' के रूप में बताया था? वे कहते थे, "यदि तुम्हारे पास पांच गोलियां हैं, और तुम सारी खा जाओ, तो तुम्हारे पास कुछ नहीं बचेगा। वही शून्य है।" लेकिन इस तरह से बच्चे बहुत चक्कर में पड़ जाते हैं जब उनके सामने 0° सेल्सियस या किसी पैमाने पर बना 'शून्य' का निशान आता है। इसलिए बेहतर होगा कि बच्चों को शून्य का अहसास भी उसी तरह अलग-अलग ठोस वस्तुओं के साथ करने दिया जाए, जैसा कि अन्य संख्याओं के लिए किया था। जैसे, आप तीन पेंसिलें ले कर उनमें से एक हटा दें, दो बचीं; एक और हटा दें, एक बची; एक और हटा दें, शून्य पेंसिलें बचीं। इससे उन्हें पता चलेगा कि **किसी चीज का शून्य होने का मतलब है 'कुछ नहीं'**। यानी, **शून्य का मतलब 'कुछ नहीं' सिर्फ तब होता है, जब उसे एक विशेषण के रूप में इस्तेमाल किया जाए।**

लेकिन एक संख्या के रूप में शून्य किसी भी अन्य संख्या की तरह एक संख्या है। बच्चों में यह विचार ठीक से बैठाने के लिए कि शून्य का मतलब 'कुछ नहीं' नहीं होता, आप संख्या-रेखा (number line) की मदद से कई खेल आयोजित कर सकते हैं। यह संख्या-रेखा फर्श पर बनाई जा सकती है, और इस पर किसी भी बिन्दु को 'शून्य' कहा जा सकता है। तब शून्य के आधार बिन्दु 1, 2, 3, वगैरह, हो जाएंगे। अब बच्ची तीन बार आगे की ओर कूदे और एक बार वापिस उल्टा कूदकर 2 पर आ जाए; एक बार और उल्टा कूदे और 1 पर आ जाए; फिर एक बार कूदकर शून्य पर आ जाए। इस खेल को कई तरह से खेलकर, और अन्य खेलों की मदद से बच्चों को यह समझने में मदद मिलेगी कि शून्य का मतलब 'कुछ नहीं' नहीं होता।

E11) आप बच्चों का परिचय शून्य के प्रतीक से कब कराएंगे – जब वे अवधारणा को समझ चुके हों या जब आप अवधारणा समझाना शुरू कर रहे हों?

हम में से ज्यादातर लोग बच्चों को शून्य से परिचित कराने के लिए ठोस वस्तुओं के बात समझाने की जगह बात समझाने की बजाय सिर्फ '0' को बोर्ड पर लिख देते हैं, और सोचते हैं कि वे शून्य का मतलब और चिन्ह समझ गए हैं। हमें यही तरीका ज्यादा आसान लगता है। दरअसल बच्चे को किसी संख्या से परिचित कराने के लिए उसका संख्यांक (number) (यानी प्रतीक) बोर्ड या कागज पर लिख देने के हम आदी हो चुके हैं। बच्चे यह सोचें कि 'दो' का सम्बन्ध 2 की आकृति से है, और यह न समझ पाये कि 2 का संकेत दरअसल दो की अवधारणा को प्रदर्शित करने का एक मनमाना तरीका है। इसलिए बेहतर यही है कि अंक तभी सामने लाए जाएं जब बच्चों में संख्या की कुछ समझ बन चुकी हो। जैसे, जब आप बच्चे को 4-4 चीजों के कई समूहों का अनुभव करा चुके हों और वह आपको चार चीजें (जैसे चार कंचे) दिखा सके, तब आप बोर्ड (या कागज) पर 4 लिख सकते हैं। इस तरह से बच्चे पहले अंकों को पहचानना सीखते हैं। पहचान हासिल हो जाने के बाद ही बच्चों से अंक लिखने को कहना चाहिए।

जब बच्चे अंकों से परिचित हो जाएं तो आप उन्हें दिखा सकते हैं कि ये प्रतीक कितने मनमाने तरीके से चुने गए हैं। इसके लिए आप उन्हें पुराने और नए जमानों के अलग-अलग अंक-पद्धतियों में प्रतीक दिखा सकते हैं (सारणी 1)। सारणी 1 : विभिन्न अंक-पद्धतियाँ

E12) बच्चों को गिनती सिखाने के संबंध में हमने कई सुझाव दिए, जिनमें से कुछ नीचे लिखे हैं। क्या आप संक्षेप में बता सकते हैं कि इन सुझावों के पीछे क्या समझ काम कर रही है?

अंक	1	2	3	4	5	10
संस्कृत	१	२	३	४	५	१०
ग्रीक	I	II	III	IV	V	X
रोमन	I	II	III	IV	V	X

- i) बच्चों को संख्या सिखाने के लिए विभिन्न परिचित वस्तुओं का इस्तेमाल करना चाहिए।
- ii) बच्चों के सामने संख्याओं के मान पहले विशेषण के रूप में हो न कि संज्ञा के रूप में।
- iii) बच्चों को संख्यांक तभी सिखाने चाहिए जब उन्हें ठोस चीजें गिनने का काफी अनुभव हो जाए।
- iv) शून्य का मतलब 'कुछ नहीं' नहीं होता।

अभी तक हमने ऐसे विभिन्न तरीकों की चर्चा की जिनसे बच्चों को संख्या की अवधारणा तथा गिनने की क्षमता हासिल करने में मदद मिलेगी। ये तभी कारगर होंगे जब आप बच्चों को अवधारणाएं व कौशल हासिल करने के लिए काफी समय देंगे।

सारांश

इस इकाई में हमने निम्न बिन्दुओं पर चर्चा की—

1) 'गिनती करने' के अर्थ पर चर्चा की और यह स्पष्ट किया कि गिनने का मतलब संख्याओं के नामों को बोल पाना भर नहीं है।

2) इस बात पर चर्चा की कि गिनती सीखने से पहले व सीखने के दौरान बच्चे के लिए कई संख्या-पूर्व अवधारणाएं (जैसे वर्गीकरण, अनुक्रम में रखना, एक-एक की संगति जमाना) सीखना जरूरी होता है।

3) संख्या-पूर्व अवधारणाओं को विकसित करने के लिए गतिविधियों के सुझाव दिए।

4) बच्चे को गिनती सिखाने के तरीके सुझाए।

5) इस बात पर जोर दिया कि 0 से 9 तक की संख्याओं के प्रतीक बच्चे को तभी बताए जाएं जब उसे उन संख्याओं के अर्थ समझ आ चुके हों।

पाठ—5

इकाई दहाई और आगे

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - बुनियादी समझ
 - संक्रियाएँ लगाने में दिक्कतें
 - स्थानीय मान क्या है?
- सारांश

परिचय

हमारा सामना प्रायः ऐसे बच्चों से होता रहता है जो सैकड़ा, दहाई, इकाई से आसानी से नहीं निपट पाते, हालांकि अपने हिसाब से वे इस अवधारणा को 'सीख' चुके होते हैं। उदाहरण के लिए मेरे उस मित्र की ही बात लीजिए जिसे विभिन्न ग्रामीण व कस्बाई स्कूलों में कक्षा 6 व 8 के बच्चों से मेलजोल का काफी अनुभव है। ऐसे कई मौके रहे हैं जब यह संवाद सैकड़ा, दहाई, इकाई को लेकर हुआ है। उसने देखा कि इन कक्षाओं के बच्चे 5 अंक की संख्या को नहीं पढ़ पाते जबकि हमारे हिसाब से उन्हें ऐसी संख्याओं का 'ज्ञान' होना चाहिए। जब उनसे पूछा गया कि संख्या 20013 में 2 किस संख्या को दर्शाता है तो जवाब 2 सैकड़ा, 2 हजार 2 लाख और 2 करोड़ तक बताया गया। जाहिर था कि उन्हें इस बात का कोई भान नहीं कि संख्या में किसी अंक का स्थान क्या मान दर्शाता है। हाँ, एक बार थोड़ा सा इशारा भर मिल जाए तो वे तुरन्त ठीक उत्तर निकाल लेते थे।

समझ की यह कमी जोड़ने व घटाने के सवालों को हल करते वक्त भी झलकती है। जोड़ के सवालों में उन्हें बस इतना ख्याल रहता है कि जोड़ कॉलमवार किया जाता है। क्यों? क्योंकि शिक्षक ऐसा कहते हैं। और जब उन्हें 3—3, 4—4 अंको की संख्याओं का जोड़ करने को कहा जाता है, तो वे अक्सर जवाब के अंक गलत कॉलम में लिख देते हैं। ऐसा करने पर, हमारे हिसाब से, असामान्य या असंभावित उत्तर निकल आते हैं। हाँ, बच्चे ऐसा नहीं सोचते हैं।

इस सबसे हम बहुधा हताश हो जाते हैं। हम पढ़ाने की कोशिश छोड़ देते हैं, और या तो बच्चों को डांटने लगते हैं या उन्हें 'मूर्ख' और बुद्धू कहने लगते हैं। इसके बजाय क्या यह बेहतर नहीं होगा कि हम अपने आप से पूछें कि क्या हमने वाकई यह समझने की कोशिश की है कि बच्चे क्यों नहीं समझ पाते? शायद उन्हें पर्याप्त गतिविधियाँ न

मिल पाई हों कि वे सम्बंधित अवधारणाओं को अच्छी तरह से समझ पाएं। या यह भी मुमकिन है कि हम खुद, जो उन्हें सिखाने की कोशिश कर रहे हैं, उन अवधारणाओं को ठीक से समझ न पाए हों?

हमने इस पाठ में इन्हीं समस्याओं को लिया है। आप इन समस्याओं को गहराई से समझ पाएंगे, और यह भी देख पाएंगे कि इसका कोई एक समाधान नहीं है।

इस पाठ को पढ़ने से आप में इतना आत्मविश्वास व दिलचस्पी पैदा हो जाएगी कि आप दशमलव प्रणाली में स्थानीय मान की अवधारणा सिखाने के नए तरीके आजमा सकें।

उद्देश्य

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप

- इकाई, दहाई व सैंकड़े की समझ विकसितकरने के लिए सीखने वाले के लिए अलग-अलग तरह की गतिविधियां बना सकेंगे।

- सीखने वाले की इकाई, दहाई, सैंकड़े की समझ का परीक्षण कर सकेंगे।

- स्थानीय मान की समझ व विस्तारित रूप के लिए गतिविधियों को बना पाएंगे।

समझ बढ़ाना

एक दिन मैं अपनी 7 वर्षीय भतीजी को बच्चों की एक किताब '203 बिल्लियां' दिखा रही थी। उसने हाल ही में स्कूल में बड़ी संख्याओं को लिखना सीखा था। उसने काफी आत्मविश्वास के साथ किताब का शीर्षक देखा और पढ़ा तेईस बिल्लियां। मैंने उससे शीर्षक को फिर से देखकर पढ़ने को कहा। उसने एक बार फिर 203 को तेईस पढ़ा। तब मैंने एक कागज़ पर 213 लिखकर उसे पढ़ने को कहा। इसे उसने सही-सही दो सौ तेरह पढ़ दिया। तो वह 203 को सही क्यों नहीं पढ़ पाई थी? दिक्कत कहां थी? क्या यह मुमकिन है कि उसने कभी इस बात का ख्याल ही न किया हो कि संख्यांक में किसी अंक के स्थान का क्या महत्व है? या क्या समस्या का सम्बंध उसकी शून्य की समझ से है?

इन सवालों का जवाब पाने के लिए शायद हमें पीछे लौटकर यह देखना चाहिए कि मेरी भतीजी के शिक्षक ने उसे संख्यांक लिखना – पढ़ना कैसे सिखाया था।

उदाहरण 1 : पहली कक्षा में शिक्षक ने बोर्ड पर अंक 0, 1.....,9 लिखे थे। इसके बाद उन्होंने सभी बच्चों से प्रत्येक अंक से सम्बंधित संख्या के नाम दोहराने को कहा था। और आखिर में उन्होंने सभी बच्चों से होम वर्क पुस्तिका में कई बार ये अंक लिखवाए थे।

इसके कुछ महीने बाद शिक्षक ने उन्हें दो अंक वाली संख्याएं सिखाना इस तरह शुरू किया। सबसे पहले उन्होंने बच्चों को एक अंक वाली संख्याएं याद दिलाई। इसके बाद उन्होंने बोर्ड पर लिखा –

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

उन्होंने जो भी लिखा था, बच्चों ने उसे ठीक वैसे ही उतार लिया। अब शिक्षक ने एक – एक संख्यांक की ओर इशारा करते हुए संख्याओं के नाम बोलना शुरू कर दिया। आखिर में उन्होंने बच्चों से हरेक संख्यांक पांच – पांच बार लिखवाई। साथ में कहती गई, 1 के साथ 0 लिखो दस, 1 के साथ 1 लिखो ग्यारह, ...1 के साथ 9 लिखो, उन्नीस।

थोड़े और अभ्यास के बाद वे संतुष्ट हो गई कि बच्चे 1 से 100 तक की संख्यांक जानते हैं। अगले साल इसी तरह से बच्चों को सिखाया गया कि 101 से 1000 तक की संख्याओं को कैसे दर्शाये। दूसरी कक्षा की शिक्षक ने उन्हें यह भी बताया कि यदि वे उन्हें कोई संख्या, जैसे एक सौ बावन, लिखने को कहें, तो पहले वे अपनी कापी में सै. द. इ. लिखें (चित्र 1 में है।) उन्होंने सहज ही समझा दिया कि यहां सै. द. इ. का अर्थ सैकड़ा, दहाई, इकाई होता है। चूंकि एक सौ बावन में एक सैकड़ा, पांच दहाई, और दो इकाई हैं, इसलिए बच्चे सै., के नीचे 1, द. के नीचे 5 और इ. के नीचे 2 लिखें।

इसके बाद शिक्षक ने उन्हें दो व तीन अंकों की संख्याएं लिखने की काफी कवायद करवाई।

सै.	द.	इ.
1	5	2

चित्र – 1

आखिर में, उसने बच्चों को संख्यांक में किसी अंक का स्थान और स्थानीय मान का मतलब बताया। शिक्षक ने ब्लैकबोर्ड पर कुछ उदाहरण देकर इसे समझाया (उदाहरण के लिए, 427 में 4, 2 और 7 के स्थानीय मान क्रमशः 4×100 , 2×10 और 7×1 हैं।) इसके बाद बच्चों को निम्नलिखित किस्म के सवाल गृहकार्य (Homework) के लिए दे दिए :

251 में कितनी दहाई हैं?

ज्यादातर बच्चों का जवाब था 5, मगर एक बच्चे ने कहा 25 हैं।

[?] आपके ख्याल से जवाब में ये अलग – अलग अन्तर क्यों आए होंगे?

हममें से कई लोग इकाई, दहाई, सैकड़ा की अवधारणा काफी मशीनी ढंग से सिखा देते हैं। इस तरीके से सिखाए जाने पर बच्चे कह देते हैं कि 251 में 5 दहाई हैं। जबकि हमें थोड़ा गहराई में जाकर, कुछ ठोस गतिविधियों के इस्तेमाल से बच्चों को याद दिलाना चाहिए कि आखिरकार एक सैकड़ा भी 10 दहाई के बराबर होता है। तभी वे यह समझ पाएंगे कि 251 में 25 दहाई हैं।

E1) ऊपर दिए गए तरीके से सिखाए जाने के बाद एक बच्ची 203 को तेईस पढ़ती है। उसे अपनी गलती का एहसास कराने के लिए आप क्या गतिविधियां सुझा सकते हैं?

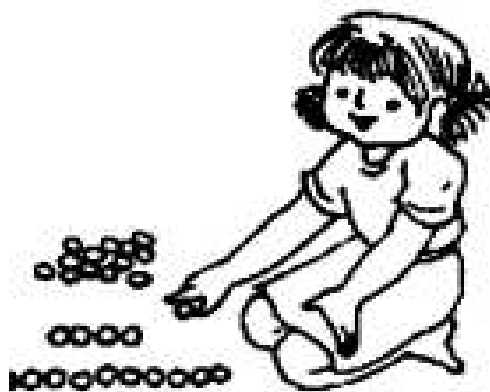
मैंने सोचा कि अपनी भतीजी को उसी तरह अंक पद्धति समझाऊँ जैसे कि मेरे मित्र ने अपने बच्चों को समझाया था।

संख्यांक (Numeral) किसी संख्या को दर्शाने का लिखित संकेत है। मसलन 25 या XXV दोनों ही संख्यांक हैं जो एक ही संख्या को दर्शाते हैं।

उदाहरण 2 : मैंने अपनी भतीजी को ढेर सारे मोती दिए और दिखाया कि उससे वह 10-10 मोतियों के समूह कैसे बनाए। फिर मैंने उसे दिखाया कि वह 10 मोतियों के एक समूह को एक पंक्ति में रख सकती है और उन्हें एक लड़ी कह सकते हैं। जब वह कुछ लड़ियां बना चुकी तो मैंने उसे बताया कि 10 लड़ियों की एक माला बन सकती है।

उसने मोतियों से लड़ियां और मालाएं बनाना शुरू किया और धीरे-धीरे अपने दिमाग में माला व लड़ी का आपसी सम्बंध भी बनाती गई। थोड़ी देर बाद मैंने उससे पूछा कि एक माला के बदले वह कितनी लड़ियां देगी। कुछ देर वह सोचकर बोली, “10”

तब मैंने उससे पूछा कि 107 मोतियों से वह कितनी मालाएं बना सकती है। उसने कुछ देर सोचने के बाद कहा, “10 लड़ियां, और 7 मोती बचेंगे।” मैंने पूछा, “तो मालाएं कितनी बनेंगी?” उसकी मदद के लिए मैंने उससे 107 मोती लेकर अधिक से अधिक जितनी मालाएं बन सकें, बनाने को कहा। शर्त यह है कि एक माला में 10 लड़ी हों और हर लड़ी में 10 मोती हों। उसने मोती लिए और 1 माला बनाई, व 7 मोती बच गए।



फिर मैंने उससे पूछा कि इस बात को वह लिखेगी कैसे। हम दोनों ने मिलकर एक पद्धति बनाई जिसमें हमने मा./ल./मो. लिख लिया – मालाओं की संख्या मा. के नीचे, लड़ियों की संख्या ल. के नीचे तथा मोतियों की संख्या मो. के नीचे लिखना था। मा. के नीचे उसने 1 लिखा और मो. के नीचे 7 लिखा। मैंने पूछा, “लड़ियों की संख्या का क्या होगा?” उसने जवाब दिया, “लड़ियां तो हैं ही नहीं।” तो मैंने उससे पूछा कि इस बात को कैसे दर्शाएंगी। थोड़ी देर सोचने के बाद ल. के नीचे उसने 0 लिख दिया।

चित्र 2 : दस दस और एक एक के समूहों में गिनना

(नोट : बच्चे कई बार अंक में 0 नहीं लिखते क्योंकि वे सोचते हैं कि 0 तो ‘कुछ नहीं’ दर्शाता है इसलिए लिखने की क्या ज़रूरत है।)

अब मैंने मा. ल. मो. के ऊपर सै. द. इ. लिख दिया, और उससे पूछा कि क्या यह ठीक है? उसने थोड़ा सोचा और फिर कहा कि ठीक है क्योंकि 100 मोतियों की एक माला है और 10 मोतियों की एक लड़ी। मैंने कहा “बढ़िया ! और अब बताओ 325 कितना होगा?” उसने फौरन जवाब दिया, “3 माला 2 लड़ी 5 मोती” तो ये कितने मोती होंगे “तीन सौ पच्चीस”, उसका जवाब सही था।

इस तरह के चन्द और सवालों के बाद हमने एक खेल खेला । मैंने उसे 3 अंक दिए । उसे करना यह था कि उनकी मदद से जितनी संख्याएं बना सके बनाए । इन संख्याओं को घटते क्रम में रखना भी था । जब मुझे लगा कि उसे इस खेल में मजा आ रहा है, तो मैंने 4 अंक दे दिए । उसने इनकी मदद से सारी संभव संख्याएं बना डालीं । यहां तक कि 0,1,2, व 9 अंक देने पर उसने 0129 जैसी संख्या भी बनाई । मुझे एहसास हुआ कि ऐसी बातों को सीखने के लिए बच्चों को पूरा समय दिया जाना चाहिए । उन पर कोई दबाव नहीं होना चाहिए । और यह एक अच्छा मौका था कि वह यह सब कर सके ।

अतः यह जरूरी है कि बच्चे को किसी अवधारणा के इस्तेमाल का मौका बार-बार दिया जाए । क्योंकि हो सकता है कि किसी एक वक्त पर बच्ची उस गतिविधि को कर पाए । मगर इससे यह नहीं मान लेना चाहिए कि वह इसे बाद में भी दोहरा पाएगी । इसलिए मैंने हफ्ते – दस दिन बाद यह गतिविधि, तथा इसी मकसद से दूसरी गतिविधि, उसके साथ दोहराई । इस दौरान मैंने उसे कई ऐसे अभ्यास दिए जिनसे उसे सै. द. इ. के उपयोग का मौका मिल पाए ।

E2) उदाहरण 1 और 2 में सै. द. इ. पढ़ाने के तरीकों की खूबियां और कमियां क्या हैं?

E3) क) बच्चों को सै. द. इ. का अभ्यास करवाने के लिए एक और गतिविधि सोचिये । खासकर ऐसी गतिविधि सोचिये जिसके दौरान बच्चे ऐसे संख्याओं से सामना करें, जिनके एक या ज्यादा अंक हों ।

ख) अपनी गतिविधि की तुलना मेरे द्वारा की गई गतिविधि से कीजिए । कौन सी बेहतर है, और क्यों?

E4) एक ऐसी गतिविधि सुझाइए जो 50 बच्चों की एक कक्षा में सै. द. इ. को सिखाने के लिए उपयोगी हो । गतिविधि ऐसी संख्याओं को लेकर हो जिनमें कम से कम एक अंक शून्य हो ।

हमें याद रखना जरूरी है कि आम तौर पर स्थानीय मान की अवधारणा बच्चे थोड़ी देर से सीखते हैं । यह समझ तब विकसित होती है जब बच्चे अंकगणितीय संक्रिया लागू करने में बेहतर होने लगते हैं । हमें यह बात भी पहचानना चाहिए कि यह समझ बहुत साफ नहीं होती, और न ही ऐसा होना जरूरी है ।

संक्रियाएं लागू करने से सम्बंधित दिक्कतें

जोड़-घटा की दिक्कतों के संदर्भ में हम कुछ लोग कक्षा 4 के बच्चों की परीक्षा ले रहे थे । हमने उन्हें कुछ सवाल ऐसे दिए जो आड़े लिखे हुए थे, और कुछ सवाल खड़े लिखे हुए थे । कुछ जोड़ के सवालों में 'हासिल' आता था, जबकि घटाने के सवालों में उधार लेना पड़ता था ।

बच्चों की उत्तर पुस्तिकाएं देखने पर हमें कुछ ऐसी बातें पता चलीं जिनकी उम्मीद नहीं थी । जिन बच्चों ने सभी सवालों के सही उत्तर लिखे थे, उनके बारे में हम कुछ भी नहीं सीख पाए । जिन बच्चों ने सारे सवाल या लगभग सारे सवाल, गलत किये उनके बारे में हम यही कह सके कि उन्हें ठोस वस्तुओं की मदद से जोड़-घटा फिर से सीखने की जरूरत है । लेकिन जिन बच्चों ने कुछ सवालों में गलती की थी, उनके जवाबों से बहुत कुछ सीखने को मिला ।

हर जवाब और उससे मिलने वाले सबक को तो यहां दे पाना मुश्किल है । लेकिन हमने मोटे तौर पर जो कुछ पैटर्न देखे, उनकी बात करते हैं । ये अवलोकन निम्नलिखित हैं:—

i) खड़े रूप में लिखे सवालों के सही जवाबों का प्रतिशत आड़े सवालों के सही जवाबों की तुलना में ज्यादा था।

ii) जिन सवालों में हासिल का पचड़ा नहीं था, उसमें ज्यादा बच्चे सफल हुए थे।

iii) कुछ बच्चों ने सवाल लिखते समय या बोर्ड से उतारते समय, अंको के स्थान बदल दिये थे। नतीजा यह हुआ कि उनके उत्तर सही जवाबों से कहीं ज्यादा ऊँचे थे। लेकिन वे ऐसे जवाबों से ज़रा भी परेशान नहीं हुए क्योंकि ये उत्तर उन्हें अजीब नहीं लगा। इसलिए गलत उत्तर आने पर उन्हें इस बात की जरूरत महसूस नहीं हुई कि सवाल करने के अपने तरीके पर थोड़ा विचार कर लें।

E5) अपने आसपास के कक्षा 4 या 5 के कुछ बच्चों के लिए दो अंको वाली संख्याओं को जोड़ व घटा के सवालों का एक प्रश्न पत्र तैयार कीजिए। कुछ सवाल खड़े रूप में लिखे हों तथा कुछ आड़े रूप में। प्रश्न पत्र करते वक्त बच्चे आपस में बातचीत न करें और न ही एक दूसरे की उत्तर-पुस्तिका से नकल करें। इस बात का ध्यान रखें।

क) ऊपर बताए अवलोकनों के अनुसार जवाबों का विश्लेषण करें। हो सकता है कि आप कुछ नई बात जोड़ना चाहें।

ख) जिन बच्चों ने गलतियां की हों, उनकी उत्तर-पुस्तिका को ध्यानपूर्वक देखिए। क्या इन गलतियों में आप कोई पैटर्न देख पाते हैं?

ग) बच्चों से बातचीत के माध्यम से पता कीजिए कि इनमें से कितनी गलतियां इस बात से जुड़ी है कि बच्चे महसूस करते हैं कि वे सै. द. इ. को ठीक समझ नहीं पाए हैं।

अब नन्हे मुकेश की दिक्कत पर ध्यान देते हैं।

उदाहरण 3 : एक दिन मुकेश गृहकार्य में खड़े जोड़ के कुछ सवाल कर रहा था। उसे ये जोड़ करने थे :

$$\begin{array}{r} 5 \ 3 \\ + \ 3 \ 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \ 8 \\ + \ 4 \ 5 \\ \hline \end{array}$$

पहला सवाल तो उसने आसानी से ठीक उस तरह कर लिया जैसे शिक्षक ने सिखाया था।

पहले उसने 3 और 4 को जोड़ा व 4 के नीचे 7 लिख दिया। इसके बाद 5 और 3 को जोड़कर 3 के नीचे 8 लिख दिया।

दूसरा सवाल भी हो ही गया। इसे करते हुए वह बड़बड़ा रहा था, $8 + 5 = 9, 10, 11, 12, 13$, तो यहां 5 के नीचे 13 लिख दूं। फिर $6 + 4$ बराबर 7, 8, 9, 10 होगा, तो यहां (4 के नीचे) लिखा 10, हो गया। वह अपने उत्तर 1013 से संतुष्ट था। मगर अगले दिन शिक्षक संतुष्ट नहीं हुई।

उसकी शिक्षक ने जल्दी से वह तरीका दोहराया जो वे पिछले दिन कक्षा को बता चुकी थीं। तरीका यों था : $68 + 45$ में $8 + 5$ बराबर 13 होता है, इसलिए 5 के नीचे 3 लिखो और 1 को सवाल के दाहिनी तरफ लिख दो (चित्र 3 (क)) फिर $6 + 4$ होगा 10, और जोड़ा बाजू का 1, तो यह हो गया 11 (चित्र 3 (ख))। तो

4 के नीचे लिखो 11, और इस तरह उत्तर हुआ 113.

$$\begin{array}{r} 6 \quad 8 \\ + 4 \quad 5 \\ \hline 3 \end{array}$$

(क)

$$\begin{array}{r} 6 \quad 8 \\ + 4 \quad 5 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 3 \end{array}$$

(ख)

चित्र 3

मुकेश के कई साथियों में सवाल करने में ग़लती की थी। शिक्षक ने सोचा कि यह तो बस अभ्यास की बात है लिहाजा उन्होंने बच्चों को आगे के लिए सवाल करने को दे दिए। इसके बाद वे अन्य अवधारणाएं पढ़ाने लगीं। कुछ बच्चे तो ये नई बातें किसी तरह समझ पा रहे थे, लेकिन बाकी बच्चे पीछे छूटते जा रहे थे।

E6) आपके मुताबिक क्या कारण हैं कि मुकेश व उसके साथी सवाल करने में असफल रहे?

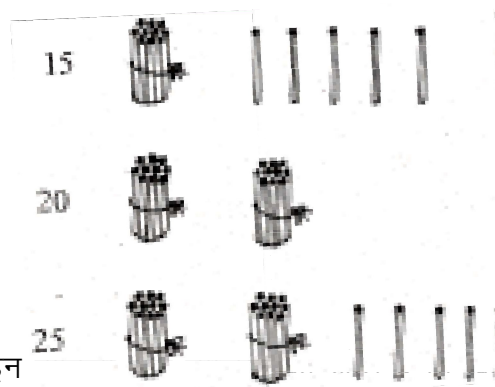
यदि आप उदाहरण 3 में बच्चों की दिक्कत पर बारीकी से गौर करे, तो शायद आपको लगे कि उन्हें यह दिक्कत इसलिए आती है क्योंकि उन्हें संख्याओं में अंकों के स्थानों की अच्छी समझ नहीं है। मेरे पड़ोसी की बच्ची, जो कक्षा 3 में है, यही दिक्कत महसूस करती है। मैंने उसके साथ एक तरीका आजमाया।

उदाहरण 4 : राधा जोड़ के कुछ सवाल करने में मेरी मदद चाहती थी। मैंने उससे पूछा कि क्या वह मेरे तरीके से करने को तैयार है। थोड़ा हिचकते हुए वह मान गई। तो मैंने उससे कहा कि 15, 25 और 10 को जोड़ने में मेरी मदद करें। उसने कहा, पहले मुझे इसे लिख लेने दो। इसके बाद उसने चित्र 4 में दिखाए गए तरीके से सवाल को किया। मैंने उससे पूछा कि उसने यह जवाब कैसे निकाला। उसने कहा, “सबसे पहले मैंने इकाई स्थान के अंको को जोड़ा, $5 + 0 + 5 = 10$ और इसे लिख लिया। फिर मैंने दहाई स्थान के अंको को जोड़ लिया यह आया 4, तो उत्तर हुआ 410.”

$$\begin{array}{r} 15 \\ 10 \\ \hline 25 \\ \hline 410 \end{array}$$

चित्र 4

मैंने उसकी ग़लती पर उसे टोका नहीं, लेकिन उसके साथ निम्नलिखित गतिविधि की। मैंने उसे ढेर सारी माचिस की तीलियाँ देकर कहा कि वह इस ढेर में से 10-10 तीलियों के कुछ बण्डल बनाए। अब मैंने उससे 5 तीलियां देने को कहा, जो उसने कर दिया। जब मैंने उससे 10 तीलियां देने को कहा तो उसने गिनकर 10 तीलियां दीं, धीरे-धीरे उसे समझ आया कि 1 बण्डल देने का अर्थ होगा कि 10 तीलियां दीं, और जब हमारे पास 10 तीलियां हों, तो 1 बण्डल बनाया जा सकता है। जल्दी ही किसी भी संख्या में तीलियां मांगने पर वह जरूरी संख्या में बण्डल व तीलियां देने लगी :



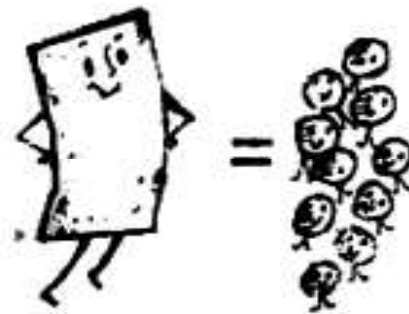
मैंने उससे पूछा, “यदि इन तीलियों को गिनकर कहा, “45”।

इसके बाद मैंने उससे 35 तीलियां देने को कहा उसने मुझे 3 बण्डल और 5 तीलियां दीं। अब मैंने उससे 60 तीलियां मांगी। थोड़ी देर सोचकर उसने मुझे 6 बण्डल दे दिए।

इसके बाद मैंने उसे अपने साथ एक खेल खेलने को कहा। मैंने उसकी बड़ी बहन और मुकेश को भी बुला लिया। हम काफी सारे पत्थर, एक पासा, लगभग 20 कार्ड और दस रंगीन मोती लेकर एक घेरे में बैठ गए मैंने बताया कि हममें से हरेक के पास एक कागज होगा जिस पर हम खेल कैसे आगे बढ़ रहा है इसे दर्ज करते जाएंगे। इस कार्ड में तीन कॉलम थे : एक कॉलम पत्थरों का, एक कार्डों का, और एक मोतियों का।

खेल निम्नानुसार खेला जाता है :

हर खिलाड़ी बारी-बारी से पासा फेंके। पासे पर दिखने वाले अंक के बराबर पत्थर वह उठा ले। पत्थरों की संख्या को वह पत्थर वाले कॉलम में लिख ले। जब उसकी बारी फिर से आए तो वह फिर पासा फेंके और उसके अनुसार पत्थर उठा ले। यदि उसके पास कुल पत्थरों की संख्या 10 से ज्यादा हो जाए तो वह 10 पत्थर वापिस मुख्य ढेर में डालकर बदले में 1 कार्ड उठा ले। जब भी ऐसा हो जाए तो उस खिलाड़ी को अपना रिकार्ड बदलकर लिखना होगा कि अब उसके पास कितने कार्ड और कितने पत्थर हैं। जिसके पास पहले पांच कार्ड आ जाएंगे वही विजेता।



चित्र 5 : एक कार्ड बराबर दस पत्थर

हम सबको खेल में मज़ा आया। 3-4 दफ़ा खेलने के बाद मेरे अलावा बाकी सब एक न एक बार जीत चुके थे। मैंने सुझाव दिया कि खेल को और आगे बढ़ाएं।

अब खेल में हमें 10 या 10 से ज्यादा कार्ड इकट्ठा करने थे। और जिसके पास 10 कार्ड आ जाए वह 10 कार्ड बीच में रखकर उनके बदले में 1 मोती उठा ले। जिसके पास सबसे पहले तीन मोती आ जाएं वही विजेता। यह खेल खूब लंबा खिंचा और कोई जीतता नहीं लगता था। अचानक मुकेश बोल उठा, इस खेल में बहुत समय लगेगा क्योंकि हर मोती के लिए 10 कार्ड लगते हैं और 1 कार्ड के लिए 10 पत्थर लगते हैं। यानी हर मोती के लिए 100 पत्थर लगेंगे। मैंने कहा ठीक है, हम खेल को दो पासों से खेलकर विजेता का फैसला कर सकते हैं। जब हम दो पासों से खेले, तो मुझे और राधा की बड़ी बहन को कई बार बाकी दोनों की चार्ट भरने में मदद करनी पड़ी। और जल्दी ही वे थक गए।

E7) दो पासे वाला खेल मुश्किल क्यों था?

E8) क्या आपको लगता है कि उदाहरण 4 की गतिविधि इकाई, दहाई, सैकड़ा और उनके आपस के सम्बंध को समझने में मददगार हो सकती है? यदि हां, तो किस तरह?

यदि नहीं, तो एक ऐसी गतिविधि तैयार कीजिए, जो इस पाठ में अब तक न आई को, जिससे बच्चों को इकाई/दहाई/सैकड़ा समझने में मदद मिल सके।

उदाहरण 4 में दी गई गतिविधियों में कौन सा सिद्धांत लागू हुआ है? क्या यह लेन-देन का सिद्धांत नहीं? यानी वह सिद्धांत जिसके अनुसार जब हम संख्यांक में दाईं से बाईं ओर एक स्थान से अगले पर चलना शुरू करें, तो इसका एक उसके दस के बराबर होगा, वगैरह। जैसा कि आपने देखा, चार गणितीय संक्रियाओं को सही व आसानी से कर पाने के लिए बहुत जरूरी है कि बच्चे यह सिद्धांत अच्छी तरह से समझ लें।

दरअसल कोई बच्ची यह बात समझी है या नहीं इसका आकलन इस आधार पर किया जा सकता है कि वह दिमागी गणित के निम्नलिखित उदाहरणों में सैकड़ा/दहाई/इकाई को कितनी आसानी से और सही रूप से इनसे जुड़ा पाती है।

(i) किसी संख्या, खासकर ऐसी संख्या जिसमें 9 का अंक हो (मसलन 93), में 1,10 या 100 (या इसका कोई गुणज) दिमागी तौर पर जोड़ना।

(ii) किसी संख्या, खासकर ऐसी संख्या जिसमें 0 का अंक आए मसलन 804, में से 1,10,100; या इसका कोई गुणज दिमागी तौर पर घटाना।

यहां एक दिमागी गतिविधि का उदाहरण प्रस्तुत है, जिससे बच्चों को दिमागी जोड़ व घटा करने के आदी होने में मदद मिलेगी। यह गतिविधि कई बच्चों के साथ, उन्हें तीन-चार समूहों में बांटकर भी की जा सकती है, और अकेले बच्चे के साथ भी की जा सकती है।

ब्लैकबोर्ड पर निम्नानुसार शीर्षक लिखें :

1 घटाओ

2 जोड़ो

100 घटाओ

20 जोड़ो

अब हर शीर्षक के नीचे एक-एक संख्या लिख दें और बच्चों की अलग-अलग टोली से कॉलम आगे बढ़ाने को कहें। मसलन आप इन शीर्षकों के नीचे क्रमशः 404, 184, 901 और 150 लिख दें। अब टोलियाँ आपको 404-1, 184+2, 901-100, 150+20, के उत्तर देंगी। जो टोली सबसे पहले उत्तर देगी उसे एक अंक मिलेगा। खेल इसी तरह आगे बढ़ सकता है।

इसी प्रकार से यदि बच्चे अलग-अलग काम कर रहे हैं तो आप हर बच्चे को एक उत्तर-पत्रक दे सकते हैं जिन पर सही शीर्षक लिखे हों। उनसे कहा जा सकता है कि वे एक निर्धारित समय में 8 चरण पूरे करें। ये सारे चरण दिमागी तौर पर संक्रिया करके पूरे करने होंगे। उदाहरण के लिए, यदि कॉलम '100 घटाओ' 801 से शुरू होता है तो बच्चे को 801,, 701, 601, 501,....., 1 लिखना होगा।

यह गतिविधि किसी भी परिस्थिति के हिसाब से ढाली जा सकता है। मसलन 11 वर्षीय या उससे बड़े बच्चों के लिए उत्तर-पत्रक निम्नानुसार हो सकती है:-

1 पैसा घटाओ

2 पैसे जोड़ो

1 रुपया घटाओ

20 पैसे जोड़ो

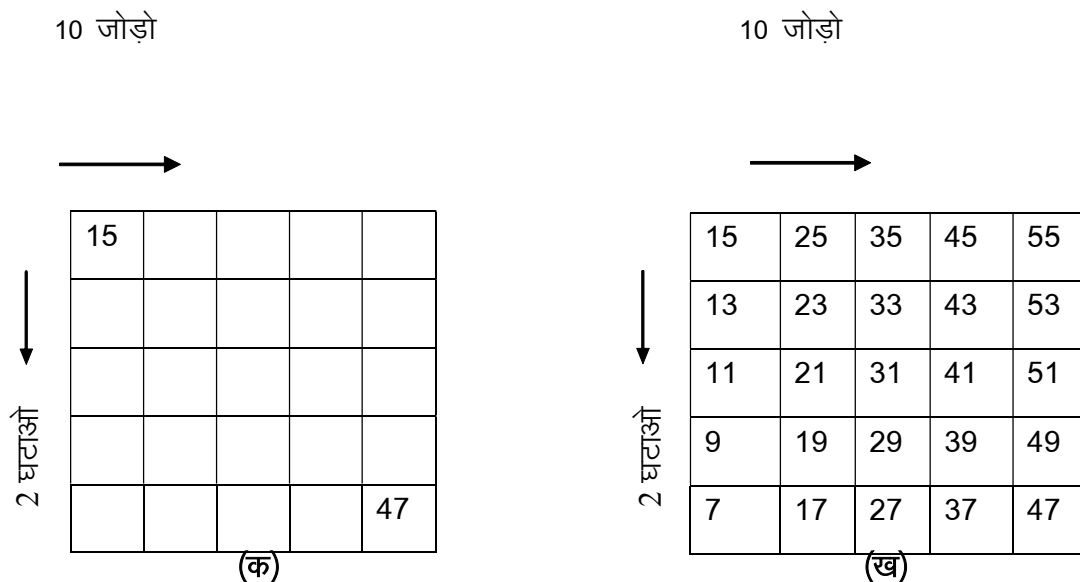
रु. 404

रु. 184

रु. 9.01

रु. 1.50

9 या 10 वर्षीय बच्चों के लिए इसी गतिविधि का एक दिलचस्प रूप चित्र 6 क में दिखाई गई ग्रिड के साथ हो सकता है। इस ग्रिड में आड़े और खड़े दिशा में चलने के निर्देश 1 जोड़ो, 1 घटाओ, 10 जोड़ो, 100 जोड़ो, 5 घटाओ, आदि द्वारा बताए जा सकते हैं। एक प्रारंभिक संख्या ऊपर बाएं कोने पर लिख दें और अंतिम संख्या निचले दाएं कोने पर लिखी हो।



चित्र 6

बच्चे खुद ही इन को भर सकते हैं: यह ध्यान रखना होगा कि वे पंक्ति में बाएं से दाएं चलते हुए तथा कॉलम में ऊपर से नीचे चलते वक्त निर्देशों का पालन करें।

E9) ऊपर सुझाई गई दो गतिविधियां अपने आसपास के कुछ बच्चों के साथ कीजिए। इस बात का मूल्यांकन कीजिए कि क्या वाकई में इनसे बच्चों की दिमागी गणित करने की क्षमता बेहतर हुई।

एक और गतिविधि जिससे बच्चों को ठोस चीजों से सै. द. इ. की अमूर्त समझ की ओर बढ़ने में मदद मिलती है, वह है संख्या चार्ट (चित्र 7)। इस चार्ट की मदद से कई प्रकार की गतिविधियां संभव हैं। मसलन बच्चे को चार्ट पर कोई भी संख्या चुनने को कहें। अब वह पता करे कि क्या यह संख्या अपने ठीक ऊपर या नीचे वाली संख्या से बड़ी है। या छोटी। इसके बाद उससे कहा जा सकता है कि वह बड़ी संख्या में से छोटी संख्या घटाकर उनके बीच का अन्तर पता करे।

बच्चे से यह भी पता करने को कहा जा सकता है कि उसके द्वारा चुनी गई संख्या हर दिशा में पड़ोसी संख्या से कितनी कम या ज्यादा है। और आगे, उससे यह भी पता करने को कह सकते हैं कि क्या चार्ट में संख्याओं का कोई पैटर्न है। मसलन किस दिशा में संख्याएं घट/बढ़ रही हैं, किस दिशा में अन्तर दहाई में है, और क्यों।

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

चित्र 7: 10 x 10 का संख्या चार्ट

क्या इस मदद मिल सकती है ? रानी के उदाहरण से शायद आपको इस प्रश्न का जवाब देने में मदद मिले ।

उदाहरण 5 : 7 वर्षीय रानी संख्या चार्ट के साथ काम कर रही थी । उसे 37 और 26 को जोड़ने के लिए कहा गया था । उसने चार्ट पर 37 ढूँढ लिया था और सोच रही थी कि आगे क्या करे । उसकी मदद करने के लिए शिक्षक ने उससे पूछा कि क्या वह 26 को दो भागों में बांट सकती है । रानी ने कहा “हाँ 13 और 13”.

“ठीक, अब 13 को भी बांटो”, शिक्षक ने कहा ।

“10 और 3”.

“तो, अगर 13 बराबर 10 धन 3 है, इसी तरह 26 किसके बराबर होगा?”

“20 धन 6” , रानी ने थोड़ा रुककर कहा ।

“ठीक । अब तुम्हारे पास 37 है और तुम्हें उसमें 26 जोड़ना होगा । तो क्या ऐसा कर सकती हो कि पहले 20 जोड़ दो और फिर 6 जोड़ दो?” शिक्षक ने पूछा । रानी सहमत थी । “तो ऐसी संख्या पर कैसे पहुंचोगी जो 37 से 26 ज्यादा हो?”

वह दो खाने नीचे बढ़ी, और फिर 6 खाने दाईं ओर बढ़ते हुए किनारे पर पहुँच गई और उसे नीचे और बाएं बढ़कर दूसरे किनारे पर जाना पड़ा, तब उसे समझ में आने लगा कि इस संदर्भ में ‘हासिल’ का अर्थ क्या है । 57 से वह दाईं ओर बढ़ते हुए 59 तक आई और फिर 60 पर गई, जो कि अगली पंक्ति के बाएं छोर पर था । अब उसने 63 तक गिना ।

वास्तव में रानी यह सीख रही थी कि किसी संख्या को इकाई व दहाई में कैसे बांटे और जोड़े ताकि वह हासिल का अर्थ समझ सके । बांटने की प्रक्रिया बच्चों को पहले ठोस चीजों की मदद से सिखाई जानी चाहिए, जैसे कि उदाहरण 4 में बताया गया है । धीरे-धीरे दो अंकों की संख्याओं को इकाई-दहाई के रूप में लिखकर जोड़ने का काम करना शुरू कर सकते हैं । उदाहरण के लिए,

$$\begin{array}{lcl} \xrightarrow{1.} & 34 & 3 \text{ दहाई व } 4 \text{ इकाई} \\ \xrightarrow{+28} & & 2 \text{ दहाई व } 8 \text{ इकाई} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & 5 \text{ दहाई व } 12 \text{ इकाई} \\ &= 5 \text{ दहाई व } 1 \text{ दहाई और } 2 \text{ इकाई} \\ &= 6 \text{ दहाई व } 2 \text{ इकाई} \\ &= 62 \end{aligned}$$

शुरू में ऐसे सवाल को इस तरह करने से बच्चों को यह समझने में मदद मिलती है कि अंक को अगले कॉलम में हासिल कहकर जोड़ा क्यों जाता है।

E10) एक ऐसी गतिविधि सुझाइए जिसमें आसपास मिलने वाली चीजों का उपयोग करके शिक्षक कक्षा में सैकड़ा, दहाई, इकाई की समझ विकसित कर सके। इस गतिविधि की रचना करते हुए आपने किन बातों को ध्यान में रखा ?

E11) एक ऐसा खेल बनाइए जिसमें जीतने के लिए सैकड़ा, दहाई, इकाई सीखने की प्रक्रिया शामिल हों।

अभी तक हमने इस बात पर चर्चा की कि संख्याओं को दशमलव प्रणाली में दर्शाने से सम्बंधित अवधारणा समझने में बच्चों की मदद कैसे करें। कुछ किताबें व व्यक्ति इस संदर्भ में 'स्थानीय मान' शब्द का इस्तेमाल करते हैं। लेकिन हममें से कितने इस अवधारणा का अर्थ समझते हैं ?

स्थानीय मान क्या है?

दशमलव प्रणाली में सभी संख्याएँ सिर्फ 10 प्रतीकों के इस्तेमाल से लिखी जाती हैं। इन प्रतीकों को हम अंक (digit) कहते हैं। इसमें हर अंक का मान संख्यांक में उसके स्थान पर निर्भर होता है। इसलिए दशमलव प्रणाली में बड़ी से बड़ी संख्या काफी छोटे रूप में लिखी जा सकती है। उदाहरण के लिए, दस, सौ और हजार दो ही अंको, 1 और 0, से दर्शाए जाते हैं। अन्तर सिर्फ अंको के स्थानों में है। प्राथमिक स्कूल के बच्चे शायद स्थानीय मान की व्यापक अवधारणा न समझ पाएँ।

ऐसा इसलिए सम्भव है क्योंकि हम हर स्थान का अलग-अलग मान निर्धारित कर देते हैं। इन मानों को ही स्थानीय मान कहते हैं। उदाहरण के लिए, दशमलव प्रणाली में दाएँ से बाएँ क्रम में कॉलम का मान 1 (यानी 10^0), 10 (यानी 10^1), 100 (यानी 10^2), आदि होते हैं। इसलिए 1420 में 4 का मान $4 \times 100 = 400$ होगा।

क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि यदि हमारी अंक प्रणाली का आधार 7 और 7 की घातें हों, तो 1420 में 4 का स्थानीय मान कितना होगा ? इस प्रणाली में दाएँ से बाएँ चलते हुए स्थानीय मान क्रमशः $1, 7^1, 7^2, 7^3, \dots$ यानी 1, 7, 49, 343, आदि होंगे। इसलिए इस प्रणाली में 1420 में 4 का मान $4 \times 7^2 = 196$ होगा।

और द्वि-आधारी प्रणाली (binary system), यानी जिस प्रणाली में आधार 2 व 2 की घातें हों, उसमें 10 को कैसे लिखेंगे ? इस प्रणाली में इकाई, दहाई, सैकड़ा के स्थान पर इकाई, दो, चार, आठ, वगैरह, स्थानीय मान होंगे। चूँकि $10 = (8 \times 1) + 2 = (8 \times 1) + (4 \times 0) + (2 \times 1) + (1 \times 0)$ होगा, इसलिए द्वि-आधारी प्रणाली में दस को 1010 लिखा जाएगा।

आजकल द्वि-आधारी प्रणाली का महत्व काफी बढ़ गया है क्योंकि इसका उपयोग कम्प्यूटरों में होता है। पंच-आधारी प्रणाली का उपयोग अबेकस (abacus) में होता है (चित्र 8)। बारह-आधारी प्रणाली का उपयोग चीजों को दर्जन से गिनने में किया जाता है। साठ-आधारी प्रणाली का उपयोग समय व कोण दर्शाने में किया जाता है।



चित्र 8: (क) अबेकस का हिस्सा जिसमें $0 \times 125 + 1 \times 25 + 3 \times 5 + 2 \times 1 = 42$ को दर्शाया है,

(ख) घड़ियों में 60 के आधार का उपयोग, (ग) चाँदा

यदि आप रोमन प्रणाली जैसी अन्य अंक प्रणालियों पर गौर करेंगे तो 'स्थानीय मान' के फायदे को बेहतर ढंग से देख पाएंगे। रोमन प्रणाली में प्रतीकों से निरूपण बाएँ से दाएँ को होता है। सबसे बाईं ओर सबसे बड़ी संख्या का प्रतीक लिखा जाता है। संख्याएँ जैसे जैसे बड़ी होती जाती हैं उनके प्रतीक जटिल होते जाते हैं। मसलन 337 को रोमन प्रणाली में CCCXXXVII लिखा जाता है।

दस के आधार पर (दशमलव प्रणाली में) लिखी गई संख्याओं को हिन्दू-अरबी संख्यांक कहते हैं।

E12) द्वि-आधारी व पंच-आधारी प्रणालियों में 5, 16, 25 और 32 के निरूपण क्या होंगे, व क्यों?

सारांश

इस पाठ में हमने बच्चों के सामने आने वाली ऐसी कुछ समस्याओं की चर्चा की जो इसलिए आती हैं क्योंकि वे इकाई/दहाई की अवधारणाओं को ठीक से नहीं समझे हैं। खास तौर से हमने

- समूहीकरण की ऐसी गतिविधियों पर विचार किया जिनसे उन्हें यह अवधारणाएं समझने में मदद मिल सकती है।
- कुछ ऐसी गतिविधियों पर गौर किया जिनमें बच्चों का वास्ता ऐसी संख्याओं से होता है जिनमें कम से कम एक अंक शून्य हो।
- ऐसी समस्याओं के उदाहरण देखे जो तब सामने आती हैं जब बच्चे अंकगणित की संक्रियाएँ लागू करते हैं।
- ऐसे तरीकों पर चर्चा की जिनसे बच्चों को स्थानीय मान में आने वाली दिक्कतों से जूझने में मदद मिल सकती है।

सबक-2 के पाठ 4 व 5 के अभ्यासों पर टिप्पणियां

पाठ-4

- E2) i) गलत। यदि कोई बच्ची संख्याओं के नाम बोल सकती है, तो इसका यह मतलब नहीं कि वह गिनती जानती है।
- ii) सही।
- iii) गलत। यदि बच्ची को 'पांच' की अवधारणा समझ में आ गई है तो वह 'पांच' शब्द का इस्तेमाल दोनों अर्थों में कर सकेगी।
- iv) सही।
- E3) i) आप तीन अलग-अलग आकृति की पत्तियां लेकर बच्चों से कह सकते हैं कि "एक-सी दिखने वाली पत्तियों को साथ-साथ रखो। "शुरू में शायद उन्हें मदद की जरूरत पड़े। उन्हें पत्तियों की तीन अलग-अलग आकृतियां दिखाकर बताइए कि ये अलग-अलग समूह हैं। धीरे-धीरे इस तरह की मदद कम करते जाएं। तब आप निर्देशों को ऐसे शब्दों में रख सकते हैं कि "जो चीज़ें एक जैसी हों, उन्हें एक समूह में रखो।" वे जो कुछ करें, उसके बारे में उन्हें बात करने को प्रेरित करें। उन्हें यह भी बताने को प्रेरित करें कि वे ऐसा क्यों कर रहे हैं।
- ii) आप बच्चों को ऐसे बटन दे सकते हैं जिनमें सिर्फ रंग (या आकृति, या आकार) का अन्तर हो, और उन्हें एक से बटन साथ-साथ रखने को कहें। यदि इस तरह के सामान्य निर्देश के आधार पर गतिविधि पूरी करने में उन्हें दिक्कत हों, तो आप ख़ास निर्देश दें। "सारे बटन एक साथ रखो" वगैरह।
- iii) एक डिब्बे में कई किस्म के शंख, बीज, मोती या पत्थर रखकर बच्चों से उन्हें आकृति, आकार या रंग के आधार पर छांटने को कह सकते हैं।
- iv) आप बच्चों को कपड़े देकर कह सकते हैं कि उन्हें रंग या उपयोग के आधार पर छांटे।
- v) जब बच्चों को ठोस चीज़ों का काफी अनुभव हो जाए, तब आप चित्रों के आधार पर भी वर्गीकरण की गतिविधियाँ करवा सकते हैं। जैसे एक एक सेव, केला, संतरा, प्याज, बैंगन, तथा मूली, के चित्र बनाकर बच्चों से कहिए कि एक सी चीज़ों में रंग भरें।
- vi) आप बच्चों को ऐसी चीज़ें दे सकते हैं जिनके वजन में स्पष्ट अन्तर हो। अब उनसे कहिए कि इनमें से भारी व हल्की चीज़ें छांटे। उनसे इस बात पर चर्चा करें कि इन चीज़ों को उन्होंने किस आधार पर छांटा।
- E4) i) बच्चों को अलग अलग आकार कि डिब्बे या छल्ले देकर कह सकते हैं कि उन्हें एक दूसरे में इस तरह फिट (fit) करें कि कोई चीज बाकी न रहे। या बच्चों से कह सकते हैं कि खेल सामग्री को इस ढंग से जमाए कि सबसे नीचे सबसे बड़ी चीज़ें हो, उसके बाद उनसे छोटी, तथा ऊपर सबसे छोटी चीज हो।

- ii) बच्चों को अलग-अलग तरह की ऐसी चीजें जो खुरदरी हों (जैसे रेगमाल) और ऐसी जो चिकनी व सपाट हो (जैसे नायलोन) दें और कहें कि इन्हें खुरदरेपन से चिकनेपन के क्रम में जमाएं।
- iii) बच्चों का तीन-चार ऐसी परिचित चीजें दें जिनके वजन में स्पष्ट अन्तर हो, जैसे, गेंद, रबर, पेंसिल, मोटी किताब, आदि अब उनसे कहिए कि इन्हें इस तरह जमाएं कि सबसे हल्की चीज सबसे पहले हो, फिर उससे भारी और अन्त में सबसे भारी चीज हो।
- E5) i) आप उसे बहुत सी टॉफियां देकर पता लगाने को कह सकते हैं कि क्या ये टॉफिया उतनी ही हैं जितने उसके दोस्त जो वहां उपस्थित हैं। यदि नहीं तो टॉफिया ज्यादा हैं या दोस्त? अब आप उससे कहिए कि वह एक-एक गोली को एक एक दोस्त से जोड़े (इस तरह से उसकी एक-एक की संगति की समझ भी बढ़ेगी।)
- ii) इस काम के लिए ताश का उपयोग भी कर सकते हैं।
- E6) उदाहरण के लिए किसी बच्ची ने 'भाग करो' की जगह हमेशा 'बांटो' या हिस्से करो ही सीखा है। अब यदि वह पहली बार 'भाग करो' शब्द सुनेगी तो वह उस सवाल को हल नहीं कर पाएगी, हालांकि हो सकता है कि उसे भाग करना अच्छी तरह से आता हो।
- E7) क) सारे गोल बटन जामुनी थे, इसलिए मुमकिन है कि बच्चे को लगे कि गोल का कुछ संबंध 'जामुनी' से है। हो सकता है कि कोई बच्ची जामुनी बटन चुनते हुए इस गतिविधि को सही-सही पूरा कर दे, जबकि शिक्षक सोचते रहें कि उसने बटन आकृति के आधार पर चुने हैं।
- ख) नहीं। एक वजह तो (ख) में दी गई है, और बाकी वजह आप लिखिए।
- ग) इस गतिविधि में सारे बटन एक रंग के रखे जा सकते हैं ताकि बच्चे सिर्फ एक ही सामान्य गुण देखें, यानी गोलापन।
- E10) शायद उसे यह समझ न आया हो कि सामान्य रूप से 'चार' का क्या अर्थ होता है। हो सकता है कि उसने शब्द याद कर लिया हो और उसे किताब में दिए गए प्रतीक व चित्र से जोड़ लिया हो। इस तरीके से तो उसी तरह की ग़लत धारणा को बल मिलेगा जैसा कि मरिअम्मा (उदाहरण 5) को थी।
- E12) (i) इससे उन्हें यह समझने में मदद मिलती है कि कोई भी संख्या उस मात्रा में किन्हीं भी चीजों के समूह को दर्शाती है।
- (ii) इससे उन्हें पता चलता है कि संख्याएं किसी निश्चित मात्रा को दर्शाती हैं, जैसे तीन चम्मच, तीन छलांगे, वगैरह। इसी के आधार पर वे संख्या की अमूर्त अवधारणा समझ पाएंगे, जो कि एक संज्ञा है।
- (iii) जल्दबाजी में संख्यांक सिखाने का असर यह होता है कि बच्चे संख्याओं को चीजों व मात्राओं से नहीं जोड़ पाते।
- (iv) शून्य भी अन्य संख्याओं की तरह एक संख्या है। संख्या-रेखा पर इसका निरूपण किसी भी अन्य संख्या की तरह ही होता है।

पाठ-5

- E2) उदाहरण 1 में बच्चों को संख्यांक रट रटकर बगैर समझे, सीखने पड़े थे। उन्हें बस कुछ बने-बनाए नियम देकर उनका पालन करने को कहा गया। लिहाजा इस तरीके में वे सारे पहलू हैं जो 'आँख मूंदकर नियम मानने' के किसी भी तरीके में शामिल हैं। उदाहरण 2 में शिक्षक बच्चों को ठोस चीजों की मदद से अवधारणा सीखने को प्रोत्साहित कर रही हैं। वे यह भी कोशिश कर रही हैं कि बच्चे अपनी रपतार से और मजेदार तरीके से अवधारणा समझें।
- E3) क) मेरे एक दोस्त, जो बहुत संजीदा शिक्षक हैं, उसने काफी उत्साह से मुझे अपने द्वारा रचित एक खेल के बारे में बताया था। उसका कहना था कि बच्चों को छोटी-छोटी टोलियों में बांटकर, हर टोली को दो पासे दे दो। हर टोली में बच्चे बारी-बारी से खेलें। हर बच्चे को पासों पर आने वाले अंकों की मदद से बड़ी बड़ी संख्या जुटाना है। एक पासे के अंको को इकाई और दूसरे पासे के अंको को दहाई माना जाएगा। जिसके पास सबसे बड़ी संख्या जुटेगी, उस बच्चे की जीत होगी।

हमारे साथ बैठी मेरी एक सहकर्मी इस पर काफी उत्साहित हो गई, और कहने लगी कि हम इस खेल को कई तरह से आगे बढ़ा सकते हैं। शिक्षक और मैंने पूछा, "कैसे?" उसने कहा, "सबसे पहले तो पासे की जगह हम टीन या कार्डबोर्ड का एक चक्र बना सकते हैं, जिस पर 0 से 9 तक अंक लिखे हों। अब एक कार्डबोर्ड या प्लास्टिक की पट्टी को तीरनुमा काटकर एक सुई बना लो। यह सुई चक्र की त्रिज्या के बराबर लम्बी हो। अब चक्र के बीचोंबीच एक सुराख कर लें और इसमें एक तीली या कील से सुई का चपटा हिस्सा लगा दें। सुई को उंगली से जोर से मारकर घुमाया जाए। जब यह सुई रुके तो उसके सबसे पास का अंक लिख लें। हर बच्ची अपनी बारी आने पर दो मर्तबा सुई को घुमाए और दो अंक उसे मिलें उनसे बड़ी से बड़ी संख्या बनाए। (सिर्फ इकाई, दहाई के अलावा उन्हें यह भी अनुमति हो कि गुणा, जोड़ आदि जो भी संक्रियाएं वे जानते हों उनका उपयोग संख्या बनाने में करें। इस खेल को बदलकर सबसे छोटी संख्या बनाने के लिए भी कहा जा सकता है।

यदि पासा या चक्र न हो, तो इसी खेल को खेलने के लिए शिक्षक हर टोली को पाँच जोड़ी संख्याएँ दे सकती हैं। हर जोड़ी से विद्यार्थी बड़ी से बड़ी संख्या बनाएं। या 2 जोड़ियों से अधिकतम योग, या न्यूनतम अंतर या अधिकतम अंतर प्राप्त करें।

- (ख) मेरी गतिविधि से अपनी गतिविधि की तुलना इस्तेमाल की गई सामग्री के प्रकार, निर्देशों की जटिलता, वास्तविक अभ्यास, मजे का स्तर, हर बच्चे के सोचने व उनसे मिलने वाले नतीजों के संदर्भ में करें।
- E4) सामूहिक गतिविधि के लिए बच्चों को एक समूह माना जा सकता है या उन्हें 5-5, 10-10 के समूहों में बांटा जा सकता है। ध्यान देने की बात यह है कि सामूहिक गतिविधि का मतलब ऐसी गतिविधि से है जिसे बच्चे मिलकर करें। इसका अर्थ ऐसी गतिविधि से नहीं है जो पूरी कक्षा को एक साथ दी जाए मगर हर बच्ची को उसकी अपनी कॉपी में अकेले या अपने ढंग से करना पड़े।

आप ब्लैकबोर्ड पर किए जा सकने वाले खेल सोच सकते हैं जिनमें पूरी कक्षा शरीक हो सके। या पूरी कक्षा को 5-5 की टोलियों में बांटा जा सकता है। कुछ टोलियां कार्ड से, कुछ कंकड़ों से और कुछ मोती आदि से गतिविधि करें।

- E6) एक कारण तो यह है कि उन्हें 'हासिल' का अर्थ समझाए बगैर कॉलमनुमा तरीके से जोड़ करना सिखाया गया है। दूसरी बात यह है कि एक ही तरीके व एक ही तर्क को बारम्बार दोहराने से बच्चे को कुछ खास मदद नहीं मिलती। दूसरे तरीके खोजने होंगे। शायद ठोस चीज़ों के साथ गतिविधियों से मदद मिलें। आप कई और कारण सोच सकते हैं।
- E7) शायद दो पासे वाले खेल में ज्यादा धैर्य और ज्यादा तार्किक क्षमता की जरूरत हो।
- E8) सैकड़ा, दहाई, इकाई को समझने की प्रक्रिया में शामिल कई उप-प्रक्रियाएं होती हैं। उनके अन्तर्गत यह भी समझना होता है कि समूहीकरण कैसे करें, बड़ी संख्याओं को सीखने में समूहीकरण से कैसे मदद मिलती है, संख्याओं का अमूर्त व औपचारिक निरूपण, आदि की समझ जरूरी है। माचिस की तीलियों वाली गतिविधि से इनमें से कौन से पहलू बेहतर ढंग से सीख सकते हैं? और पासे के खेल से कौन से?
- E10) किसी बच्चे या बच्चों के साथ की जाने वाली गतिविधि को चुनते समय कई बातों का ध्यान रखना होता है—
- गतिविधि बच्चों की संख्या के लिहाज़ से उपयुक्त हो।
 - बच्चे इसे बिना अधिक मेहनत के व खूब मजे से कर सकें।
 - यदि एक से अधिक टोलियां गतिविधि करें, तो इतना लचीलापन होना चाहिए कि इसे विभिन्न क्षमताओं के अनुरूप ढाला जा सके।
 - जो अवधारणा सिखाई जा रही है, बच्चे वाकई उसका अहसास कर पाएं।
 - गतिविधि ऐसी हो कि बच्चे सीखने की प्रक्रिया में पूरी लगन से जुड़े रहें। इस सूची में आप और बातें जोड़ सकते हैं।
- E11) मसलन, ऐसे कार्डों का ढेर लीजिए जिनपर कोई न कोई एक अंक लिखा हो। हर टोली इसमें से कोई 3 कार्ड खींचे। अब टोली का हर सदस्य इन अंकों के आधार पर तीन अंकों की सबसे बड़ी व सबसे छोटी संख्या बनाने की कोशिश करे।
- E12) द्वि-आधारी प्रणाली में 5 को 101 लिखा जाएगा (यानी $1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$) पंच-आधारी प्रणाली में 5 को 10 लिखा जाएगा (यानी $1 \times 5^1 + 0 \times 5^0$) आप बाकी की संख्याओं को इसी प्रकार से लिखिए।

पहला और आखिरी गणित

इस अध्ययन के विषयवस्तु

पाठ – 6 जोड़ना और घटाना

परिचय – उद्देश्य – जोड़ने का मतलब – घटाने की समझ – जोड़ने और घटाने का संबंध – एल्गोरिदम का इस्तेमाल – अंदाज लगाना – सारांश।

पाठ – 7 गुणा और भाग

परिचय – उद्देश्य – गुणा करने से पहले गुणा की समझ – पहाड़े या तोता रटंत? – गुणा का एल्गोरिदम – भाग का मतलब – भाग का एल्गोरिदम – सारांश।

पाठ-6 व 7 के अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

दुनिया में आज भी कुछ अलग थलग समाज हैं – महासागर के छोटे गुमनाम टापुओं में, या फिर घने जंगलों के बीचों बीच – जहाँ लोगों की गिनती बहुत कम है। वे एक, दो, या तीन, चार तक की ही गिनती जानते हैं। चार से ज्यादा सब चीज़ों को वे “बहुत” कहते हैं, चाहे वे पाँच ही हों या पचास। इन समाजों में भी भरा पूरा जीवन है जो हजारों सालों से चलता आया है। लेकिन वहाँ गणित का विकास “तीन” या “चार” से ज्यादा नहीं हो पाया है। क्यों?

इसकी वजह है प्रयोजन, यानि जरूरत। ये छोटे-छोटे समाज आत्मनिर्भर जीवन जीते हैं। इनका जीने का साधन मछली मारना या शिकार होता है। जंगली फल, फूल, पत्ते इनके काम में आते हैं। ये खेती नहीं करते। कबीलों के सामूहिक जीवन में जितना उत्पादन होता है, पूरा कबीले में ही बंट जाता है। व्यापार जैसी कोई चीज़ का चलन संभव नहीं होता। गौर करें तो साफ हो जाएगा कि “चार” से ज्यादा गिनने की कोई तलब ही नहीं होती। तो ज्यादा चीज़ों को “बहुत” कहने से काम बखूबी चलता है।

खैर, इससे हमें एक नायाब सुराग मिलता है कि सामाजिक प्रयोजन, यानि जरूरत, से गणित उपजता है।

जाहिर है, विकसित समाजों में, जहाँ हजारों चीज़ों के व्यापार का जाल कुलबुलाता है, वहाँ चीज़ों का बराबर हिसाब बहुत जरूरी हो जाता है। पचीस बोरी दाल और बारह बोरी मूली बेचकर दस बोरी गेहूँ और एक बोरी नमक खरीदा। इसका हिसाब जरूरी ही नहीं, जानलेवा है। तो उपजता है, जोड़, घटा, गुणा, भाग।

अंग्रेजी में एक कहावत है कि किसी को जीवन में सिर्फ तीन “र” (3Rs.) की जरूरत पड़ती है : “रीडिंग”, यानि पढ़ना, “राइटिंग”, यानि लिखना और “(ए) रिथमेटिक्स”, यानि अंक गणित। पूरे जीवन के तमाम उतार चढ़ावों के लिये इतनी विद्या काफी है। और यह बात कोई पुरानी बातकही या बकवास भी नहीं है। अपने आसपास के बीए, एमएससी पास लोगों से कालेज से दस बरस बाद बात करके देखो तो यही मिलेगा कि वे इतिहास, भूगोल, एल्जब्रा, वगैरह सब भूल गये होते हैं। याद रहते हैं बस यही तीन “र” – पढ़ना, लिखना, अंक गणित।

एक और एक और एक और एक को जोड़ा तो मिला : चार। दूसरी तरफ दो को दो से गुणा किया तो मिला : चार। क्या रिश्ता है? खेत से निकली गाजरों को बाज़ार ले जाने से पहले गिनना है। या तो गिनो एक, दो, तीन, चार, ... ऐसे। लेकिन बीच में भूल हो गयी तो? फिर से शुरू करना पड़ेगा – टाइम लगेगा, मेहनत लगेगी। चार या पाँच तक गिनना आसान है। गाजरों को पाँच – पाँच के बंडलों में रखो, फिर बंडलों को गिनो। चालीस बंडल बने $5 \times 40 = 200$ गाजरें। यानि : गुणा जोड़ने का ही दूसरा तरीका है। इसी तरह, भाग भी घटाने का ही दूसरा तरीका है। और जोड़, घटा, गुणा, भाग – ये सब गिनने के ही अलग-अलग तरीके हैं। आखिर असली बात है : गाजरों का व्यापार और इस सबक में इन्हीं सब पर चर्चा करेंगे।

पाठ-6

जोड़ना और घटाना

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - जोड़ने का मतलब
 - घटाने की समझ
 - जोड़ने और घटाने का संबंध
 - एल्गोरिदम का इस्तेमाल
 - अंदाज लगाना
- सारांश

परिचय

एक शिक्षक बच्चों से पूछते हैं— “एक और एक कितना?” बच्चों का जवाब होता है, “और बड़ा एक।” यह जवाब बहुत ही अनोखा है। लेकिन, क्या कई मामलों में यह जवाब जायज़ नहीं है, जहाँ ‘और’ का मतलब ‘मिलने’ से होता है? जैसे जब दो नदियाँ आपस में मिलती हैं और फिर पहले से बड़ी, ज्यादा चौड़ी एक नदी के रूप में बहती हैं?

क्या यह आम तौर पर सही नहीं है कि जब हम दो राशियों को जोड़ते हैं तो हमें ज्यादा बड़ी राशि हासिल होती है? घर पर भी आपको इसके कई उदाहरण मिल जाएंगे। कई बार आपने छोटे समूहों को जोड़कर एक बड़ा समूह बनाया होगा, नहीं? कैसे 2 संतरे और 5 संतरे जोड़ने से, या आटे में पानी मिलाने पर आपको ज्यादा मात्रा प्राप्त हो जाती है। अलबत्ता इस इकाई में हम उन्हीं समूहों के जोड़ पर ध्यान देंगे जिनमें चीजों की गिनती की जा सके, जैसे संतरे या चपातियाँ। हम आटे और नदी जैसे उदाहरणों की बात नहीं करेंगे, जो कि इस तरह गिनी नहीं जा सकती।

यहाँ हम उन तरीकों की बात करेंगे जिनसे बच्चों को यह समझने में मदद मिले कि विभिन्न समूहों को जोड़ने का अर्थ यह पता लगाना होता है कि इनमें कुल चीजें कितनी हैं। हम चाहेंगे कि वे इससे सम्बन्धित अवधारणाओं और भाषा को समझ जाएं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- जोड़ने व घटाने में शामिल प्रक्रियाओं को समझा सकेंगे।
- ऐसी गतिविधियों की योजना बनाकर उन्हें लागू कर सकेंगे जिनसे बच्चों को जोड़ना व घटाना सीखने में मदद मिले।

- इबारती सवालों को बनाने व उन्हें हल करने की बारीकियां समझा सकेंगे,
- संख्याओं को जोड़ने व घटाने के एल्गोरिद्म समझाने के लिए कारगर तरीके सुझा सकेंगे;
- संख्याओं के जोड़ व अंतर का अन्दाजा लगाने की क्षमता विकसित करने में बच्चों की मदद कर सकेंगे;
- अपने सीखाने के तरीकों का मूल्यांकन कर सकेंगे।

जोड़ का मतलब समझना

छोटे बच्चों के लिए जरूरी होता है कि जोड़ की संक्रिया का कोई ठोस संदर्भ हो। शुरू में उन्हें काफी सारे ठोस अनुभवों की जरूरत होती है। जैसे, बच्ची को 2 कंचे और 3 कंचे की ढेरियाँ देकर पूछ सकते हैं, कि कुल कितने कंचे हैं। फिर उसे तीन टहनियाँ और 2 टहनियाँ दी जा सकती हैं। तीन बटन—दो बटन, तीन पत्थर—दो पत्थर, तीन बिस्कुट—दो बिस्कुट, वगैरह देकर इसी संक्रिया को दोहराया जा सकता है। हर बार उसे प्रेरित करें कि जो कुछ वह करे, उसको बताती जाए, जैसे कि “ये 2 कंचे हैं, और ये 3 कंचे हैं। मैंने उनको मिला दिया। अब (गिनते हुए) ये 5 कंचे हैं।” शुरू में शायद उसे मदद की जरूरत हो। आप कुछ सवाल पूछ-पूछ कर उसकी मदद कर सकते हैं, जैसे, तुम्हारे पास कितने पत्थर थे? मैंने तुम्हें कितने पत्थर और दिए? तो कुल कितने पत्थर हुए?

धीरे-धीरे जब वह अपने द्वारा की गई क्रिया का वर्णन करना सीख जाए, तब आप ‘जोड़ना’ शब्द प्रस्तुत करके उसे बच्ची द्वारा की जाने वाली क्रिया से जोड़ सकते हैं। धीरे-धीरे यह शब्द उसकी भाषा का अंग बन जाएगा, और इसे वह समूहीकरण से संबंधित करने लगेगी। इन्हीं तरीकों से वह ‘कुल’, ‘धन’, आदि शब्दों को भी समझने लगेगी।

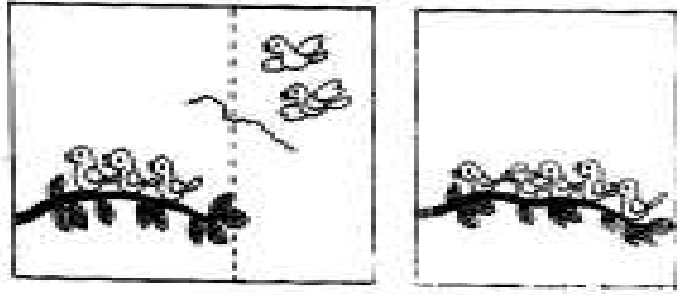
अब, जब वह जोर-जोर से बोले, “2 कंचे और 3 कंचे बराबर 5 कंचे”, आप बोर्ड या कागज पर $2 + 3 = 5$ लिख सकते हैं। जब वह बोले, “2 पेंसिल और 3 पेंसिल बराबर 5 पेंसिल”, आप फिर $2 + 3 = 5$ लिख सकते हैं। इसी तरह के कई उदाहरणों से वह प्रतीकात्मक निरूपण ‘ $2 + 3 = 5$ ’ को जानने लगेगी। कई जोड़-तथ्यों को देखकर ही वह उनको खुद प्रतीकों में लिखने लगेगी। अभ्यास के साथ वह इन प्रतीकों से अच्छी तरह से वाकिफ हो जाएगी।

वस्तुओं के समूहों को मिलाने के काफी अनुभवों के बाद ही बच्चे जोड़े के गुण को समझ पाते हैं, जैसे कि $3 + 2$ और $1 + 4$ एक ही बात है, या अगर $3 + 2 = 5$ है तो $5 = 3 + 2$ होगा।

उदाहरण 1 : सुश्री मेहता दिल्ली के एक सरकारी प्राइमरी स्कूल में पढ़ाती हैं। कक्षा 1 में उनके पास आने वाले बच्चे कुछ संख्याओं से वाफिक होते हैं। सत्र के शुरू में सुश्री मेहता बच्चों से कंकड़ जैसी चीजें इकट्ठी करके गिनने को कहती हैं। फिर वे उनसे कहती हैं कि उन चीजों की दो ढेरियाँ बनाएँ, और पता लगाएं कि दोनों को मिलाकर कुल कितनी चीजें हैं। यही काम वे ऐसी कई चीजों के साथ दोहराती हैं जो बच्चों को आसपास ही आसानी से मिल सकें। इसके बाद वे बच्चों को खेलों के द्वारा जोड़ने के अभ्यास के मौके देती हैं बिना उन्हें ये बताएं कि वे जोड़ना सीख रहे हैं। इसके लिए वे नीचे दिए गए खेलों की मदद लेती हैं।

दो बच्चों को दो या दो टोलियों को पासे और पत्थर दे दीजिए। हर बच्ची (या टोली) पासा फेंकती है और पासे पर आने वाली संख्या के बराबर पत्थर उठा लेती है। दो बार करने के बाद जिसके पास ज्यादा पत्थर होते हैं वही विजेता। पूरी गतिविधियों के दौरान टोली के एक सदस्य को जोर से बोलते जाना होता है कि उसकी टोली क्या कर रही है।

सुश्री मेहता और भी कई तरह की गतिविधियों का उपयोग करती हैं। मसलन वे बच्चों को चित्र 1 में दिखाए गए चित्र कार्ड जैसे कार्ड हिस्सों में दिखाती हैं। पहले सिर्फ बैठी हुई तीन चिड़िया दिखाती हैं, और उसके बाद 2 चिड़ियां जो उड़कर आ रही हैं। अब वे बच्चों से यह पता लगाने को कहती हैं कि कुल कितनी चिड़िया हैं।



चित्र 1 : $3 + 2 = 5$ की चित्र प्रस्तुति

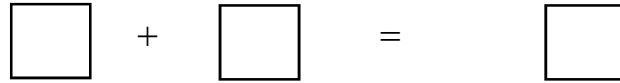
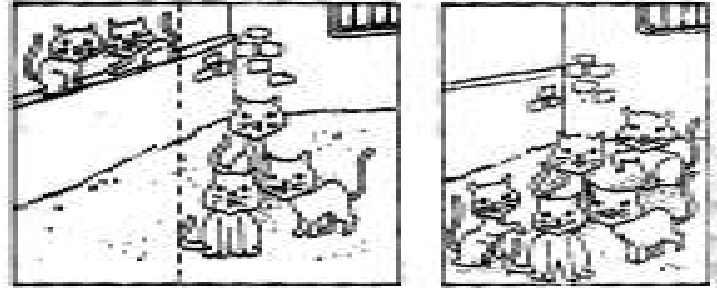
जब वे उत्तर निकाल लेते हैं, तब वे चित्र का दाहिना हिस्सा खोलती हैं। बच्चे यह गतिविधि कई कार्डों के साथ करते हैं। वे हर कार्ड में निम्नानुसार कुछ लिखित भाग भी जोड़ देती हैं और इसे लाइन-दर-लाइन खोलती हैं।

3 और 2 मिलाकर बनते हैं 5

3 और 2 होंगे 5

3 और 2 बराबर 5

$3 + 2 = 5$



चित्र 2

धीरे-धीरे इस तरह के काफी अनुभव के बाद उन्होंने पाया कि बच्चे 'धन' और 'बराबर' को अपने प्रतीकों के साथ जोड़ने लगे। तब वे उन्हें चित्रात्मक वर्कशीट-देती है, जैसी कि चित्र 2 में दिखाई गई है। वे बच्चों से चित्रों के नीचे उनमें दिखाए गए जोड़ लिखने को भी कहती हैं।

वे बच्चों को ऐसी कई गतिविधियों के बाद ' $3+4 = \dots\dots\dots$ ' जैसे प्रश्न करने को देती हैं। वे कहती हैं, "सिर्फ अभ्यास से ही बच्चे '+' और '=' से वाकिफ हो सकते हैं।"

तो सुश्री मेहता का तरीका है कि बच्चों को जोड़ से परिचित कराने के तीन चरण हैं – ठोस चीजों के संदर्भ में, चित्रण प्रस्तुति और प्रतीकात्मक प्रस्तुति।

E1) क्या जोड़ना ऊपर दिए गए तरीके से सिखाया जाना चाहिए ? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

E2) बच्चों को चीजों के समूहों को जोड़ने का ठोस अनुभव देते समय, हमें एक जैसी चीजों का इस्तेमाल करना चाहिए। क्या आप इससे सहमत हैं ? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

यह बहुत महत्वपूर्ण है कि बच्चे जिस अवधारणा को सीखने की कोशिश कर रहे हैं, उन्हें उस अवधारणा से संबंधित ढेर सारे इबारती सवाल करने का अवसर मिले। इस तरह के बहुत-से सवाल हल करते हुए बच्चे

जोड़ने की अमूर्त संक्रिया को अर्थ देने लगते हैं। जब मैं अपने पाँच वर्षीय पड़ोसी से पूछती हूँ कि 4 और 2 कितने होते हैं, तो वह तरह-तरह के अनुमान लगाता है। लेकिन जब मैं उससे यह पूछती हूँ कि अगर उसकी माँ चार चपाती खाए और वह खुद दो चपाती खाए तो कुल कितनी चपातियों की जरूरत होगी, तो उसका उत्तर सही होता है। कारण यह है कि यह संदर्भ उसकी दुनिया से जुड़ा हुआ है।

बच्चों को इबारती सवाल लगभग शुरू से ही दिए जाने चाहिए, न कि 'मूल तथ्य सीख जाने' के बाद।

जैसे— पांच वर्षीय मीता के पास दो टेनिस गेंदें थी, ओर एक दोस्त तीन गेंदों वाला एक डिब्बा लेकर आया। मीता ने तुरन्त सबको बताया कि अब उसके पास पांच गेंदे हैं। दो दिन बाद हमने एक 'क्रिकेट मैच' खेला जिसमें हमने दो और टेनिस गेंदों का उपयोग किया। मीता ये गेंदे भी रखना चाहती थी। तो उसने कहा "अगर मुझे ये गेंदे भी मिल जाएं, तो मेरे पास ढेर सारी गेंदे हो जाएंगी।" मैंने पूछा, "कितनी?"

उससे इस तरह के प्रश्न पूछिए : 'यदि तुम इन कंचों को (एक ढेरी की ओर इशारा करते हुए) इन कंचों में (दूसरी ढेरी की ओर इशारा करके) मिला दो, तो तुम्हारे पास **कुल** कितने कंचे हो जाएंगे ? इससे उन्हें जोड़ की समझ बेहतर बनाने में मदद मिलेगी। हाँ यह जरूर है कि ऐसे **सवाल आसान हों** और ऐसी विभिन्न परिस्थितियों से संबंध रखते हों जो बच्चों की दुनिया से जुड़ी हों।

E3) जोड़ना-घटाना सिखाने की प्रक्रिया में इबारती सवालों का उपयोग आप कब करना चाहेंगे और क्यों?

मोटे तौर पर, जोड़ से संबंधित दो किस्म के इबारती सवालों से बच्चों का वास्ता पड़ता है।

● **एकत्रीकरण** : जब उन्हें दो या दो से अधिक राशियों (जैसे वस्तुओं के समूह, पैसे, दूरी, आयतन, आदि) को मिलाकर एक राशि बनानी होती है। (जैसे, यदि मुन्नी के पास 3 पेंसिलें हैं और मुन्ना के पास दो, तो कुल कितनी पेंसिलें हैं?)

● **वृद्धि** : जब किसी राशि को किसी निश्चित मात्रा से बढ़ाना हो, और बड़ी हुई राशि को ज्ञात करना हो। (जैसे, एक थैले में 5 बोतलें हैं और इसमें 4 बोतलें और डाली गई हैं अब थैले में कितनी बोतलें होंगी?)

E4) ऊपर लिखी दो किस्मों में क्या अन्तर है ? बच्चों के लिए इनमें से किसे समझना ज्यादा मुश्किल होता है?

E5) कुछ ऐसी गतिविधियों व इबारती सवालों की सूची बनाइए जिनसे बच्चों को दी गई दो किस्मों की समझ बनाने में मदद मिल सके।

जब ऊपर बताए गए तरीके से बच्चों को जोड़ने का तजुर्बा हो जाए, तब आप कैसे जांचेंगे कि उन्होंने सचमुच इस अवधारणा को समझ लिया है? यह तो है ही कि जब बच्चे ठोस व चित्र-आधारित गतिविधियाँ कर रहे होंगे, उस दौरान तो आप उनका मूल्यांकन, लगातार करते रहेंगे। आप उनसे यह भी कह सकते हैं कि वे **किसी संख्यात्मक जोड़ के आधार पर खुद इबारती सवाल बनाएं**। मसलन, उनसे कहा जा सकता है कि $3 + 5 = 8$ को दर्शाती दो स्थितियाँ बताएं।

अब तक हमने उन तरीकों पर बात की जिनकी मदद से बच्चों को छोटी-छोटी संख्याओं के संदर्भ में जोड़ से परिचित कराया जा सकता है। इस मुकाम पर उनका परिचय 'उलट संक्रिया' के नाते घटाने से कराया जा सकता है।

E6) क्या आप जोड़ और गिनने में कोई समानता देखते हैं? उदाहरण देकर इसे स्पष्ट करें।

घटाने की समझ का विकास

घटाने की प्रक्रिया जोड़ने की प्रक्रिया की उल्टी है। किसी संग्रह में कुछ और डालकर उसे बड़ा बनाना तथा उस संग्रह में से कुछ निकालकर उसे छोटा करना परस्पर विपरीत प्रक्रियाएं हैं।

आइए, कुछ ऐसी स्थितियों पर गौर करें जहाँ बच्चों के लिए यह पहचानना आवश्यक होगा कि उस सवाल का हल निकालने के लिए घटाने की जरूरत है। जोड़ने की तुलना में घटाने से संबंधित सवाल बच्चों के लिए ज्यादा पेचीदा होते हैं। कारण यह है कि इसमें उन्हें यह पहचानना पड़ता है कि किस राशि को निकाल देना है। यह एक महत्वपूर्ण अंतर है क्योंकि इससे पहले बच्चों का सम्पर्क जोड़ से हुआ था, जहाँ $2 + 3 = 3 + 2$ होता था। मगर $9 - 3$ और $3 - 9$ एक ही बात नहीं है। यानी घटा में संख्याओं का क्रम नहीं बदला जा सकता है, अर्थात् घटा क्रमविनिमेय संक्रिया नहीं है।

चलिए, घटा से संबंधित कुछ ऐसे इबारती सवालों की किस्में देखें जो बच्चों के सामने आती रहती हैं। मोटे तौर पर चार किस्में हैं।

● **हिस्से करना**— कुछ चीजों को निकालने या हटाने तथा बची हुई चीजों की संख्या पता करने की क्रिया। (जैसे, डिब्बे में 15 टॉफियां थीं। 10 खाई गई, तो कितनी बचीं?)

● **कमी मालूम करना**— जब मूल राशि और शेष बची राशि पता हैं, तब यह पता लगाना है कि कितनी राशि हटा दी गई या निकाली गई है। (जैसे, किसी डिब्बे में 15 टॉफियाँ थीं, और अब सिर्फ 5 बची हैं तो कितनी खाई गई हैं?)

● **तुलना**— दो समूहों या संख्याओं के बीच अंतर पता लगाना, यानी एक समूह में दूसरे के मुकाबले कितना कम या ज्यादा है। (जैसे, यदि मुन्ना के पास 15 रबड़ हैं और मुन्नी के पास 5 हैं, तो मुन्नी के पास मुन्ना से कितने रबड़ कम हैं?)

● **पूरक जोड़**— किसी संख्या या समूह को बढ़ाकर किसी अन्य संख्या या समूह में तब्दील करने के लिए कितना जोड़ना होगा। (जैसे, यदि किसी कक्षा में 50 बच्चे बैठ सकते हैं और 20 पहले से बैठे हुए हैं, तो कितने बच्चे उस कक्षा में बैठ पायेंगे?)

ऊपर दी गई चार किस्मों में से बच्चों को पूरक जोड़ पहचानने में सबसे ज्यादा कठिनाई होती है। इस किस्म से संबंधित ज्यादातर सवालों में 'और कितना' पूछा जाता है। बच्चे के लिए 'और' का संबंध जोड़ से होता है, और वह सवाल में दिए गए सारे अंकों को जोड़ डालते हैं। दूसरी तरफ ऐसे बच्चे भी होते हैं जो घटाने के सारे सवालों को पूरक जोड़ के सवाल के रूप में बदल देते हैं। मसलन, वे '13 में 7 घटाओ' को '7 में क्या जोड़ने से 13 आएगा' के रूप में देखते हैं। मन में हिसाब करते हुए हममें से कई लोग इस तरीके का सहारा लेते हैं, मसलन $391 - 180$ पता करने के लिए हम जोड़ कर 180 को 200 बना लेते हैं, और फिर 391 तक ले जाते हैं। यानी $391 - 180 = 20 + 191$ हो जाता है।

E7) 'तुलना' और 'पूरक जोड़' के सवालों में क्या अंतर है ?

E8) ऊपर दिए गए चार किस्मों का एक-एक ऐसा इबारती सवाल बनाएँ जो बच्चों की दुनिया से संबंधित हो?

आइए अब यह देखें कि घटाने की क्षमता विकसित करने में हम बच्चों की मदद कैसे कर सकते हैं। जोड़ की तरह घटाने से भी बच्चों का परिचय परिचित वस्तुओं के संदर्भ में ही कराया जाना चाहिए। बच्चों को 5 लड्डू में से 3 लड्डू घटाने ('निकालने', 'हटाने', 'कम करने') को कहा जा सकता है। इसी प्रकार से 5 चपातियों में से 3 चपातियाँ, 5 कंकड़ों में से 3 कंकड़, 5 तीलियों में से 3 तीलियाँ, वगैरह घटाने को कहा जा सकता है। इस तरह के काफी अभ्यास के बाद वे यह समझने लगेंगे कि 5 में से 3 निकालने पर 2 बचते हैं।

संबंधित भाषा से बच्चों को वाकित कराने के लिए यह किया जा सकता है कि जब क्रिया की जा रही हो तब हम साथ-साथ उससे जुड़े विभिन्न शब्द दुहराते जाएँ। ऐसी कहानियाँ और और खेल भी सोचे जा सकते हैं जिनमें घटाने से संबंधित शब्दों को उपयोग होता हो। हमें एक शिक्षक ने सुझाया कि निम्नलिखित जैसी कहानियाँ मददगार हो सकती हैं—

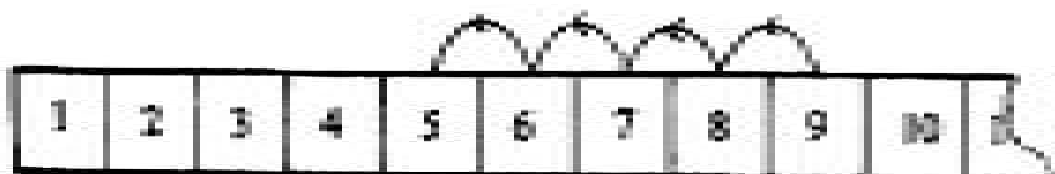
'राजू के 9 दोस्त थे। सभी को उसने अपने जन्मदिन की पार्टी पर बुलाया। लेकिन मुन्नी और पप्पू ने कहीं और जाना था, इसलिए उन्होंने मना कर दिया। तो **9 घटा 2**, यानि 7 दोस्त पार्टी पर आए।'

जरा बड़े बच्चों के लिए कहानी में और कुछ भी जोड़ा जा सकता है। मसलन, 'पार्टी में किसी वजह से 3 और दोस्त नहीं जा सके। तो कितने लोग आ रहे हैं, यह गिनने के लिए राजू ने **7 में से 3 घटा दिया।**' को ऊपर की कहानी में जोड़ सकते हैं।

हम बच्चों के लिए कुछ घटा संबंधी खेल भी बना सकते हैं, जिनमें उन्हें घटाने की क्षमता विकसित करने के अवसर मिलें। ऐसा करते हुए हमें यह ध्यान देना चाहिए कि बच्चे हर संदर्भ में इस्तेमाल होने वाली शब्दावली पर ध्यान दें। जैसे, आप बच्चों को दो टोलियों में बांट सकते हैं। एक टोली कोई घटा—तथ्य बोले और दूसरी टोली उसके अनुरूप इबारती सवाल बनाए। मसलन, यदि एक टोली बोलती है $7-3=4$, तो दूसरी टोली कह सकती है, "यदि मुन्नी और मुन्ना के पास कुल 7 पेंसिलें हैं और मुन्नी के पास 3 हैं, तो मुन्ना के पास कितनी पेंसिलें हैं?", आदि।

E9) घटाने की क्षमता विकसित करने में बच्चों की मदद करने के लिए एक खेल लिखिए।

घटाने का अभ्यास करने में बच्चों की मदद के लिए **संख्या पट्टी (number strip)** का भी इस्तेमाल किया जा सकता है। इसकी मदद से उल्टी तरफ से गिनने की क्षमता का विकास किया जा सकता है। मसलन, 9 में से 4 घटाने का मतलब यह होगा कि पहले आगे बढ़ते हुए 9 तक गिनें और फिर 4 खाने वापिस जाएं और देखें कि आप कहाँ हैं।



चित्र 3 : संख्या पट्टी की मदद से $9-4$ बताना।

एक बार बच्चों को घटाने की प्रक्रिया समझ में आ जाए, तो आप उन्हें घटाने का संकेत बता सकते हैं। यहाँ भी जरूरी होगा कि शब्द 'ऋण' तथा प्रतीक '—' से पहचान स्थापित करने के लिए उन्हें बारम्बार इनका उपयोग करने करने का अवसर मिले।

जैसा कि हम पहले देख चुके हैं, बच्ची के लिए घटाना तब ज्यादा आसान होता है जब वास्तविक चीजों का इस्तेमाल किया जाता है। वह निश्चित संख्या में चीजें अलग कर देती है और शेष बची चीजों को गिन लेती है। या वह कई सारी खड़ी रेखाएं खींचकर उनमें से जितने को घटाना है, उन्हें काटकर बाकी को गिन सकती है। वह चाहे तो संख्या पट्टी पर उल्टी तरफ से गिनती भी कर सकती है। लेकिन, अगर इनमें से किसी चीज की मदद के बगैर ही घटाने की संक्रिया शुरू की जाए, तो शायद उसे '13 में से 8 घटाओ' जैसे सवाल करने में भी मुश्किल होगी।

E10) आप बच्चों को 15—8 जैसे सवालों को हल करना किस तरीके से सिखाते रहे हैं ?

E11) 8 साल व उससे बड़े बच्चों को घटाने के कुछ सवाल दीजिए। नोट कीजिए कि वे इन सवालों को हल करने के लिए कौन-कौन से तरीके अपनाते हैं। यह भी पता करने की कोशिश कीजिए कि इन्हें हल करते वक्त वे किन दिक्कतों का सामना करते हैं।

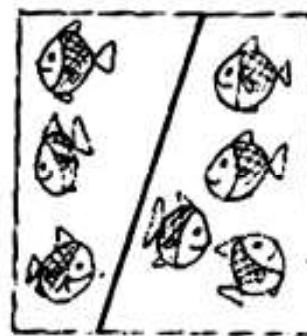
जोड़ने व घटाने का सम्बन्ध

बच्चों को जोड़ व घटा समझने में मदद करने के लिए जरूरत इस बात की है कि वे ऐसे अनुभवों से गुज़रे जिसमें जोड़ने या घटाने की जरूरत पड़ती हो। इस मामले में हमने कुछ ऐसे लोगों से चर्चा की जो यह समझने की कोशिश करते हैं कि बच्चे गणितीय अवधारणाएं किस ढंग से सीखते हैं। हमारे सवालों के जवाब में उनमें से एक व्यक्ति ने बताया कि वह कैसे बच्चों को जोड़ व घटा सिखाता है।

उदाहरण 2 : राजा कुछ वर्षों से एक प्राइमरी स्कूल में सिखाने के कई तरीके आजमाता रहा है। उसके मुताबिक बच्चों को पहले खिलौने, या खाने की चीजों, या उनके आसपास पाई जाने वाली चीजों, आदि की छोटी संख्याएं जोड़ने को कहा जाना चाहिए। इस तरह के काफी अभ्यास करने के बाद उन्हें घटाने की समझ बनाने में मदद दी जा सकती है। और जब वे घटाना सीख रहे हों, तब जोड़ने व घटाने की संक्रियाओं के परस्पर संबंध भी उनको स्पष्ट हो जाने चाहिए।

उसने पाया कि जानी-पहचानी चीजों को जोड़ने के काफी अनुभव के बाद वे सीख जाएंगे कि, 3 कंचे और 2 कंचे मिलाकर 5 कंचे होते हैं। इसी तरह के अभ्यास से वे यह भी समझ जाएंगे कि यदि 5 कंचों में से 3 कंचे हटा दिए जाएं तो शेष कितने बचेंगे। इसके बाद वह गतिविधियों से इन दो संक्रियाओं के संबंध को जोड़ने की कोशिश करता है। जैसे वह उन्हें 3 लड्डू और 2 लड्डू देकर पूछता है कि उनके पास कुल कितने लड्डू हुए। इसके बाद वह उनसे कहता है कि 5 में से 2 लड्डू अलग कर दें और बताएं कि उनके पास कितने बचे (बशर्ते कि तब तक बच्चे कुछ लड्डू खा न गए हों!) यही गतिविधि वह नाना प्रकार की वस्तुओं के साथ करता है—टॉफियां, चम्मच, गेंद, आदि—आदि। इस तरह से बच्चे 'निकालने' का मतलब समझने लगते हैं और इसका संबंध 'जोड़' से बनाने लगते हैं।

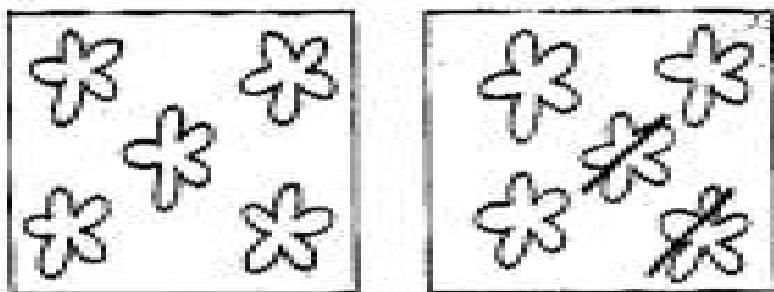
जब बच्चे थोड़ी-थोड़ी चीजों के संदर्भ में इन अवधारणाओं का अभ्यास कर चुकते हैं, तब वह उनका परिचय जोड़ के संदर्भ में चित्रात्मक प्रस्तुति से कराता है (चित्र 4 में)। साथ ही साथ, वह बच्चों को ' + ' प्रतीक भी बताता है।



$$3 + 4 = 7$$

चित्र 4 : जोड़ने के लिए चित्र कार्ड

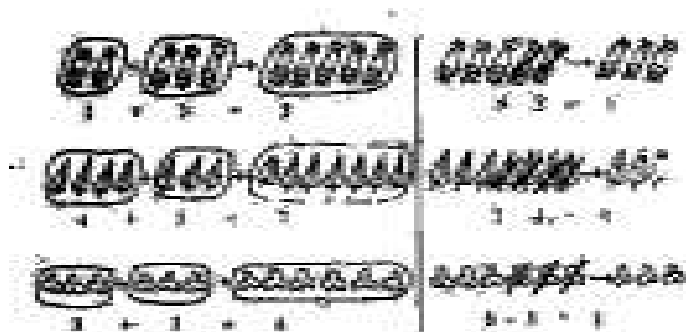
ऐसे चित्रों व प्रतीकात्मक निरूपण के अभ्यास के बाद, वह यही क्रिया घटाने के संदर्भ में करता है। इसके लिए वह पहले उन्हें चित्र 5 (क) जैसा कोई चित्र दिखाकर पूछता है, "कुल कितनी चीजें हैं?" फिर उनके सामने ही वह कुछ चीजों को जैसे 2 चीजों को, काट देता है (चित्र 5(ख) देखिए) और पूछता है, "यदि मैं दो चीजें निकाल दूँ, तो कितनी बचीं?" साथ ही साथ चित्र के नीचे वह लिख देता है $5 - 2 = 3$.



चित्र 5 : घटाने के लिए चित्र कार्ड

हाँ, यह ज़रूर है कि इस तरह के अभ्यास बार-बार, अलग-अलग तरह से करने होंगे ताकि बच्चे संबंधित भाषा व प्रतीकों के आदी हो जाएं।

इस चरण पर जोड़ने व घटाने का अभ्यास करवाने के लिए वह बच्चों को चित्रात्मक वर्कशीट भी देता है (देखें चित्र 6)।



बच्चे जोड़ने की अवधारणा को सीख पाए हैं या नहीं, यह देखने के लिए वह उनसे $6 - 4 = 2$ जैसे तथ्य को चीजों के इस्तेमाल से या चित्रात्मक रूप से प्रदर्शित करने को भी कहता है। वह उनसे जोड़ने/घटाने के

इबारती सवाल भी हल करवाता है। ये सवाल बच्चों की दुनिया से संबंधित होते हैं और वह उन्हें बहुत सरल व स्पष्ट शब्दों में प्रस्तुत करता है।

E12) रजा के तरीके के किन पहलुओं से आप असहमत हैं, और क्यों?

E13) नीचे दो विचार दिए जा रहे हैं—

1. “जोड़ना सीख जाने के बाद ही घटाने पर बात शुरू की जानी चाहिए।”

2. “जोड़ना-घटाना साथ-साथ सिखाना ज्यादा लाभदायक है।” आप किस बात से सहमत हैं? कारण सहित समझाइए।

जो बच्ची कुछ चीजों के या चित्रात्मक संदर्भ में जोड़-घटा कर सकती है, वह इस मुकाम से आगे अमूर्त चरण की तरफ काफी धीमे-धीमे जाएगी। उसे अपने उत्तर की पुष्टि के लिए और अपनी समझ को सुनिश्चित करने के लिए बारंबार ठोस चीजों या चित्रों का सहारा लेने की जरूरत पड़ती है। उसे जोड़ने-घटाने का अभ्यास सार्थक संदर्भों में कई बार करना होगा। मसलन, मेज सजाते हुए, पैसे का लेन-देन करते हुए, सफर के समय सामान की निगरानी करते हुए, आदि परिस्थितियों में उसे जोड़ने-घटाने की जरूरत पड़ती है। इसके अलावा कंचे या लूडो जैसे खेल हैं जिनमें बच्चों को जोड़-घटा से संबंधित भाषा को इस्तेमाल करने का मौका मिलता है। इसी प्रकार से किसी 7 वर्षीय बच्चों को सांप-सीढ़ी खेलते वक्त इस तरह के सवालों का जवाब देना काफी रुचिकर लगेगा कि “कितने खाने ऊपर चढ़े?”, या “कितने खाने नीचे खिसके?”। लेकिन ऐसी स्थिति में बच्ची से सवाल हल करवाते वक्त सावधानी यह रखनी होगी कि हम धैर्य से काम लें, जवाब की जल्दी न करें। उसे यह समझने का वक्त दें कि उसे करना क्या है। उसे उस प्रक्रिया के बारे में बोलने दीजिए, जिससे वह गुजर रही है। उसे धीरे-धीरे अपनी समझ बनाने दें। इससे उसमें जोड़ने/घटाने की अपनी क्षमता को लेकर आत्म विश्वास आएगा। इससे उसे यह समझने में भी मदद मिलेगी कि जोड़ना-घटाना स्वाभाविक क्रियाएँ हैं, अजनबी बातें नहीं।



चित्र - 7 बच्चे जोड़-घटा का अभ्यास करते हुए।

आजकल बच्चों को इबारती सवालों से तभी वास्ता पड़ता है जब वे जोड़ने और घटाने के औपचारिक सूत्रों को ‘सीख’ चुके हों। और तब उनसे जो सवाल पूछे जाते हैं, उनमें से अधिकतर बहुत पेचीदा और बच्चों की दुनिया से हटकर होते हैं।

उदाहरण के लिए कक्षा 3 के बच्चों को ‘अधिकारियों के वेतन’ और ‘विविध मद’ सम्बन्धी सवाल दिए जाते हैं। ये शब्द ही बच्चों के लिए अनसुने होते हैं। साथ ही, बच्चे यह भी जानते हैं कि शिक्षक ‘सही उत्तर’ चाहते हैं। आम शिक्षक बच्चों को इस बात के लिए प्रोत्साहित नहीं करते कि वे पूरा समय लगाकर सवाल में दी गई स्थिति को समझ सकें, और यह भी समझ सकें कि क्या किया जाना है। लिहाजा सवाल को समझने या उसका विश्लेषण करने की बजाय बच्चे सवाल में क्या किया जाना है। यदि सवाल में बच्ची को ‘और कितने’ शब्द नजर आ जाएं तो वह तुरन्त दी गई संख्याओं को जोड़ देगी क्योंकि उसके लिए ‘और’ शब्द जोड़ का संकेत है, हालांकि हो सकता है कि सवाल का उत्तर निकालने के लिए जरूरत घटाने की रही हो।

इसलिए यह जरूरी है कि लगभग शुरु से ही बच्चों को सोच समझकर सरल शब्दों में दिए गए इबारती सवालों का अभ्यास कराया जाए। जैसे-जैसे बच्ची अवधारणाओं से परिचित होती जाए वैसे-वैसे सवालों को ज्यादा पेचीदा बनाया जा सकता है। जोड़ के वृद्धि किस्म के सवाल एकत्रीकरण किस्म के सवालों के काफी बाद करवाए जा सकते हैं। दरअसल, कुछ लोगों का मानना है कि वृद्धि किस्म के सवाल तो घटाने के विभाजन व तुलना मॉडल के सवालों के बाद ही करवाना उचित होगा।

E14) अभ्यास E5 व E8 में अपने द्वारा बनाई गई उदाहरणों की सूची को देखिए। हर उदाहरण के सामने लिखिए कि बच्चों की समझ के किस चरण पर आप उनके सामने वह सवाल रखेंगे।

E15) जब बच्ची कोई सवाल हल कर रही हो, तब शिक्षक के लिए कौन-सी बात ज्यादा अहमियत रखती है – बच्ची जिन मानसिक प्रक्रियाओं से गुजर रही है, या सही उत्तर, या दोनों ही ? अपने उत्तर का कारण भी दीजिए।

जब बच्चे जोड़ने व घटाने की अवधारणाएं समझ चुके हों, तब जरूरत होगी कि वे इन संक्रियाओं का कुशलता के साथ इस्तेमाल करना सीखें। हम सभी जानते हैं कि $1 + 1 = 2$, $3 - 2 = 1$ या $4 + 3 = 7$ जैसे जोड़-बाकी तथ्य याद हों, तो जोड़-घटा के सवालों को जल्दी से करने में मदद मिलती है। निम्नलिखित गतिविधियों के जरिये बच्चे इन तथ्यों को दिलचस्प तरीके से दोहरा सकेंगे, और इस तरह इनको अपने मन में ठीक से बैठा पाएंगे।

● 10 – 10 बच्चों की टोलियां बनाएं। ब्लैकबोर्ड पर जोड़ने- घटाने के अधूरे कथन लिख दें। कॉलम उतने ही हों जितनी टोलियां हैं तथा हर कॉलम में दस-दस सवाल हों। मसलन, अगर 5 टोलियां हैं, तो आप निम्नलिखित कॉलम बना सकते हैं।

I	II	III	IV	V
$2 + 3 = \square$	$1 + 7 = \square$	$5 - 2 = \square$	$6 + 3 = \square$	$7 - 4 = \square$

टोली नम्बर 1 कॉलम I के सवालों के जवाब दे टोली नम्बर 2 कॉलम II के सवाल करें, वगैरह। जैसे ही शिक्षक 'शुरु' कहें, वैसे ही हर टोली की पहली बच्ची ब्लैकबोर्ड पर आप और अपने कॉलम की पहली समीकरण पूरी करे। इसके बाद हर टोली की अगली बच्ची आकर अगला सवाल करे। इसके बाद अगला सवाल हल करे। जो टोली दसों सवाल सही-सही हल करे, वह विजेता।

बड़े बच्चों के लिए समीकरण ज्यादा ऊंचे स्तर की समझ को आजमाने के लिए बदले जा सकते हैं। मसलन आप इनमें पूरक जोड़ और घटा के ऐसे सवाल जोड़ सकते हैं :

$$5 - \square = 2 \text{ और } \square + 3 = 5$$

● आप बच्चों को ए और बी, दो टोलियों में बांट सकते हैं। बी टोली की एक बच्ची जोड़-बाकी का एक अधूरा कथन ब्लैकबोर्ड पर लिखें (जैसे $3 + 7 = \dots\dots\dots$) और ए टोली के किसी सदस्य से उसे पूरा करने को कहे। यदि वह उसे सही-सही पूरा कर दे तो ए टोली को 1 अंक मिलेगा। यदि वह नहीं कर पाती, तो बी टोली को 1 अंक मिलेगा। जिस टोली को अंक मिले वह अब एक और अधूरा जोड़-बाकी कथन ब्लैकबोर्ड पर लिखे

और दूसरी टोली के किसी बच्चे से उसे पूरा करने को कहे। खेल का रूप तथा अंक देने का तरीका आप जो सिखाना चाहते हैं उसके अनुरूप बदल सकते हैं। अहम् बात यह है कि बच्चे अभ्यास गतिविधि में मगन हो सकें, और उन्हें मजा भी आए।

- ब्लैकबोर्ड पर तालिका 1 और 2 में दर्शाए अनुसार अधूरे जोड़ या बाकी का चार्ट बनाइए।

आप बच्चों को समझा दें कि चार्ट का उपयोग कैसे करना है। अब बच्चे एक-एक करके आएँ और चार्ट की कतारों व कॉलमों को देखकर एक-एक खाना भरते जाएँ।

- जोड़ बाकी का कुछ अभ्यास संख्या पट्टी के जरिए (चित्र 3) भी किया जा सकता है।

इनमें से हर गतिविधि में बच्चों से कहें कि वे जो भी जोड़-बाकी तथ्य पेश कर रहे हैं, उसे प्रतीकों के रूप में स्पष्ट तरीके से बोलें और लिखें।

E16) उपरोक्त गतिविधियों के अलावा कोई गतिविधि सुझाइए जिससे बच्चों को जोड़/बाकी तथ्यों को सीखने में मदद मिले।

ऐल्गोरिद्म इस्तेमाल करने की समस्याएँ

हमेशा बच्चों से अपेक्षा की जाती है कि वे संख्याओं को जोड़ने व घटाने के ऐल्गोरिद्म को मशीनी रूप से लागू करें, चाहे वे उनमें शामिल प्रक्रियाओं को समझे हों या नहीं। ऐसे में होता यह है कि बच्चे इन नियमों को लागू करने में गलतियाँ करते हैं। आखिरकार, बच्चे ऐसे तर्कहीन (उनके हिसाब से) नियमों को कितना व कब तक याद रख सकते हैं?

जरा गलतियों के कुछ नमूने देखिए:

$$\begin{array}{r} 205 \\ - 21 \\ \hline 224 \end{array}$$

इन गलतियों के कारण क्या हैं? हो सकता है कि

- i) बच्चे संबंधित संक्रिया को नहीं समझ पाए हैं, और/या
- ii) वे दो या दो से अधिक अंकों की संख्यांक लिखने का तर्क नहीं समझ पाए हैं, और/या
- iii) वे पुनर्समूहीकरण (यानी हासिल-उधार) नहीं समझे हैं।

हमें यह भी नहीं भूलना चाहिए कि कई समस्याएं इसलिए उत्पन्न होती हैं क्योंकि बच्चे को 'शून्य की अवधारणा स्पष्ट नहीं होती। इसका कारण यह हो सकता है कि उसे यह बताया गया है कि 'शून्य' का मतलब 'कुछ नहीं' होता है। शायद इसी कारण से 205 जैसी गलतियाँ होती हैं।

तो हम इस स्थिति में सुधार कैसे कर सकते हैं? पिछले भागों में हमने उन तरीकों की बात की थी जिनके इस्तेमाल से बच्चों को जोड़-घटा की संक्रियाएँ व संबंधित भाषा सीखने में मदद मिल सकती है।

पुनर्समूहीकरण के संदर्भ में, जरा यह देखें कि 8 वर्षीय राधा को 'उधार' की अवधारणा सीखने में किसी तरह मदद दी गई थी।

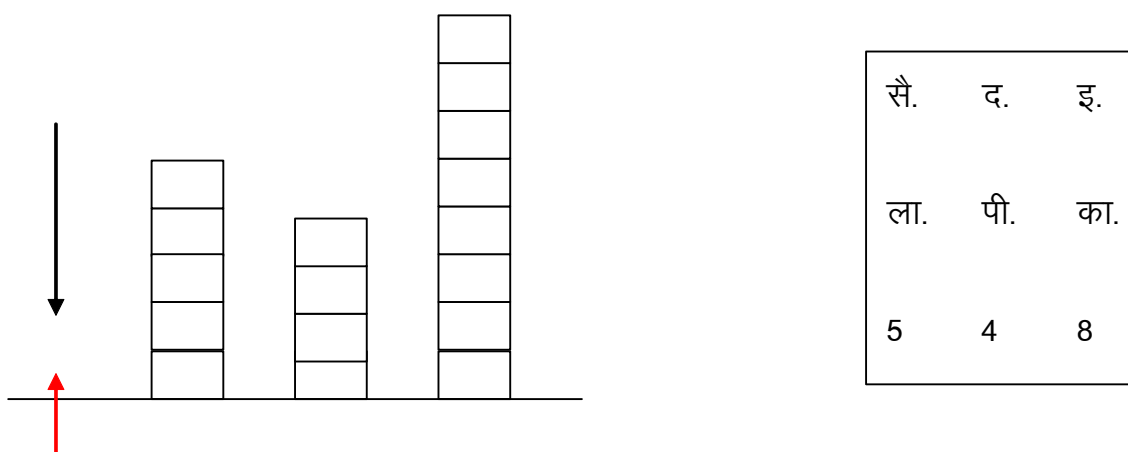
E17) इस अध्याय में 'एल्गोरिद्म इस्तेमाल करने की समस्याएँ' उपशीर्षक के अन्तर्गत हासिल वाले जोड़ के लिए एक गतिविधि सुझाई गई है। (जिसमें काले, पीले एवं लाल कार्ड—कार्ड के टुकड़ों का प्रयोग हुआ है।)

अपनी कक्षा में हासिल वाला जोड़ सीखाने के लिए इस गतिविधि का उपयोग कीजिए। बच्चों के साथ काम करते हुए होने वाले अनुभवों को लिखिए।

उदाहरण 3 : एक साल पहले कक्षा 2 में राधा के शिक्षक ने इकाई/दहाई/सैकड़ा की अवधारणा कई गतिविधियों के माध्यम से समझाई थी। परंतु राधा उस समझ का उपयोग अब 'हासिल' और 'उधार' वाले सवाल में नहीं कर पा रही थी। उसकी मदद के लिए मैंने उसके साथ एक खेल खेलने की सोची।

मेरे पास कार्ड बोर्ड के कुछ वर्गाकार (1 वर्ग इंच) टुकड़े थे — 15 काले, 15 पीले और कुछ लाल। मैंने राधा से कहा कि हम इनसे एक खेल खेलेंगे। एक कागज पर मैंने 9 इंच की दूरी पर दो आड़ी समान्तर रेखाएँ खींच दीं। फिर मैंने उसे समझाया कि हम इन वर्गाकार टुकड़ों से संख्याएँ कैसे दर्शाएंगे — काले टुकड़े इकाइयों की संख्या दर्शाएंगे, पीले टुकड़े दहाई और लाल टुकड़े सैकड़ों की संख्या दर्शाएंगे और सबसे दाएँ कॉलम में इकाइयाँ होंगी, अगले कॉलम में दहाई और तीसरे कॉलम में सैकड़ा की संख्या होगी। मैंने उसे कुछ उदाहरण भी दिखाए (चित्र 8 (क) देखें)।

शुरुआती हिचक के बाद वह इस तरह के प्रदर्शन से परिचित हो गई। हर बार जब वह कोई संख्यांक दर्शाती, तो मैं उससे कहती कि वह संख्या को दर्शाने के लिए लाल, पीले, काले टुकड़ों की संख्या को तीन कॉलम वाली तालिका में लिखे। तालिका के प्रत्येक कॉलम के शीर्ष पर क्रमशः ला., पी., और का. लिखा हो (ला., लाल के लिए, वगैरह)। मैंने उसे ला., पी. और का. के ऊपर सै., द., इ. भी लिखने को कहा, जैसा कि चित्र 8 (ख) में दिखाया गया है।



चित्र 8 : 548 का प्रदर्शन — (क) कार्डों से,

(ख) दशमलव प्रणाली में

अब मैंने उसे बताया कि खेल का एक नियम यह है कि हम रेखाओं को पार नहीं कर सकते। इसका मतलब यह हुआ कि हर कॉलम में हम 9 टुकड़े ही रख सकते हैं।

मैं : क्या हमें किसी कॉलम में 9 से ज्यादा टुकड़ों की जरूरत होगी ?

राधा : हाँ।

मैं : अच्छा, कोई संख्या सोचो जिसमें तुम्हें एक कॉलम में 9 से ज्यादा टुकड़े लगेंगे। (थोड़ी देर सोचने के बाद मैं उसे अपनी गलती का अहसास हो गया।)

राधा : नहीं, 9 के बाद हम दहाई पर चले जाते हैं।

मैं : शाबाश! और दहाई के कॉलम में क्या होगा ? क्या उसमें तुम्हें नौ से ज्यादा पीले टुकड़े लगेंगे?

राधा : नहीं, तब हम सैकड़ा के कॉलम में चले जाएंगे।

स्पाइक अबेकस (spike abacus) के इस घरेलू रूप के साथ हम थोड़ी देर और खेले। इसके बाद हमने इस साधन का उपयोग करते हुए दो संख्याओं का जोड़ शुरू किया। शुरुआत $15 + 21$ से की। पहले तो वह ठीक से समझ नहीं पा रही थी कि इसे कैसे करे। जब उसे कुछ संकेत दिए तो उसने सोचा कि दो कागजों का इस्तेमाल करेगी। — एक 15 दर्शाने के लिए और दूसरा 21 के लिए। फिर थोड़ा सोचने के बाद और थोड़ी बातचीत के बाद उसने 21 के काले टुकड़े को 15 के पांच काले टुकड़ों के ऊपर रख दिया, और दो पीले टुकड़ों को 15 के एक पीले टुकड़े के ऊपर। उसे वही जवाब मिला जो वह चाहती थी।

यहाँ तक तो ठीक चला। ऐसे कुछ और अभ्यास करने के बाद हम उन स्थितियों की ओर बढ़े जहाँ लेन-देन (हासिल-उधार) जरूरी हो। मसलन, $15 + 16$ में। पहले उसने 15 और 16 को अलग-अलग दर्शाया। फिर उसने 16 के 6 काले टुकड़ों को 15 के 5 काले टुकड़ों के ऊपर रखा और 16 के पीले टुकड़े को 15 के पीले टुकड़े के ऊपर रख दिया।

मैं : लेकिन तुम्हारे काले टुकड़े तो ऊपरी रेखा को पार कर गए हैं। इसके बारे में क्या करोगी?

राधा : हाँ, हाँ, याद है। मैं इनमें से दस हटाकर उसकी जगह एक पीला टुकड़ा रख सकती हूँ।

मैं : शाबाश! यानी तुम 10 काले टुकड़ों के बदले एक पीला टुकड़ा रख सकती हो। दस इकाई के बदले एक दहाई। तो तुम दहाई के कॉलम में एक और दहाई जोड़ होगी। इसका मतलब है कि तुम दहाई कॉलम में **1 हासिल करोगी।**

यह करने के बाद उसने लिख लिया कि अब उसके पास कितने काले और कितने पीले टुकड़े हैं। बस, उत्तर आ गया 31. मैंने उससे कहा कि अब तक हमने जो कुछ किया उसे उसी तरह लिखेंगे जिस तरह हमने संख्याओं को लिखा था। शुरु में कुछ मदद के बाद उसने यह काम कर डाला, जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

सै.	द.	इ.
ला.	पी.	का.
1	5	
— 1	6	
2	11	= 2 पीले + 11 काले = 2 पीले + 1 पीला + 1 काला
3	1	= 3 पीले + 1 काला

हमने इस तरह के कई और अभ्यास किए ताकि वह ठोस प्रस्तुति को अमूर्त ऐल्गोरिद्म से जोड़ना सीख पाए।

इसके बाद हमने ऐसे सवाल उठाए जिनमें लाल टुकड़ों, यानी सैकड़ा, की जरूरत पड़े। हमने $57 + 66$ जैसे कई सवाल किए, और जो कुछ किया उसे साथ-साथ लिखते गए। उसे तीन अंकों की संख्याओं के साथ 'हासिल' की बात पकड़ने में देर न लगी।

यह काम करते हुए मैं उससे लगातार पूछती जाती थी कि मुझे समझाए कि वह क्या कर रही है। जल्दी ही मैंने देखा कि वह संबंधित गणितीय भाषा का इस्तेमाल काफी सहजता से करने लगी है।

कुछ दिनों बाद हमने इस गतिविधि को थोड़ा और आगे बढ़ाया। फिर $+ 25$ जैसे सवाल बगैर वर्गाकार टुकड़ों के किए। धीरे-धीरे वह दो अंकों का कोई भी जोड़ आसानी से करने लगी और 'हासिल' की अवधारणा की आदी हो गई।

E18) बच्चों को 'उधार' की अवधारणा समझने में मदद के लिए एक गतिविधि विस्तार में लिखिए।

इस खंड में हमने देखा कि जब बच्चे आँख मूंदकर किसी 'विधि' को बगैर समझे इस्तेमाल करते हैं तो किस तरह की गलतियाँ होती हैं। कई बार तो वे यह भी नहीं समझ पाते कि उनका उत्तर कितना उटपटाँग है। यदि वे मन में इतना अंदाजा भी लगा पाएं कि उत्तर क्या होना चाहिए तो वे समझ जाएंगे कि 'कहीं कुछ गड़बड़' जरूर है। तो उनकी अंदाजा लगाने की क्षमता का विकास कैसे करें? अब हम इसी सवाल का उत्तर देने की कोशिश करेंगे।

अंदाजा लगाने का कौशल विकसित करना

पांच ग्रामीण स्कूलों के तीसरी व चौथी कक्षा के बच्चों के साथ एक अध्ययन यह जानने के लिए किया गया था कि वे मानक ऐल्गोरिद्मों को कितनी हद तक ठीक से समझते हैं। बच्चों को $1234 + 469$ जैसे सवाल हल करने के लिए दिए गए। जवाब बहुत दिलचस्प थे। कई जवाब ऐसे थे :

1234	1234
+ 469	+ 469
5924	16913

खुद बच्चों को ऐसे उत्तरों पर कोई आश्चर्य नहीं हुआ। जाहिर है कि लगभग क्या उत्तर होना चाहिए उस का अंदाज लगा पाने की उनमें क्षमता नहीं थी। इसलिए उन्होंने खुद से यह सवाल ही नहीं किया कि "क्या मेरा उत्तर ठीक लगता है?"।

उत्तर का अंदाजा लगाने की क्षमता महत्वपूर्ण क्यों हैं? क्या हम रोजाना इसका इस्तेमाल बारम्बार नहीं करते? मसलन, जब हम खरीददारी करने निकलते हैं और जल्दी से यह देखना चाहते हैं कि क्या चीजों की कुल कीमत हमारे बजट के अंदर रहेगी, तो क्या हम इसी क्षमता का उपयोग नहीं करते?

उत्तर का अंदाजा लगाने की क्षमता से गणितीय गलतियाँ पकड़ने में भी मदद मिलती है। कैल्कुलेटर (calculator) का इस्तेमाल करते वक्त भी, इस क्षमता से हमें यह जांच करने में मदद मिलती है कि कहीं हमने गलत बटन तो नहीं दबा दिया। नीचे दिए गए अभ्यास को करते वक्त आप ऐसे और तरीके सोचिए जिनसे यह क्षमता आपकी मदद करती है।

E19) दो ऐसी स्थितियां बताइए जिनमें आपको दो संख्याओं के जोड़ या अंतर के लगभग सही उत्तर का तुरंत अंदाजा लगाना पड़ता है।

इस क्षमता को विकसित करने के लिए लोग कई तरीकों का उपयोग करते हैं। मसलन, 1821, 695 और 250 को जोड़ते वक़्त कुछ लोग मन में अंदाज़ा लगाने के लिए

(i) इन संख्याओं को 'राउंड ऑफ़' (सन्निकटन) करके इन नई संख्याओं से गणना कर सकते हैं :

$$1800 + 700 + 200 \text{ या } 1800 + 700 + 300$$

(ii) सबसे बाईं ओर के अंकों के आधार पर एक मोटा अनुमान लगाने के बाद बाकी अंकों को देखकर अपने अंदाज़े को घटा-बढ़ा सकते हैं :

$$\text{पहले } 1000 + 600 + 200, \text{ और फिर } 800 + 100 + 50 \text{ जोड़ा।}$$

इसके अलावा भी कई तरीके हैं, जैसे संख्याओं के झुण्ड बना लेना, या सुसंगत संख्याओं को जोड़ लेना, वगैरह। कब, कौन सा तरीका इस्तेमाल होगा, यह तो सवाल पर निर्भर करता है।

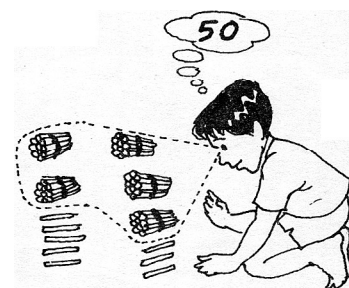
सावधानीपूर्वक दिए गए निर्देशों, बातचीत और अभ्यास द्वारा ही ये, व अन्य ऐसे तरीके विकसित किए जा सकते हैं।

इस संदर्भ में निम्नलिखित स्थिति पर गौर कीजिए।

उदाहरण 4 : प्राइमरी स्कूल की शिक्षक शीला ने यह समझ लिया था कि बच्चों को गणितीय संक्रियाएं सिखाने का एक अहम पहलू यह है कि उनमें अपेक्षित परिणाम का अंदाज़ा लगाने की क्षमता विकसित की जाए। ऐसा करने के लिए शीला बच्चों की उन गलतियों का ही सहारा लेती है जो वे सूत्र लागू करते समय करते हैं।

मसलन, शीला ने 8 वर्षीय राजू को $\frac{23}{+17}$ हल करने को दिया। राजू का उत्तर 310 आया। शीला ने उससे पूछा कि यह उत्तर कैसे आया। राजू ने उसे अपना उत्तर समझाया। तब शीला ने पूछा, "यदि तुम्हारे पास 23 गोलियां हैं और कोई तुम्हें 17 गोलियां और दे दे, तो क्या तुम्हारे पास 300 से ज़्यादा गोलियां हो जाएंगी?" राजू ने कहा, "बिल्कुल नहीं।" "तो तुम्हारे पास कितनी गोलियां होंगी?" अब उसने जोड़ के लिए अलग तरीका इस्तेमाल किया और सही उत्तर निकाल लिया।

शीला ने राजू के साथ अंदाज़ा-संबंधी कुछ और गतिविधियां करने की ठानी। इसके लिए उसने दस-दस तीलियों के कुछ बंडल तथा कुछ खुली तीलियां जुटाईं। उसने राजू से 33 तीलियां और 25 तीलियां जोड़ने को कहा। राजू ने पहले 3 बंडल और 3 तीलियां ले लीं और फिर 2 बंडल और 5 तीलियां और ले लीं। शीला ने राजू से तुरंत यह बताने को कहा कि क्या ये चालीस से ज़्यादा होंगी। थोड़ा सोचकर उसने जवाब दिया, "हां, पांच बंडल हैं, तो ये चालीस से ज़्यादा होंगी।"



"बढ़िया! क्या ये 70 से ज़्यादा होंगी?"

"नहीं, पांच बंडल हैं, तो ये पचास ही होना चाहिए।"

"और खुली तीलियां? क्या वे 20 से ज़्यादा हो सकती हैं?"

"नहीं।"

“क्यों?”

यहाँ पर धैर्य से तथा कुछ उदाहरणों की मदद से शीला उसे यह समझाने में सफल रही कि किसी भी संख्या में 9 से ज़्यादा इकाइयाँ नहीं हो सकती। और, इस तरह से, वह यह समझ गया कि दो संख्याओं की इकाइयाँ जुड़कर 2 बंडल से ज़्यादा नहीं हो सकती, यानी 2 दहाइयों से ज़्यादा नहीं हो सकती।

ऐसे ही कुछ और उदाहरणों के जरिए राजू धीरे-धीरे वह बात समझ पाया जो शीला, चाहती थी — कि दो अंकों की संख्या जोड़ते वक्त हम पहले उन संख्याओं के दहाई के अंकों को जोड़कर जोड़ा का अंदाजा लगा सकते हैं। जल्दी ही वह अमूर्त सवालों में इस कौशल का इस्तेमाल आसानी से करने लगा। अब उसे तीलियों के इस्तेमाल की जरूरत नहीं थी।

शीला ने उसे यह भी समझने में मदद दी कि कैसे अंदाजा लगाने का इस्तेमाल करके वह यह जांच कर सकता है कि गणना से उसे जो उत्तर मिला है, वह सही लगता है या नहीं। उसने कई उदाहरणों के माध्यम से इस बात को दर्शाया। इसके बाद शीला ने उसे कुछ सवाल दिए और उनके लगभग उत्तर तथा ठीक उत्तर दोनों निकालने को कहा।

अपने इस अनुभव से शीला यह समझ गई कि किसी बच्ची में यह क्षमता विकसित होने के लिए जरूरी है कि वह बारम्बार इसका अभ्यास करती रहे। इसलिए वह अक्सर राजू को ऐसे सवाल देती रहती है कि ‘यदि वह 60 रुपये लेकर बाजार जाए, तो क्या वह 35 रुपये की किताबें और 17 रुपये की पेंसिलें खरीद पाएगा?’।

E20) दो या दो से ज़्यादा अंकों वाली संख्याओं के अंतर का अंदाजा लगाना सीखने में बच्चों को मदद देने के लिए आप किस तरीके का इस्तेमाल करेंगे?’

अंदाजा लगाना एक ऐसा कौशल है जिसे कई संदर्भों में विकसित करना होता है।

सारांश

इस पाठ में हमने निम्नलिखित बातों पर चर्चा की:

- 1) बच्चों को जोड़ने व घटाने की संक्रियाओं का अर्थ समझाने के कुछ तरीके।
- 2) जोड़ने व घटाने से संबंधित इबारती सवालों की अलग-अलग किस्में जो बच्चों के सामने आती हैं।
- 3) लगभग शुरू से ही बच्चों को इबारती सवाल करवाने का महत्व।
- 4) जोड़ने/घटाने के ऐल्गोरिद्मों का उपयोग करते वक्त बच्चे गलतियाँ क्यों करते हैं।
- 5) इन दो संक्रियाओं में ‘हासिल’ व ‘उधार’ की अवधारणा समझने में बच्चों की मदद कैसे करें।
- 6) संख्याओं के योग/अंतर का अंदाजा लगाने की क्षमता बच्चों में कैसे विकसित करें।

पाठ — 7

गुणा और भाग करना

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - गुणा करने से पहले गुणा की समझ
 - पहाड़े या तोता रटंत?
 - गुणा का एल्गोरिदम
 - भाग का मतलब
 - भाग का एल्गोरिदम
- सारांश

परिचय

कक्षा 5 के बच्चे को यह सवाल दिया गया; “यदि 30 पेंसिल बॉक्सों की कीमत 60 रुपये है, तो एक पेंसिल बॉक्स कितने का होगा?” उसने उत्तर दिया कि एक पेंसिल बॉक्स $60 \div 30 = 1800$ रुपये का होगा। इस तरह के और भी कई बच्चे सवालों को हल करते हैं।

ये हालात क्यों बने? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए हमें अपने सिखाने के तरीकों की गहराई से छानबीन करनी होगी। पिछली इकाई में हमने जोड़-बाकी के संदर्भ में इस तरह की छानबीन की थी। इस इकाई में हम बच्चों को गुणा व भाग के विभिन्न पहलुओं को समझाने के कुछ तरीके सुझाएंगे। आप इन तरीकों को पूरी तरह अपना सकते हैं, या इनमें सुधार करके अपना सकते हैं या इन्हें नामंजूर कर सकते हैं।

सबसे पहले हम बच्चों को गुणा से परिचित कराने के तरीकों पर गौर करेंगे। जोड़ व बाकी की तरह गुणा का उपयोग भी रोजमर्रा के जीवन में काफी होता है। जैसे, अगर हम 5 रुपये किलो के भाव से 10 किलोग्राम चावल खरीदें, तो हम गुणा करके ही पता करते हैं कि कुल कितना भुगतान करना है या जब 50 लोगों के लिए खाने का इन्तजाम करना हो, तो हम कुल खर्च का अन्दाजा लगाने के लिए गुणा का ही सहारा लेते हैं। इसी तरह के आप कई और उदाहरण जानते होंगे। पहले दो भागों में हम देखेंगे कि कैसे बच्ची के रोजमर्रा के अनुभवों के ज़रिए हम उसे यह समझा सकते हैं कि गुणा क्या होता है और कहाँ-कहाँ लागू किया जा सकता है।

हम उन समस्याओं पर गौर करेंगे जो पहाड़ों को बिना समझे रटने की वजह से उत्पन्न होती हैं। कुछ लोग मानते हैं कि बच्चों को पहाड़े इसलिए रटवाए जाते हैं ताकि वे गुणा के बुनियादी तथ्य

दिमाग में बैठा लें, और जब भी ज़रूरत हो तब तुरंत इनका उपयोग कर सकें। इस भाग में हम चर्चा करेंगे कि क्यों इस लक्ष्य तक पहुंचने के लिए तोतारटन्त उपयोगी नहीं है। ज़रूरत दरअसल इस बात की है कि बच्चों के लिहाज़ से सार्थक व दिलचस्प ढंग से गुणा के तथ्य बारम्बार दोहराए जाएं।

हम उन समस्याओं की चर्चा करेंगे जो गुणा का ऐल्गोरिद्म सिखाने के आम तरीके की वजह से उत्पन्न होती हैं। जब बच्चे मशीनी ढंग से सवाल हल करते हैं, वे यह समझ नहीं पाते कि वे जो कुछ कर रहे हैं, उसका अर्थ क्या है, और इसलिए उनके उत्तर अपेक्षित उत्तर से कोसों दूर होते हैं। दरअसल ज़रूरत इस बात की है कि बच्चे तथ्यों से आगे भी कुछ सीखें, और कुछ दी गई संख्याओं पर ऐल्गोरिद्म लागू करने की क्षमता से ज्यादा कुछ हासिल कर पाएं। हम इस दृष्टि से बच्चों की मदद करने के कुछ तरीकों पर विचार करेंगे।

कई लोग भाग को गणित की चार बुनियादी संक्रियाओं में सबसे मुश्किल मानते हैं। हम भाग की चर्चा से शुरुआत करेंगे। हम यहाँ भाग से संबंधित ऐसे इबारती सवालों भाग से जुड़े शब्दों को सीखने में व भाग के ऐल्गोरिद्म के साथ यहाँ हमने यह भी बताया है कि यह सूत्र क्यों कारगर होता है।

इस पाठ में भी हमने ऐसी कई गतिविधियाँ शामिल की हैं जिनकी मदद से बच्चे इन अवधारणाओं को रुचिकर तरीके से सीख सकें।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आप

- गुणा/भाग का अर्थ समझा सकेंगे तथा विभिन्न संदर्भों में इन्हें इस्तेमाल कर सकेंगे;
- गुणा/भाग के प्रतीकात्मक उदाहरणों को कहानियों में तथा कहानियों को सांकेतिक तथ्यों में तब्दील कर सकेंगे।
- गुणा/भाग का अर्थ समझा सकेंगे तथा विभिन्न संदर्भों में इन्हें इस्तेमाल कर सकेंगे;

गुणा करने से पहले जानने योग्य बातें

आम भाषा में गुणा शब्द का अर्थ यह लगाया जाता है कि किसी चीज़ में 'काफी वृद्धि'। अंकगणित के संदर्भ में गुणा का अर्थ ज्यादा सटीक है। यहाँ भी इसका अर्थ वृद्धि से होता है, मगर कितनी वृद्धि, यह दी गई संख्याओं पर निर्भर करती है। गुणा की संक्रिया का मतलब यह होता है कि हम दी गई संख्या को निश्चित बार उसी में जोड़े। जैसे, 4 गुणा 3 का अर्थ $4+4+4$ होता है। लिहाज़ा गुणा सिखाना शुरू करने से पहले ज़रूरी है कि बच्चे कुछ हद तक जोड़ की संक्रिया जानते हों। लेकिन **यह कतई ज़रूरी नहीं है कि गुणा सीखने से पहले के जोड़ में महारत हासिल कर चुके हों**। यदि वे जोड़ को लेकर परेशानी महसूस ना करते हों, और आसान संदर्भों में इसका अर्थ समझने लगे हों, तो गुणा सीखने की प्रक्रिया शुरू की जा सकती है। जोड़ सिखाना साथ-साथ जारी रहेगा, और इससे बच्चों को दोनों प्रक्रियाओं को समझने में मदद मिलेगी।

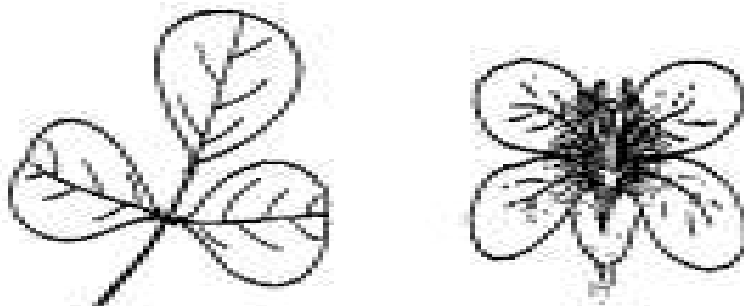
बच्चों को गुणा से परिचित कैसे कराएं? आमतौर से बच्चे इस अवधारणा का सामना पहली बार कक्षा 2 (6-7 वर्ष की उम्र) में असंबंधित तथ्यों की एक श्रृंखला के रूप में करते हैं। बच्चों को ये तथ्य याद कर लेने होते हैं। इसलिए 9 साल की बच्ची 28×3 हल करने के तुरंत बाद मुझे 29×3 नहीं बता पाई।

तो हम बच्चों को यह समझने में कैसे मदद करें कि गुणा का मतलब क्या होता है ? सबसे पहले तो हमारे सामने यह स्पष्ट होना चाहिए कि गुणा सीखने से पहले बच्चों को क्या-क्या जानना ज़रूरी है। जोड़ की समझ के अलावा बच्चों को **बराबर मात्रा के समूह बनाना** तथा **इन समूहों को जोड़ना** आना चाहिए। इसके बाद ही गुणा के औपचारिक रूप से बच्चों का परिचय कराया जाना चाहिए।

यहाँ हम बाकी की दो क्षमताएँ विकसित करने की चर्चा करेंगे।

बराबर मात्रा के समूह बनाना

पहली या दूसरी कक्षा में पहुँचने तक बच्चों को चीजों की जोड़ियों के कई अनुभव हो चुके होते हैं। जैसे एक जोड़ी जूते, एक जोड़ी आँखें, कान, हाथ, पैर, पंख, आदि। उन्होंने तीन-तीन के समूह भी देख होंगे, जैसे तिपाये की तीन टांगें, पलाश के पत्ते (चि. 1 (क)), बिजली के पंखे की पत्तियाँ। या, यदि हम चार-चार के समूह की बात करें, तो वे सरसों के फूल की पंखुड़ियों (चित्र 1(ख)), मेज या कुर्सी की टांगों, कार के पहियों आदि को जानते होंगे। एक दी गई मात्रा के समूहों को इकट्ठा करने की बात समझाने के लिए आप उनसे ऐसे छोटी-छोटी संख्याओं वाले आमतौर पर दिखने वाले समूह पहचानने को कह सकते हैं। उनसे बीज, तिनके, मोती, कंचे आदि जुटाने को भी कहा जा सकता है। हर बच्ची (या बच्चों के समूह) अपने मनपसन्द बराबर मात्रा के समूह बनाए।



चित्र 1 : (क) पलाश के पत्तों का एक समूह, (ख) सरसों का फूल

इसी बात के लिए एक गतिविधि हो सकती है 'अंक कहानी' बताना। आप एक ऐसी काल्पनिक कहानी बना सकते हैं जिसमें दो-दो (या तीन-तीन, चार-चार) के समूह नजर आएँ। मसलन, आप कह सकते हैं कि, "अब मैं तुम्हें 'दो' की कहानी सुनाता/सुनाती हूँ। कहानी सुनकर तुम्हें यह बताना है कि इसमें दो-दो के कितने समूह हैं।

इसी तरह की गतिविधि आप चित्रों के साथ भी कर सकते हैं। चित्र में कई चीजें (पक्षी, जानवर, वगैरह) अलग-अलग मात्रा के समूहों में हों। बच्चों से पूछ सकते हैं कि चित्र में दो-दो चीजों वाले समूह पहचानें, फिर तीन-तीन चीजों वाले समूह पहचानें।

जब बच्चे बराबर मात्रा के समूहों को जोड़ते हैं, तो गुणा की शुरुआत होती है। आइए देखें कि बच्चों को यह क्षमता हासिल करने में मदद कैसे की जाए।

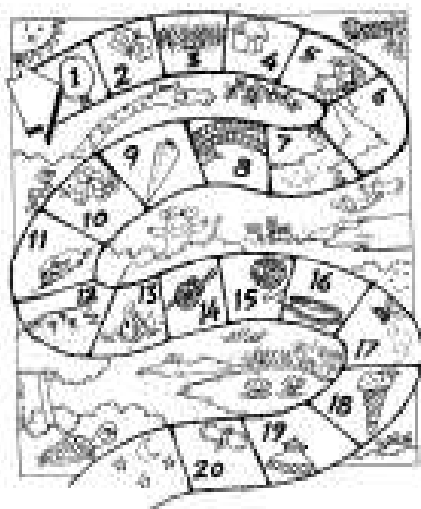
बराबर मात्रा के समूहों को जोड़ना

जब बच्चे बराबर मात्रा के समूह बनाने का काफी अभ्यास कर लें, तब आप उनसे इनमें से कुछ समूहों को जोड़ने को कह सकते हैं। अब वे '3-3 कंचे वाली थैलियों में कुल कितने कंचे होंगे?' जैसे सवालों को हल करने की कोशिश कर सकते हैं। धीरे-धीरे वे ज्यादा संख्या में बड़ी मात्राओं के बराबर समूहों का जोड़ना शुरू कर सकते हैं। मसलन, 6-6 चीजों वाले 5 समूहों का जोड़। इस तरह की गतिविधि करते हुए बच्चे धीरे-धीरे बराबर मात्राओं वाले समूहों को नियमित अंतर देकर क्रमानुसार गिनने लगते हैं। इसे **छोड़कर गिनना (skip counting)** कहते हैं।

बच्चे खेलों, कहानियों व अन्य गतिविधियों के जरिए छोड़-छोड़कर गिनने का अभ्यास कर सकते हैं। वे 'बच' खेल सकते हैं। इस खेल में बच्चे एक गोले में बैठ जाते हैं, और क्रम से गिनती बोलते हैं। एक बच्ची एक संख्या बोलती है। नियम यह है कि जिस बच्ची पर किसी पूर्व निर्धारित संख्या का गुणज आता है, वह संख्या बोलने के बजाए 'बच' कहती है। जैसे, अगर निर्धारित संख्या 4 है तो पहली बच्ची 1 कहेगी, दूसरी बच्ची 2 कहेगी, अगले बच्चे 3, 'बच', 5,6,7 और फिर 'बच' आदि कहेंगे। अगली बारी में कोई और संख्या जैसे 7, तय की जा सकती है। तब 7, 14 आदि संख्या के बदले 'बच' बोला जाएगा। धीरे-धीरे बच्चों के दिमाग में इन गैरहाजिर संख्याओं का एक पैटर्न बनने लगता है। बराबर मात्रा के समूहों की गिनती तथा 'बच' जैसी गतिविधियों से यह पैटर्न बनने में मदद मिलती है। इससे बच्चों को नियमित बराबर अंतर देकर गिनती करने की ओर बढ़ने में मदद मिलती है।

छोड़-छोड़कर गिनने का अभ्यास संख्या पट्टी से जुड़ी कहानियों से भी हो सकता है। इस पट्टी पर मान लीजिए क्रम से 1 से 50 तक गिनती हो। पट्टी पर विभिन्न चीजें भी बनाई जा सकती हैं। मसलन 1 पर पेड़, 2 पर तितली, आदि बनाई जा सकती हैं। आप इसमें मकान, पहाड़, नदी, आदि भी जोड़ सकते हैं। जैसे कि एक फुदकते खरगोश और उछलते मेंढक की कहानी बनाई जा सकती है। मेंढक हर बारी तीन घर ही उछल पाता हो और खरगोश हर बारी चार घर फुदक पाता हो। आप बच्चों से पूछ सकते हैं कि ये दोनों किन-किन संख्याओं पर मिल पाएंगे। चूँकि खरगोश 4 घर ही फुदकता है, उन्ही घरों पर जा सकता है जो 4 के गुणज हों। वह किसी अन्य घर पर पड़ी चीज ले नहीं सकता। वह मेंढक से कुछ ऐसी चीजें मंगवा सकता है जो मेंढक की पहुँच में है मगर खरगोश की पहुँच से बाहर है। बच्चों से पूछा जा सकता है कि ऐसी कौन-कौन सी चीजें हैं। 20 घरों की एक पट्टी चित्र 2 में दिखाई गई है।

आप इस कहानी के कई अलग-अलग रूप बनाकर बच्चों को अन्य प्रक्रियाओं का अभ्यास भी करा सकते हैं।



चित्र 2 : कहानीदार संख्या पट्टी का एक हिस्सा

E1) 1 से 50 या 100 तक के संख्या कार्डों को लेकर एक ऐसी गतिविधि बनाइए जिससे बच्चों को दिलचस्प ढंग से छोड़-छोड़कर गिनने का अभ्यास मिल सके।

E2) खुले में खेलने योग्य एक ऐसा खेल बनाइए जिससे बच्चों को पाँच-पाँच के अन्तर से छोड़-छोड़कर गिनने का अभ्यास करने में मदद मिले।

कई बराबर समूहों को गिनना या निर्धारित मात्रा में छोड़-छोड़कर गिनना वास्तव में एक ही बात है। इन दोनों का ही मतलब दो संख्याओं का गुणा करने से है। लिहाजा जब बच्चे बराबर मात्रा के समूहों को जोड़ने में आसानी महसूस करने लगें, तब उन्हें औपचारिक रूप से गुणा से परिचित कराया जा सकता है।

गुणा की समझ का विकास

गुणा जानने का सबसे महत्वपूर्ण पक्ष यह समझना है कि गुणा क्या होता है तथा यह कहाँ लागू किया जाता है। बच्चों से इसका शुरुआती परिचय एक संक्रिया के तौर पर नहीं, बल्कि ठोस चीजों के साथ गतिविधियों के रूप में होना चाहिए। ऐसा कई संदर्भों में किया जा सकता है।

गुणा जिन संदर्भों में आता है, उनको निम्नानुसार वर्गीकृत किया जा सकता है।

• **बराबर समूह** — जब हम यह पता करना चाहते हैं कि बराबर मात्रा के कुछ समूहों में कुल मिलाकर कितनी चीजें हैं। (जैसे, यदि तीन टोकरियां हो और उनमें क्रमशः 4 केले, 4 संतरे और 4 सेब हों, तो कुल कितने फल हुए?)

• **दर** — जब हमें यह पता हो कि एक समूह में कितनी चीजें हैं और हम यह पता करना चाहते हो कि उसी तरह के कई समूहों में कुल मिलाकर कितनी चीजें होंगी। (जैसे, यदि एक बच्ची एक साल में 4 कॉपियों का उपयोग करती है, तो एक साल में 8 बच्चे कितनी कॉपियों का उपयोग करेंगे?)

• **आयताकार समूह** — जब कई चीजें पंक्तियों व स्तम्भों के एक नियमित आयताकार समूह (array) में जमी हों और हम पता करना चाहते हों कि कुल कितनी चीजें हैं। (जैसे, यदि तीन-तीन लड़कियों की पाँच कतारें हों, तो कुल कितनी लड़कियाँ हुई?)

• **पैमाना/गुणक संख्या** — जब हमें एक राशि दी गई है और हमें पता करना है कि उसे यदि एक निर्धारित गुणक (multiplying factor) से बढ़ाया जाए तो वह कितनी होगी। (जैसे, केला 6 रुपये दर्जन हो और सेब इससे पाँच गुना महंगे हैं, तो एक दर्जन सेब का दाम क्या होगा?)

• **कार्तीय गुणनफल** — जब हमें कुल क्रमित जोड़ियों (या तिकड़ियों, वगैरह) की संख्या का पता लगाना हो। (जैसे, यदि हरी 3 अलग-अलग आकार के समोसे बनता है, और उनमें 4 अलग-अलग किस्म का मसाला भरता है, तो कुल कितनी किस्म के समोसे बनेंगे?)



चित्र 3 : 3 X 4 को दर्शाता आयताकार समूह

“कार्तीय” शब्द 17वीं सदी के फ्रांसिसी दार्शनिक व गणितज्ञ देकार्त के नाम से जाना जाता है।”

ऊपर दिए गए पाँच मॉडल में से पहले दो में कोई फर्क नजर नहीं आता। लेकिन फर्क है। पहले मॉडल में प्रत्येक समूह में अलग-अलग चीजें हो सकती हैं, परन्तु समूहों की मात्रा एक ही होनी चाहिए। ‘दर’ मॉडल में हरेक समूह में एक सी चीजें होंगी, और समूह बराबर मात्रा के भी होंगे।

E3) गुणा के ऊपर दिए गए पाँचों मॉडल में से हर एक के 2-2 ऐसे उदाहरण बनाइए जो उन बच्चों के माहौल से लिए गए हों जिन्हें आप पढ़ाते हैं।

जैसे आपने देखा, गुणा की जरूरत कई परिस्थितियों में पड़ती है। इन्हें देखते हुए आप ऐसी कई

गतिविधियाँ बना सकते हैं जिनमें बच्चों को गुणा का अभ्यास करने तथा उसका अर्थ समझने में मदद मिले। उदाहरण के लिए,

- आप अपनी कक्षा के बच्चों से यह गणना करने को कह सकते हैं कि तिकोनों की किसी निश्चित संख्या (2, 5 या 10 तिकोनों) में कुल कितनी भुजाएं होंगी।

- आप एक खेल बना सकते हैं जिसमें बच्चों की टोलियाँ एक टोकरी (या बाल्टी, या छेद) में गेंद फेंके। हर बच्चे को 5 मौके मिलेंगे और हर कामयाबी पर 3 अंक। बच्चे अब गणना करें कि उसकी टोली को कितने अंक मिले हैं।

बच्चों को इस तरह से ठोस वस्तुओं के जरिए गुणा से परिचित कराते हुए, हमें उनसे लगातार **बातचीत करते जाना चाहिए कि वे क्या कर रहे हैं**। इस तरह से उनमें गुणा की संक्रिया की समझ तो विकसित होगी ही, साथ में वे इस संक्रिया से जुड़ी भाषा, जैसे प्रत्येक, सारे, बराबर, कितने गुना, आदि भी सीखते जाएंगे। जैसेकि—

उदाहरण 1 : जब 6 वर्षीय राहुल को स्कूल में गुणा कराया गया, वह उसे समझ नहीं पाया। उसकी माँ ने हम में से कुछ लोगों से इस समस्या जिक्र किया। उन्होंने चर्चा के दौरान उभरे कुछ सुझावों के आधार पर उसके साथ कुछ गतिविधियाँ करने की ठानी।

सबसे पहले तो उन्होंने राहुल का कंचों का खजाना निकाला। फिर दोनों ने मिलकर इन कंचों को लिफाफों में रखा — हर लिफाफे में चार कंचे रख गए। फिर उन्होंने इन लिफाफों को एक बाल्टी में रख दिया। इसके पास खाली बाल्टी रख दी। अब उन्होंने राहुल से कहा कि वह एक-एक करके लिफाफों को खाली बाल्टी में रखे। जब वह यह क्रिया कुछ बार, मसलन तीन बार, कर चुका तो उन्होंने उससे पूछा:

माँ: तुमने कितने लिफाफे निकाले ?

राहुल : 3

माँ: हर लिफाफे में कितने कंचे हैं ?

राहुल : 4

माँ: तो, अगर तुम 1 लिफाफा निकालो, कितने कंचे होंगे ?

राहुल : 4

माँ ने लिख दिया $1 (4) = 4$ फिर उन्होंने पूछा कि दो लिफाफों में कितने कंचे होंगे, वगैरह।

2 मर्तबा $4 = 4 + 4 = 8$

3 मर्तबा $4 = 4 + 4 + 4 = 12$

4 मर्तबा $4 = 4 + 4 + 4 + 4 = 16$, आदि।

इस तरह से वे उसे इस प्रक्रिया व उससे जुड़ी भाषा का पैटर्न दिखाना चाहती थीं।

उन्होंने अन्य चीजों के साथ इसी तरह के अभ्यास राहुल के साथ तब किए जब तक कि वह समझ न गया कि गुणा करने का मतलब बारम्बार जोड़ना होता है। जल्दी ही वह इस स्थिति में पहुँच गया कि अगर पूछा जाए कि 4—4 कंचों वाले 8 लिफाफों में कितने कंचे होंगे, तो वह फौरन कहता '8 मर्तबा 4' और 4 को 8 बार जोड़कर

उत्तर निकाल लेता।

ऊपर दिए गए उदाहरण में राहुल की माँ ने गुणा का रिकार्ड रखने के लिए कोष्ठक (brackets) का उपयोग किया। यह प्रतीक कुछ ही स्थितियों में उपयोगी होता है। लेकिन गुणा का औपचारिक प्रतीक (यानी X) बच्चों को तभी बताना चाहिए जब वे यह समझ जाएं कि गुणा होता क्या है। इसी प्रकार से गुणनफल, गुणक आदि जैसे औपचारिक शब्द बच्चों को थोड़ा आगे चलकर ही बताए जाने चाहिए, और वह भी इनका उपयोग विभिन्न व्यावहारिक उदाहरणों में करके समझाए जाने चाहिए।

गुणा क्या होता है, इस बात को बच्चे समझे हैं या नहीं, इसकी जाँच का एक तरीका यह है कि उन्हें 'सात गुना छः' जैसे किसी गुणन तथ्य के आधार पर **इबारती सवाल बनाने को कहा जाए**। यदि आप बच्चों के साथ ऐसे अभ्यास के परिणामों का अध्ययन करें, तो आपको इसके बारे में काफी दिलचस्प जानकारी मिल सकती है कि वे क्या व कितना समझे हैं। अब, आप यह पता लगा सकते हैं कि गुणा के किस मॉडल में वे सबसे सुविधाजनक स्थिति में हैं।

निम्नलिखित अभ्यास करते हुए आपको यह देखने का मौका मिलेगा कि यह तरीका कितना कारगर है।

E4) अपने आसपास के कुछ 7 वर्षीय व कुछ 11 वर्षीय बच्चों को लीजिए। प्रत्येक को एक गुणन-तथ्य (मसलन, $6 \times 3 = 18$) देकर उनसे संबंधित एक इबारती सवाल बनाने को कहिए। यह देखिए कि वे ज्यादातर किस मॉडल के सवाल बनाते हैं। यह भी देखिए कि क्या दोनों उम्र समूहों के बीच इस लिहाज से कोई फर्क नजर आता है?

अभी तक हमने गुणा सीखने में बच्चों की मदद करने के तरीकों पर विचार किया। अब यह देखते हैं कि वे कुशलता से गुणा करना कैसे सीख सकते हैं।

पहाड़े बनाना बनाम तोतारटन्त

किसी भी बड़े व्यक्ति से पूछकर देखिए कि वह किसी बच्चे को आसानी से गुणन-तथ्य सीखने में कैसे मदद करेगी। ज्यादा सम्भावना इस बात की है कि वह कहेगी, "उसे पहाड़े सिखाकर।" और पहाड़े सिखाने के लिए वह क्या तरीका अपनाएगी? बच्चे से पहाड़े बारम्बार बुलवाकर, यानी रटवाकर।

लेकिन, क्या यह जरूरी है कि बच्चे पहाड़ों का उच्चारण करें और उन्हें रटकर याद करें? शिक्षकों का कहना है कि तेजी से गुणा करने और गुणन-तथ्यों को तत्काल स्मरण करने के लिए यह जरूरी है। लेकिन दिक्कत यह है कि सिर्फ पहाड़ों का नियमित आलाप करने से गुणन तथ्यों को तुरंत दिमाग में लाने में कोई मदद नहीं मिलती, क्योंकि हर बार बच्चों को पहाड़ा शुरू से ही दोहराना पड़ता है।

रटने की कवायद पर जोर देने के बजाय जरूरत इस बात की है कि हम बच्चों को खुद पहाड़े बनाने में मदद दें, ताकि वे यह समझ सकें कि पहाड़े वास्तव में होते क्या हैं। एक प्रयोगधर्मी स्कूल की शिक्षक माया इसी बात में यकीन करती हैं और इसका इस्तेमाल भी करती हैं।

निम्नलिखित उदाहरण में हमने उनका तरीका विस्तार में दिया है।

उदाहरण 2 : माया का कहना है कि मान लीजिए वह बच्चों से 5 का पहाड़ा बनवाना चाहती है तो वह बच्चों से उनके हाथों का इस्तेमाल करवाती है। हर बच्ची गिनती है कि एक हाथ में कितनी उंगलियाँ हैं, फिर दो हाथों में कितनी हैं, तीन हाथों में (अपने बगल के बच्चे की उंगलियों का भी गिनकर) कितनी हैं, वगैरह। इस तरह से बच्ची पहाड़ा बना सकती है और धीरे-धीरे, बारम्बार अभ्यास के जरिए वह आसानी से समझ के साथ याद कर पाएगी कि 5 गुना 7 कितना होता है। बच्चों को यह अभ्यास करवाने के लिए वह उसी आकार की

अलग-अलग चीजों के समूहों का इस्तेमाल करती हैं। मसलन, पैर की उंगलियाँ, 5 पंखुड़ियाँ वाले फूल, आदि।

माया का कहना है कि वह सबसे पहले बच्चों से 2, 5 व 10 के पहाड़े बनवाती है क्योंकि बच्चों को ये आसान लगते हैं।

उनका लक्ष्य यही है कि बच्चों को कोई भी गुणन-तथ्य तुरन्त याद आ जाना चाहिए। इसके लिए वह बच्चों के साथ निम्नलिखित में से कुछ गतिविधियाँ नियमित रूप से करती है।

1. हर रोज, उस दिन का विषय शुरू करने से पहले वह चंद मिनट बच्चों से गुणनतथ्य पूछने के लिए रखती है।

2. हर दूसरे तीसरे दिन प्रत्येक बच्चे को निम्नानुसार एक कार्ड दिया जाता है, जिसे उसे भरना होता है।

5 X 3 =	
7 X 4 =	
8 X 2 =	
9 X 5 =	
5 X 7 =	

3. कभी-कभी बच्चों से किसी संख्या के गुणजों को दोहराने के लिए कहा जाता है।

4. कभी-कभी वह उनके साथ 'डाकिया खेल' खेलती है। इस खेल में बच्चों को कई कार्ड दिए जाते हैं। हर कार्ड के एक तरफ किसी गुणन तथ्य का पहला आधा हिस्सा लिखा होता है, जैसे 7×3 या 8×5 , और दूसरी तरफ 20, 21, 35 जैसी कोई संख्याएं लिखी होती है। अब एक बच्ची डाकिया बन जाती है। उसके पास कुछ 'चिट्ठियाँ' होती हैं जिन पर 6×2 , 7×3 जैसे पते होते हैं। वह कक्षा में आकर पुकारती है, "7 गुणा 3 की चिट्ठी है। 7 गुणा 3 कौन है?" जिस बच्चे के पास 21 वाला कार्ड होता है वह कहती है, "मैं 7 गुणा 3, 21 हूँ। चिट्ठी मुझे दो।" जब कोई बच्ची सही चिट्ठी की मांग करती है तो उसे एक अंक मिलता है। डाकिया हर चिट्ठी का 'पता' तब तक पुकारती है जब तक सब चिट्ठियाँ बंट जाएं।

E5) एक बच्ची मशीनी ढंग से पहाड़े दोहरा सकती है। क्या आपको लगता है कि वह कोई भी गुणनतथ्य तत्काल बता पाएगी? यदि नहीं, तो आप सुधार का क्या उपाय सुझाएंगे?

E6) निम्नलिखित में से गुणा सीखने का अहम् पहलू कौन-सा है?

i) गुणन तथ्य

ii) पहाड़े याद कर पाना और उनका आलाप

iii) 'कितने गुना' का मतलब समझना।

अपने उत्तर का कारण दीजिए।

E7) मूलभूत गुणनतथ्य याद रखने में बच्चों की मदद के लिए एक खेल विकसित कीजिए।

इस भाग में हमने बच्चों को कुछ आसान गुणन-तथ्य आत्मसात् करने में मदद के तरीकों पर विचार किया। लेकिन गुणा सीखने का हमारा अंतिम मकसद क्या है? दो संख्याओं का गुणा कर पाना, है न? इसके लिए उन्हें

एक सूत्ररूपी प्रक्रिया का इस्तेमाल करना सीखना होगा। इसी में कई बच्चे गलती करते हैं। अब हम ऐसी ही कुछ गलतियों पर विचार करेंगे और सुधार के कुछ उपाय भी सुझाएंगे।

गुणा का ऐल्गोरिद्म

एक स्कूल के कक्षा 3 के बच्चों को गुणा का मानक ऐल्गोरिद्म सिखाया जा चुका था। और इससे संबंधित टेस्ट में कुछ बच्चों का प्रदर्शन भी ठीक-ठाक रहा था। इन्हीं में से कई बच्चों ने एक वर्ष बाद कक्षा 4 में इस तरह की गलतियाँ की :

^{1 2} 649	25	25
×3	या × 31	या ×5
2187	65	1025

जब एक बच्ची से, जिसने पहले किस्म की गलती की थी, पूछा गया कि उसने यह उत्तर कैसे निकाला, तो उसने बताया, “ $9 \times 3 = 27$, तो 7 इकाई में लिखा और हासिल आया 2 फिर $4+2 = 6$ और $6 \times 3 = 18$ तो, 8 लिखा दहाई पर और हासिल आया 1. $6 + 1 = 7$ और $7 \times 3 = 21$, तो उत्तर आया 2187.”

इनमें से किसी भी बच्चे को नहीं लगा कि उसका उत्तर कितना बेतुका है क्योंकि उसे यही समझ नहीं आया था कि गुणा होता क्या है। जाहिर है कि उनके शिक्षक का सिखाने का तरीका कारगर नहीं था। शिक्षक ने जो तरीका अपनाया था, वह यह था कि कुछ उदाहरणों के माध्यम से मानक ऐल्गोरिद्म सिखा दिया था। इसके बाद बच्चों से इस विधि पर आधारित कुछ सवाल मशीनी ढंग से करवा लिये थे। यदि यह तरीका कारगर नहीं है, तो कौन-सा होगा? ऐसा कोई भी तरीका विकसित करने के लिए पहले हमें यह देखना होगा कि गुणा के ऐल्गोरिद्म में कौन सी प्रक्रिया शामिल हैं, और यह विधि क्यों सही उत्तर देती है।

इस ऐल्गोरिद्म को समझने के लिए स्थानीय मान की समझ, गुणा को बारम्बार जोड़ की प्रक्रिया के रूप में देख पाने की समझ, हासिल की समझ जोड़ के सापेक्ष गुणा में बंटन नियम (Distributive law) की समझ जरूरी है। हमने बच्चों को ‘स्थानीय मान’ तथा ‘हासिल’ समझने में मदद देने के लिहाज से कई गतिविधियाँ सुझाई थी। हम यह मानकर चलते हैं कि बच्चों ने ये गतिविधियाँ की होंगी और वे यह भी समझ चुके होंगे कि गुणा का अर्थ बारम्बार जोड़ ही है। हम इस बात पर विचार करेंगे कि बच्चे को बंटन नियम की उपयोगिता समझने में मदद कैसे की जाए।

बंटन नियम

यदि आपके मन में 37 को 9 से गुणा करने को कहा जाए तो आप इसे कैसे करेंगे? मैं इस सवाल को इस तरह से करूंगी – 37 यानी $30 + 7$, $30 \times 9 = 270$, $7 \times 9 = 63$, तो $270 + 63$, यानी $270 + 60 + 3$, यानी उत्तर हुआ 333. हो सकता है कि आप 37 को $40 - 3$ के रूप में लेकर फिर $(40 \times 9) - (3 \times 9)$ की गणना द्वारा उत्तर निकालें। या हो सकता है कि आप मन ही मन गुणा ऐल्गोरिद्म का उपयोग करके उत्तर निकालें।

किसी संख्या को हिस्सों में बांटने से हमें गणना में मदद मिलती है। इस तरह से गणना हम जोड़/बाकी के सापेक्ष गुणा के बंटन नियम की वजह से कर सकते हैं। जैसे, इस नियम के अनुसार,

$$(30 + 7) \times 9 = (30 \times 9) + (7 \times 9)$$

$$\text{या } (40-3) \times 9 = (40 \times 9) - (3 \times 9)$$

यदि सामान्य रूप में देखें, तो किन्हीं रूप में तीन संख्याओं a , b और c के लिए नियम इस तरह लिखा जाएगा,

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c); \text{ और}$$

$$(a - b) \times c = (a \times c) - (b \times c)$$

बच्चों को यह नियम समझने में मदद कैसे करें ? माया (उदाहरण 2) ने बताया कि वह कक्षा 3 के बच्चों के साथ क्या करती हैं।

उदाहरण 2 (जारी) : माया पहले तो बच्चों को छोटी-छोटी संख्याओं के बंटन के उदाहरण इस तरह समझाती है ताकि वे नियम को खुद खोज पाएं। आमतौर पर वह बच्चों को इस तरह के सवाल देती है: “एक फौजी अफसर की वर्दी पर बटनों की 7 कतारें हैं और हर कतार में 4 बटन हैं। 4 कतारें बेल्ट के ऊपर हैं और 3 कतारें बेल्ट के नीचे। तो कुल कितने बटन हुए ?” आमतौर पर बच्चे सारी कतारें गिनकर लिख देते हैं कि—

$$7 \text{ मर्तबा } 4 = 7(4) = 7 \times 4 = 28$$

फिर वह उनसे यही सवाल निम्नानुसार करवाती है :

बेल्ट के ऊपर कितनी कतारें हैं ? 4 कतारें।

तो, बेल्ट के ऊपर वाली कतारों में कुल कितने बटन हुए ? 4 मर्तबा 4, यानी 16.

बेल्ट के नीचे हुए ? 3 मर्तबा 4, यानी 12.

तो कुल कितने ? $16 + 12$, यानी 28.

दोनों उत्तर समान हैं ऐसा क्यों ?

वह 4-4 बटन की 7 कतारों का एक चित्र बनाती है (देखिए चित्र 4), और समझाती है कि कैसे 7 कतारों को 4 कतारों व 3 कतारों में बांटा जा सकता है। वह यह भी समझाती है कि कैसे इस तरह से करने पर भी सारे बटन शामिल हो जाते हैं। तो,

$$7 \text{ कतारें} = 4 \text{ कतारें} + 3 \text{ कतारें}$$

$$7 \times 4 = (4 \times 4) + (3 \times 4)$$

$$\text{यानी } (4 + 3) \times 4 = (4 \times 4) + (3 \times 4)$$



चित्र 4 : $(4 \times 4) + (3 \times 4)$
 $= (4 + 3) \times 4$

इसी तरह के कुछ और उदाहरण करवाने के बाद वह बच्चों को खुद करने को कुछ सवाल भी देती है। जब उन्हें बंटन नियम के उपयोग का कुछ अभ्यास हो जाता है, तब माया उन्हें यह बताती है कि किसी 2 अंकों की संख्या को 1 अंक की संख्या से गुणा करने में बंटन नियम का इस्तेमाल कैसे होता है।

इसके लिए वह शुरू में बच्चों को कहानी से जुड़े इस तरह के सवाल देती है: ‘एक लड़का 5-5 के समूह में बंधे हुए प्लास्टिक के फूल बेचता है। वह 10 पैकेट अपनी दायीं बाजू तथा 4 पैकेट बायीं बाजू पर रखता है। उसके पास कुल कितने फूल हैं ?’ वह कुछ ऐसे सवालों के जरिए बच्चों को बंटन नियम की ओर ले जाती है: “कुल कितने पैकेट हैं?”, “दायीं ओर कितने हैं ?”, वगैरह। कहानी से जुड़े इस तरह के सवाल बच्चों से पूछती

है जिनका जवाब देने से वह खुद ही समझ जाए कि :

$$\begin{aligned} 14(5) &= 10(5) + 4(5) \\ &= 50 + 20 \\ &= 70 \end{aligned}$$

वह इस पूरी प्रक्रिया में इस बात पर जोर देती है वह है पहला कदम, यानी बंटन। उसे लगता है कि इस तरह के और उदाहरणों के माध्यम से बच्चे धीरे-धीरे यह समझने लगते हैं कि जब किसी 2 अंक वाली संख्या का 1 अंक वाली संख्या से गुणा करना हो, तो उसे दहाई व इकाई में बांट लेते हैं और फिर दोनों का अलग-अलग गुणा कर लेते हैं। इन गुणनफलों को आपस में जोड़ने पर सही उत्तर मिल जाता है।

बच्चों को बंटन नियम का अभ्यास कराने के मक्सद से माया उन्हें निम्नलिखित अभ्यास देती है :

$$\begin{aligned} 15(7) &= 10(7) + 5(7) \\ 14(5) &= \dots (5) + 4(5) \\ 18(2) &= 10(2) + \dots (\dots) \\ 15(3) &= \dots (\dots) + 5(\dots) \end{aligned}$$

यह कोई एक बार में निपट जाने वाली गतिविधि नहीं है। जब बच्चे मानक ऐल्गोरिद्म सीख रहें होते हैं उस दौरान माया बार-बार बंटन की बात पर लौटती है।

E8) अपने आस-पड़ोस के कक्षा 4के कुछ बच्चों को 15×6 जैसा कोई सवाल मन में करने को दीजिए। उनसे बातचीत करके पता लगाइए कि वे इसको हल करने के लिए क्या-क्या तरीके अपनाते हैं। और इन तरीकों को लिख डालिए।

गुणा का ऐल्गोरिद्म कैसे काम करता है?

यदि 35 को 23 से गुणा करने को कहा जाए तो हममें से अधिकांश लोग ऐसे लिखेंगे:

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 23 \\ \hline 105 \\ 70X \\ \hline 805 \end{array}$$

हम गणना की दूसरी पंक्ति में **X** (या 0) क्यों लगाते हैं, या खाली स्थान क्यों छोड़ते हैं?

गुणा की सूत्र विधि दरअसल उसी बंटन नियम पर आधारित है जिसकी चर्चा हमने ऊपर की थी। इस विधि में किसी एक अंक की संख्या को किसी 2 अंक की संख्या से गुणा करने के निम्नांकित चरण होते हैं :

- i) 2 अंक की संख्या को दो भागों में – दहाई और इकाई में बांटते हैं।
- ii) फिर इनमें से हरेक भाग को अलग-अलग एक अंक वाली संख्या से गुणा करते हैं।
- iii) और अंत में दोनों गुणनफलों को जोड़कर उत्तर प्राप्त करते हैं।

$$\begin{aligned}\text{उदाहरण के लिए, } 13 \times 7 &= (10 + 3) \times 7 \\ &= (10 \times 7) + (3 \times 7), \text{ बंटन नियम से।} \\ &= 91\end{aligned}$$

मानक ऐल्गोरिद्म में हम गुणा की संक्रिया संख्या की सबसे छोटी यूनिट (unit) यानी इकाई वाले अंक से शुरू करते हैं, और फिर बायीं ओर बढ़ते जाते हैं। ऐसा इसलिए करते हैं क्योंकि हम सबसे पहले सबसे छोटी मात्रा के समूहों, यानी इकाई के स्थान पर अंकों की मात्रा वाले समूहों को जोड़ते हैं। इसके परिणाम को फिर इकाई व दहाई में बांटा जाता है। इकाई को तो इकाई के स्थान पर ही रख दिया जाता है, मगर दहाई को हासिल के रूप में अलग रख दिया जाता है। फिर संख्या के दहाई अंक में गुणक से गुणा करने पर जो परिणाम आता है उसमें हासिल वाली संख्या को जोड़ दिया जाता है। पूरे ऐल्गोरिद्म की बुनियाद यही प्रक्रिया है।

मसलन, 13×7 में हम पहले 3 को 7 से गुणा करते हैं। परिणाम आता है 21. हम इस 21 के 1 को तो इकाई स्थान पर रख देते हैं, मगर 20 को 2 दहाई के रूप में आगे ले जाते हैं। इसे 13 की 1 दहाई में 7 का गुणा करने पर प्राप्त परिणाम में जोड़ देते हैं, यानी 2 दहाई को 7 दहाई में जोड़कर 9 दहाई प्राप्त हो जाती है।

बच्चों को इस प्रक्रिया का पूरा अहसास देने के लिए बंटन की समझ ज़रूरी है। इसके अलावा हमें बच्चों को प्रोत्साहित करना चाहिए कि वे संख्याओं को इकाई व दहाई में बांट के गुणा करने में इस नियम का इस्तेमाल करें। इसके बाद हम उन्हें गुणा के औपचारिक ऐल्गोरिद्म पर ले जा सकते हैं।

यह ज़रूरी नहीं कि बच्चे एक ही दफ़ा में समझ पाएं कि यह ऐल्गोरिद्म कैसे काम करता है। इस समझ के विकसित होने में तकरीबन 2 साल लग सकते हैं। इस दौरान उन्हें बार-बार इस बात पर आना चाहिए कि ऐल्गोरिद्म काम कैसे करता है। यह विधि कैसे काम करती है, उसकी तुलना इसी दौरान सीखी गई अन्य विधियों से करके भी देख सकते हैं।

E9) जब हम, उदाहरण के लिए, 35 को 23 से गुणा करते हैं, तो दूसरी पंक्ति के परिणाम को एक स्थान खिसकाकर क्यों लिखते हैं?

E10) 3 अंक की संख्या को 2 अंक की संख्या से गुणा करने की विधि चरण-दर-चरण लिखिए। यह भी समझाइए कि हर चरण कैसे काम करता है।

बच्चों को गुणा सिखाने का हमारा मक़सद क्या है? एक तो उन्हें उन स्थितियों को समझ जाना चाहिए जहाँ गुणा करने की ज़रूरत है तथा यह भी समझ जाना चाहिए कि किन-किन संख्याओं का गुणा करना है। इसके अलावा लम्बा गुणा, यानी कई अंकों वाली किसी संख्या को किसी अन्य बहु-अंकीय संख्या से गुणा, करने की क्षमता भी उनमें विकसित होनी चाहिए। इस क्षमता के साथ उन्हें यह भी समझ में आ जाना चाहिए कि ऐल्गोरिद्म में क्या हो रहा है। बच्चों में ये सारी समझ विकसित करने के लिए निम्नलिखित क्रम अपनाया जा सकता है।

1. "गुणा का अर्थ" की समझ का विकास।

- (क) बराबर संख्या में चीजों के समूह बनाना।
- (ख) बराबर समूहों को जोड़ना।
- (ग) संख्याएं छोड़-छोड़कर गिनती करना।
- (घ) शुरूआती गुणा तथ्यों का अभ्यास – पहाड़े बनाना।

2. गुणा से संबंधित भाषा का उपयोग व समझ के साथ-साथ गुणन-तथ्यों को प्रतीकों से लिखने की विधि
3. जोड़ के सापेक्ष गुणा का बंटन नियम समझना और लागू करना।

3

4. गुणा का ऐल्गोरिदम सीखना – कॉलमों में लिखना, जैसे $\frac{\times 4}{12}$

5. दो अंको वाली संख्याओं के गुणा से परिचय – दो अंकों की संख्या से एक अंक की संख्या का गुणा,

12

13

हासिल बगैर, जैसे $\frac{\times 4}{—}$ और हासिल समेत, जैसे $\frac{\times 4}{—}$

6. ऐल्गोरिदम को आगे बढ़ाकर दो अंकों की संख्या को दो अंकों की संख्या से गुणा करना:

- i) इनमें से एक संख्या को बाँट के, जैसे $23 \times 12 = (23 \times 10) + (23 \times 2)$
- ii) बगैर हासिल के।
- iii) हासिल समेत।

7. ऐल्गोरिदम की गहरी समझ विकसित करना।

8. तीन अंकों की संख्या को

- i) एक अंकों की संख्या से गुणा करना।
- ii) दो अंकों की संख्या से गुणा करना।

आइए अब उन समस्याओं पर गौर करें जो बच्चों को भाग सीखने में आती हैं। साथ ही सुधार के कुछ उपायों पर चर्चा करेंगे।

भाग का मतलब

प्राइमरी स्कूल के किसी भी शिक्षक से पूछिए कि गणित के वे कौन से क्षेत्र हैं जो बच्चों को सबसे मुश्किल लगते हैं। मुश्किलों की सूची में शायद भाग ही सबसे ऊपर होगा। यदि आप ऐसे बच्चों के साथ बातचीत करें जो भाग 'सीख' चुके हों, तो आप पाएंगे कि इबारती सवालों में वे आसानी से यह नहीं पहचान पाते कि कब भाग देना है और किस संख्या में किस संख्या का भाग देना है। और यह भी जाहिर हो जाता है कि भाग का ऐल्गोरिदम भी वे ठीक से लागू नहीं कर पाते। इन दिक्कतों के कई कारण हो सकते हैं।

1. बच्चों के जीवन में ऐसे मौके बहुत कम आते हैं जब उन्हें ऐसी संख्याओं के भाग करना पड़े जो बहुत छोटी न हों।

2. बच्ची गतिविधियों के जरिए भाग का मतलब समझ पाए, इससे पहले ही उसे एक लिखित ऐल्गोरिदम के रूप में भाग सिखाना शुरू कर दिया जाता है।

3. भाग के ऐल्गोरिदम में हम बाएं से दाएं चलते हैं जबकि बाकी सारी संक्रियाएं दाएं से बाएं लागू की जाती हैं।

4. भाग क्रमविनिमेय संक्रिया नहीं है। (मसलन, $6 \div 3$ और $3 \div 6$ एक बराबर नहीं है।)

E11) बच्चों को 'भाग' क्यों मुश्किल लगता है, इसके दो और कारण लिखिए।

ऊपर दिए गए पहले कारण के संदर्भ में बच्चे के भाग-संबंधी ऐसे अनुभव शायद अपने दोस्तों के साथ चीजों के बँटवारे को लेकर होते हैं। 'बाँटने' का मतलब कभी-कभी 'बराबर-बराबर हिस्से बाँटना' भी होता है। वैसे हर बार ऐसा नहीं होता (मसलन, यदि कोई बच्ची आपसे कहे कि उसके साथ खाना बाँटिए, तो इसका मतलब यह नहीं होता कि वह आपको अपने खाने का ठीक आधा हिस्सा देगी)।



चित्र 5 : बराबर बँटवारा

मोटे तौर पर, बच्चों का वास्ता तीन तरह की भाग संबंधी स्थितियों से पड़ता है।

● **समूहीकरण** — जब हम यह पता करना चाहें कि किसी निर्धारित राशि में से एक निर्धारित परिणाम के कितने हिस्से प्राप्त हो सकेंगे, (मसलन, यदि कक्षा में 50 बच्चे हैं और इन्हें 5-5 की टोलियों में बाँटना है, तो कितनी टोलियाँ बनेंगी?)

● **बराबर बँटवारा** — जब हम यह पता करना चाहें कि किसी निर्धारित राशि के कुछ बराबर-बराबर हिस्से करने हों, तो हर हिस्से में कितनी मात्रा आएगी। (मसलन, मेरे पास 50 टॉफियाँ हैं और मैं इन्हें 5 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटना चाहती हूँ। हर बच्चे को कितनी टॉफियाँ मिलेंगी ?)

● **अनुपात** — जब हम दो राशियों की तुलना उनके अनुपात के आधार पर करना चाहें। (मसलन, मुन्ना का वजन 40 कि.ग्रा. है और मुन्नी का 50 कि.ग्रा. है। उनके वजन का अनुपात निकालिए।)

दस वर्ष की उम्र तक बच्चों का वास्ता ज्यादातर पहले दो मॉडलों से होता है। तीसरा मॉडल दरअसल गुणा के पैमाना मॉडल का उलट है। आमतौर पर इसे 10 वर्षीय बच्चे के लिए समझना थोड़ा कठिन है।

यह समझने के लिए कि भाग क्या होता है, हमें बच्चों को विभिन्न परिचित संदर्भों में पहले दो किस्मों के कई उदाहरण देने चाहिए। जैसे— उदाहरण—3

उदाहरण 3 : संतोष के मुताबिक महत्वपूर्ण बात यह है कि बच्चे का भाग से परिचय ठोस चीजों से साथ आसान गतिविधियों के जरिए कराया जाना चाहिए। जैसे, वह बच्चों से कहती है कि 30 बीजों/पत्तियों/कंकड़ों को 3-3 के समूह में रखें और फिर समूहों की संख्या गिनें। इसके बाद वह उनसे पूछती है कि “30 में कितने 3 हैं?”

उनके साथ एक और गतिविधि वह यह करती है कि उन्हें 5-5 की टोलियों में बाँट देती है और हर टोली को 20 चीजें दे देती है (किसी टोली को कंचे, किसी को कंकड़, वगैरह, मिलते हैं)। फिर वह टोली के एक बच्चे से कहती है कि उन चीजों को टोली के सारे बच्चों के बीच बाँटे। बच्ची 5 कंचे गिनती है और हर सदस्य को एक-एक दे देती है। संतोष तब उससे इस तरह के सवाल करती है : “पाँच-पाँच के कितने समूह वह ले सकती है?” और “हर बच्चे को कितने कंचे मिले?”

चूँकि भाग की प्रक्रिया आसानी से समझ नहीं आती, इसलिए संतोष को लगता है कि ऊपर सुझाई गई गतिविधियाँ जैसी कई गतिविधियाँ करना जरूरी है। यह काम अलग-अलग संदर्भों में, अलग-अलग चीजों के साथ किया जाना चाहिए।

बच्चों के साथ ये गतिविधियाँ करते हुए वह बच्चों से बातचीत में ‘बाँटना’, ‘भाग करो’, ‘इतने भाग करो’,

‘इतने से भाग करो’, ‘कितनी बार’, ‘इसमें कितने हैं’, ‘कितने भाग हुए’, ‘बराबर भागों में बाँटा’, वगैरह, शब्दों का इस्तेमाल करती जाती है। वह बच्चों को इन शब्दों का इस्तेमाल करते हुए कई कहानियाँ भी बताती है। थोड़ा आगे चलकर वह बच्चों को भाग से सम्बन्धित कहानियाँ बनाने को प्रेरित करती है।

जब संतोष को महसूस होता है कि बच्ची चीजों के समूहों के भाग कर लेती है, तब वह उसे इस संक्रिया का अर्थ समझने में मदद देने की प्रक्रिया शुरू करती है। इसके लिए वह बच्ची को यह समझने में मदद देने की कोशिश करती है कि भाग दरअसल गुणा की उलट संक्रिया है। वह नीचे बताई गई गतिविधियों और वैसी ही अन्य गतिविधियों का उपयोग इस काम के लिए करती है :

वह बच्ची से कहती है कि माचिस की दस तीलियों के एक समूह को 2-2 तीलियों के समूहों में बाँटे। फिर उससे पूछती है कि कुल कितने समूह बने। इसके बाद वह उससे कहती है कि 2-2 तीलियों के वही 5 समूह ले और बताए कि कुल कितनी तीलियाँ हुई। वह इसी तरह की गतिविधि 10 पत्थर, 10 टहनियों, आदि के साथ तब तक दोहराती है जब तक कि बच्ची ‘10 को 2 से भाग देने पर 5 आता है’ (या 10 भागित 2, 5 होता है) का संबंध ‘2 गुणा 5, 10 होता है’ से न देखने लगे।

इस तरह के अभ्यासों और अनुभवों के बाद धीरे-धीरे जब बच्चों से पूछा जाता है कि ‘6 भागित 2’ क्या होगा, तो वे ‘6 में 2 कितनी बार आएगा?’ जैसे प्रश्न के माध्यम से जवाब देने की कोशिश करते हैं। इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए वे 2 का पहाड़ा 6 तक बोलते हैं और कहते हैं “6 भागित 2 बराबर 3 होगा।” शुरू में कई बच्चे इस सवाल का उत्तर देने के लिए ‘बारम्बार घटाने’ का सहारा लेते हैं। यानी उनके लिए ‘6 भागित 2’ का अर्थ यह है कि ‘6 में से 2 को कितनी बार घटाया जा सकता है?’, अर्थात्

$$\begin{array}{r} 6 \\ -2 \\ \hline 4 \\ -2 \\ \hline 2 \\ -2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 3 \text{ बार}$$

एक बार बच्चे यह समझ लें कि आसान परिस्थिति के संदर्भ में भाग का क्या अर्थ है, तब संतोष $\div$ प्रतीक से उनका परिचय कराती है। फिर प्रतीकों से उनको अच्छी तरह परिचित कराने तथा ‘ $\times$ ’ व ‘ $\div$ ’ के बीच का संबंध समझाने के लिए वह उन्हें कई गतिविधियाँ देती है। जैसे कि वह उन्हें छोटी-छोटी टोलियों में बाँटकर प्रत्येक टोली को $\boxed{=}$ $\boxed{10}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{5}$ जैसे कार्डों का सेट देती है। इन कार्डों को इस्तेमाल करके वह उनसे एक भाग-तथ्य लिखने को कहती है। फिर वह $\div$ के कार्ड की जगह $\times$ वाला कार्ड दे देती है और उनसे पूछती है कि क्या वे कार्डों को फिर से जमाकर कोई अन्य गणितीय कथन बना सकते हैं। (इस गतिविधि को कई रूपों में पेश किया जा सकता है।)

वह बच्चों को वर्कशीट देकर भी भाग/गुणन-तथ्य का अभ्यास करवाती है।

काफी समय तक बच्चों के काम को परखने के बाद संतोष इस निष्कर्ष पर पहुँची है कि इस तरीके से भाग सीखने पर बच्चे $24 \div 3 = 8$ जैसे कथन को निम्नानुसार समझने लगते हैं :

- यदि 24 चीजों के किसी समूह को 3-3 चीजों के समूहों में बाँटा जाए, तो हर भाग में 8 चीजें होंगी।
- यदि 24 चीजों के किसी समूह को 3-3 चीजों के समूहों में बाँटा जाए, तो 8 समूह बनेंगे।
- 24 में से 3 को 8 बार घटाया जा सकता है।
- 8 तिया 24 होते हैं।
- 3 अट्टे 24 होते हैं।
- 24 में 3, आठ बार आता है।

बातचीत के दौरान संतोष ने मुझे एक महत्वपूर्ण बात यह बताई कि जिस ढंग से वह बच्चों को भाग सिखाती है, उसके लिए यह कतई जरूरी नहीं कि भाग सीखने से पहले बच्चों को गुणा का गहरा ज्ञान हो। गुणा के साथ थोड़ा सा परिचय हो, तो वे इन दो संक्रियाओं के बीच संबंध देख पाते हैं। और बच्चे ये दोनों संक्रियाएं साथ-साथ सीखते चलते हैं।

E12) गुणा व भाग को साथ-साथ सीखना चाहिए। आप इस बात से सहमत हैं या नहीं? अपने उत्तर का कारण भी दीजिए।

E13) आप बच्चों को कैसे समझाएंगे कि शून्य से भाग करना अर्थहीन है?

अभी तक हमने इस बात पर चर्चा की कि बच्चों को भाग की अवधारणा कैसे बताएँ। ऐसा करते हुए हमने सिर्फ ऐसे सवालों पर ध्यान दिया जिनमें शेष (remainder) कुछ नहीं बचता। इन सवालों से बच्चों को यह समझने में मदद मिलती है कि गुणा व भाग परस्पर विपरीत संक्रियाएं हैं। जब बच्चे यह बात समझ जाएं तो उन्हें ऐसे सवाल दिए जा सकते हैं जिनमें धनात्मक शेष रहता है, जैसे $24 \div 5$ ।

भाग से जुड़ी अन्य अवधारणाओं व शब्दों, जैसे भागफल, शेष आदि को समझने में बच्चों को काफी कठिनाई होती है। “27 को 6 से भाग देने पर शेष क्या रहेगा?” जैसे सवाल से सामना करने पर वे चक्कर में पड़कर कह बैठते हैं 4।

इन अवधारणाओं की ठोस उदाहरणों से शुरू किया जाए। यदि कोई बच्ची ठोस चीजों के साथ कई ऐसे अभ्यास करे जिनमें शेष बचता है, तो धीरे-धीरे वह इस अवधारणा को समझने लगेगी। दैनिक जीवन के उदाहरणों से इस समझ को और पुख्ता किया जा सकता है। (जैसे— मोती ने 7 पेंसिलें खरीदीं। उसने इन पेंसिलों को 3 बच्चों के बीच बराबर-बराबर बाँटा। उसके पास कितनी पेंसिलें बचीं?) बच्चों से अपने उत्तर निकलवाते वक्त आप ‘भागफल’, ‘शेष’ जैसे शब्दों पर जोर दे सकते हैं। बच्चों के सामने ऐसे कई उदाहरण रखे जाने चाहिए।

साथ ही, बच्चों से ऐसी स्थितियाँ व संदर्भ रचने को कहा जाना चाहिए जिनमें शेष वाले भाग आते हों। ये स्थितियाँ छोटे-छोटे समूहों में बनाई जा सकती हैं और समूह में ही एक-दूसरे के सामने रखी जा सकती हैं, या दूसरे समूहों के सामने एक चुनौती के रूप में पेश की जा सकती हैं।

धीरे-धीरे सवालों में आने वाली संख्याओं को बढ़ा दिया जा सकता है। जैसे— अगले चरण में आप पूछ सकते हैं, “26 कंचे हैं और 7 बच्चों को खेलना है यदि हर बच्चे को बराबर-बराबर कंचे मिले तो बताओ हर बच्चे को कितने कंचे मिलेंगे और कितने कंचे बच जाएंगे?”

यदि बच्चे बड़ी संख्याओं वाले सवालों का जवाब न दे पाएं, तो आप उन सवालों को ठोस चीजों की ‘गतिविधि के रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं। आप जरूरी संख्या में कंचे या कोई अन्य आसानी से मिलने वाली छोटी चीज जुटा लें। अब बच्चों से पूछिए कि वे इन चीजों के साथ भागफल और शेष निकालने का काम कैसे करेंगे।

यह गतिविधि अलग-अलग संख्याओं और अलग-अलग संदर्भों में दोहराई जा सकती है।

E14) बच्चे का ‘भागफल’ व ‘शेष’ शब्द समझने में मदद देने के लिए आप और कौन-सी गतिविधियाँ सोच सकते हैं?

एक बार बच्चे भाग की अवधारणा व प्रक्रिया समझ जाएं, तो काफी अभ्यास मिलने पर वे धीरे-धीरे छोटी संख्याओं के भाग आसानी से कर पाएंगे। लेकिन बड़ी संख्याओं का भाग करने के लिए उन्हें भाग का ऐल्गोरिद्म इस्तेमाल करना होगा। यह बच्चों के लिए बहुत कठिन होता है।

भाग का ऐल्गोरिदम

यदि आप किसी 10–11 वर्षीय बच्ची से $81 \div 9$ हल करने को कहें तो संभावना यह है कि वह इसे सही-सही कर देगी। लेकिन, अगर आप उससे $72 \div 3$ करने को कहें तो ज्यादा संभावना है कि वह इसे गलत करेगी। कारण यह है कि इस मामले में उसे एक ऐल्गोरिदम का उपयोग करना होगा, जिसे वह बगैर समझे आँख मूँदकर इस्तेमाल करती आई है। वह यह नहीं समझती कि इसमें होता क्या है या इससे सही उत्तर कैसे मिल जाता है।

जब हमने नजदीक के एक प्राइमरी स्कूल की कक्षा 5 के कुछ बच्चों को भाग के सवाल दिए, तो उनमें से कई ने इस तरह की गलतियाँ कीं :

$\begin{array}{r} 11 \\ 5 \overline{)65} \\ \underline{6} \\ 5 \\ \underline{5} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 11 \\ \sqrt{5 \ 505} \\ \underline{5} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 13 \\ \sqrt{5 \ 515} \\ \underline{5} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$
---	--	--

हमें ऐसे उत्तर क्यों मिले? इसलिए कि बच्चे यह नहीं समझे हैं कि ऐल्गोरिदम कैसे व क्यों काम करता है। दरअसल, यह बात अधिकांश बड़े लोग भी नहीं समझते हैं। हममें से कितने लोग जानते हैं कि भाग करते वक्त क्यों हम बाएं से दाएं चलते हैं जबकि अन्य संक्रियाएं करते वक्त दाएं से बाएं चलते हैं ? आइए इसी खासियत पर चर्चा करें।

भाग देते समय सबसे बाईं ओर के अंक से शुरू करने का कारण सरलता व दक्षता है। उदाहरण के लिए, 417 को 3 से भाग देते हैं। सबसे पहले हम 4 सैकड़ा को 3 से भाग देते हैं, तो हमें भागफल में एक सैकड़ा मिलता है, और 1 सैकड़ा शेष रहता है। इस शेष को हम 10 दहाई में बदल लेते हैं और 1 दहाई तो हमारे पास पहले से है। इन कुल 11 दहाई को 3 से भाग देते हैं, तो भागफल में 3 दहाई तथा शेष 2 दहाई बच जाती है। इन दो बचे दहाई को 20 इकाई बदल लेते हैं और पहले से मौजूद 7 इकाई के साथ 27 इकाई हो जाती हैं। 3 से भाग देने पर भागफल में 9 इकाई आ जाती हैं और शेष कुछ नहीं बचता। तो उत्तर 139 मिल जाता है।

अब जरा देखें कि इकाई से भाग शुरू करें तो क्या होता है। हम पहले 7 को 3 से भाग देंगे। इससे भागफल में 2 इकाई आएंगी तथा 1 इकाई शेष रहेगी। फिर हम 1 दहाई को देखेंगे। इसे 3 से विभाजित करने के लिए हमें इसे 10 इकाई में बदलना होगा। फिर इसमें पिछले चरण से शेष 1 इकाई जोड़ना होगा। अब हम 11 इकाई में 3 का भाग देंगे। भागफल में 3 इकाई तथा शेष 2 इकाई बचेंगी। इसके बाद हम जाएंगे सैकड़ा के 4 पर। इसे 3 से भाग देने पर भागफल में 1 सैकड़ा आएगा और 1 सैकड़ा शेष रहेगा, यानी 10 दहाई बचीं। इसे 3 से भाग देने पर भागफल में 3 दहाई और शेष 1 एक दहाई रही। भूलिए मत कि हमारे पास 2 इकाई पहले से शेष है। इस 1 दहाई के साथ मिलकर वे 12 इकाई हो जाएंगी। इसे 3 से भाग देने पर हमें 4 इकाई और भागफल में मिलेंगी। तो इस तरह आगे-पीछे करने के बाद हमने भाग पूरा कर लिया और साथ में हमें कई भागफलों को याद रखना पड़ा, सो अलग।

कोई बच्ची चरण-दर-चरण मानक प्रक्रिया की समझ कैसे बनाए? हम उसे यह समझने में मदद कैसे करें कि यह ऐल्गोरिदम क्यों काम करता है? आइए देखें इस संबंध में जरीना क्या कहती है।

उदाहरण 4 : जरीना काफी समय से उच्च प्राथमिक स्कूल के बच्चों को पढ़ा रही है। इस दौरान उन्होंने भाग का ऐल्गोरिदम सिखाने के कई तरीके अपनाए और उनमें समय-समय पर सुधार करती रही। वह इस निष्कर्ष पर पहुँची है कि बच्चों को यह ऐल्गोरिदम सिखाने का सर्वोत्तम तरीका यह है कि उन्हें ठोस चीजों से गतिविधियाँ करवाई जाएं।

वह बच्चों को तीलियों के कुछ बंडल और कुछ खुली तीलियों की मदद से भाग करने को कहती हैं। हर बंडल में 10 तीलियाँ होती हैं। पहले वे $9 \div 3$ जैसे सवाल देती हैं जिन्हें बच्चे आसानी से कर लेते हैं। फिर वह $12 \div 3$ जैसे सवालों पर जाती है। इसमें एक बंडल व दो तीलियों का उपयोग होता है। वह बच्ची से कहती है, “यदि ये तीलियाँ 3 बच्चों में बाँटनी हों, तो तुम कहाँ से शुरू करोगी ?” बच्ची निश्चित रूप से बंडल खोलकर 12 तीलियाँ बाँट देती है, जिससे हर बच्चे को 4 तीलियाँ मिल जाती हैं। पूरी गतिविधि के दौरान जरीना बच्ची से बुलवाती जाती है कि वह क्या कर रही है, और ये लिखवाती भी है। इस तरह से बच्ची भाषा तथा प्रतीकों के इस्तेमाल की आदी हो जाती है।

जरीना $30 \div 3$ जैसे सवालों पर बढ़ जाती है, जिनमें बच्ची समझ जाती है कि इन तीन बंडलों को बगैर खोले ही बाँटा जा सकता है। इसके बाद जरीना $36 \div 3$, $84 \div 4$ जैसे सवाल लेती हैं जिनमें बंडलों को और तीलियों को 3 से भाग दिया जा सकता है और शेष कुछ नहीं बचता। हरेक उदाहरण में वे बच्चों से भाग को निम्नानुसार लिखवाती जाती है। फिर वह उन्हें बंडल/तीलियों व दहाई /इकाई के परस्पर सम्बन्ध की याद भी दिलाती जाती है।

(i) <table style="margin: auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1 बंडल + 2 तीलियाँ</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">3 3 बंडल + 6 तीलियाँ</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">3 बंडल</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">0 बंडल + 6 तीलियाँ</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">6 तीलियाँ</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td><td style="text-align: center;">×</td></tr> </table>	1 बंडल + 2 तीलियाँ		3 3 बंडल + 6 तीलियाँ		3 बंडल		0 बंडल + 6 तीलियाँ		6 तीलियाँ			×	(ii) <table style="margin: auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">2 दहाई + 1 इकाई</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">4 8 दहाई + 4 इकाई</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">8 दहाई</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">0 दहाई + 4 इकाई</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">4 इकाई</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td><td style="text-align: center;">×</td></tr> </table>	2 दहाई + 1 इकाई		4 8 दहाई + 4 इकाई		8 दहाई		0 दहाई + 4 इकाई		4 इकाई			×
1 बंडल + 2 तीलियाँ																									
3 3 बंडल + 6 तीलियाँ																									
3 बंडल																									
0 बंडल + 6 तीलियाँ																									
6 तीलियाँ																									
	×																								
2 दहाई + 1 इकाई																									
4 8 दहाई + 4 इकाई																									
8 दहाई																									
0 दहाई + 4 इकाई																									
4 इकाई																									
	×																								

यानी उत्तर आया 1 बंडल + 2 तीलियाँ = 12 तीलियाँ।

ऐसे कुछ और सवाल करने के बाद वे $84 \div 3$ जैसे सवाल हल करने के लिए बंडल और तीलियों के उपयोग पर लौटते हैं। इनमें जब ‘दहाई’ के अंक को विभाजित किया जाता है। तो शेष बचता है। पहले तो बच्ची बंडलों को 3 समूह में बाँटती है, जहाँ हर समूह में 2 बंडल हैं। उसके पास 2 बंडल बचे रहते हैं। वह इन बंडलों को खोलती है। उसके पास 20 तीलियाँ हो गईं। पहले से उसके पास 4 तीलियाँ हैं। दोनों को जोड़कर उसके पास कुल 24 तीलियाँ हैं। वह इन तीलियों को 3 समूहों में बाँट देती है, हर समूह में 8 तीलियाँ हैं। यानी अंत में हर समूह में 2 बंडल और 8 तीलियाँ हैं, यानी 2 दहाई और 8 इकाई, अर्थात् 28. इस प्रक्रिया को भी उसी तरह लिखा जाता है जैसे पहले के सवालों में लिखा गया था।

काफी अभ्यास के बाद बच्चे धीरे-धीरे ठोस चीजों के सहारे के बगैर ही ऐल्गोरिदम का उपयोग करने लगते हैं। यह जरूर है कि किसी भी चरण में भ्रम होने पर वे बंडल व तीलियों का सहारा ले सकते हैं।

जब बच्चे ऐसी संख्याओं के साथ ऐल्गोरिदम का उपयोग करने में दक्ष हो जाते हैं जिनमें कोई शेष नहीं बचता, तो जरीना उन्हें $35 \div 3$ जैसे सवाल देती है। इनमें वह फिर बच्चों से बंडल और तीलियों का उपयोग करने को कहती है। गतिविधि करते हुए वह बारम्बार ‘शेष’ शब्द का इस्तेमाल करती रहती है और इसका संबंध ‘कितने शेष रहे जिन्हें नहीं बाँटा जा सकता’ से जोड़ती जाती है। और पहले की ही तरह यहाँ भी वह उनसे अपना हल चरण-दर-चरण लिखते जाने को कहती है।

E15) किसी बच्चे को भाग का ऐल्गोरिद्म ठीक से समझने में मदद के लिए कोई अन्य गतिविधियाँ विस्तार में सुझाइए।

इस पाठ में हमने यह कहने की कोशिश की कि सीखने/सिखाने की पूरी प्रक्रिया में हमारा जोर इस बात पर होना चाहिए कि बच्चों को अवधारणा, संक्रिया, सवाल तथा उसके हल का अर्थ खोजने का अवसर मिलें। बच्चों में यह क्षमता भी विकसित होनी चाहिए कि वे जो कुछ सीखें उसका सम्बन्ध व्यावहारिक परिस्थितियों से जोड़ पाएं।

सारांश

इस पाठ में हमने निम्न मुद्दों पर चर्चा की—

1) बच्चों को गुणा व भाग का अर्थ समझाने के तरीकों के सुझाव दिए। वे संक्रियाएं बच्चों का पहले ठोस संदर्भ में गतिविधि के जरिए सिखाई जानी चाहिए।

2) बच्चों को इन संक्रियाओं से संबंधित पारिभाषिक शब्दों के उपयोग की क्षमता हासिल करने में मदद देने के तरीकों की चर्चा की।

3) उन विभिन्न स्थितियों को सूचीबद्ध किया जिनमें बच्चों को गुणा और भाग का उपयोग करना पड़ सकता है।

4) इस बात को रेखांकित किया कि इन संक्रियाओं का ऐल्गोरिद्म काफी सारी गतिविधियों के ज़रिए बताया जानी चाहिए।

इस इकाई के दौरान हमने गुणा और भाग सिखाने के कई बाल-केन्द्रित, गतिविधि-आधारित तरीकों पर विचार किया। हम उम्मीद करते हैं कि इस चर्चा से आपको ऐसी कई गतिविधियां विकसित करने तथा बच्चों के साथ उन्हें आजमाने की प्रेरणा मिलेगी।

सबक-3 के पाठ 6 व 7 के अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

पाठ - 6

- E2) ऐसा करना इसलिए जरूरी है ताकि बच्चे, रंग, आकार, आकृति जैसे गुणात्मक अंतरों में न उलझें। मसलन, एक छोटी बच्ची से आप शुरू में यह उम्मीद नहीं कर सकते हैं कि वह दो संतरे और तीन केलों को जोड़कर पांच फल कहे। वह उन्हें देखेगी और कह देगी कि दो संतरे और तीन केले हैं।
- E3) आपने यह अनुभव किया होगा कि गणितीय संक्रियाएँ करते समय बच्चे तब ज्यादा सहज महसूस करते हैं जब उनके आसपास घटने वाले उदाहरणों पर बातचीत की जाती है। ऐसी दशा में वह समस्याओं को मूर्त रूप में देख पाते हैं।

अतः यह कहा जा सकता है कि अब धारणाओं की शुरुआत में ही इबारती सवालों पर बात की जा सकती है। दोनों तरह से इबारती सवाल हल करने और इबारती सवालों की रचना करने के रूप में। फिर इबारत में आये शब्दों जैसे जोड़ना को एक अमूर्त चिन्ह से जोड़कर अमूर्त की और बढ़ा जा सकता है।

- E4) इन दोनों के बीच अंतर कर पाना हमेशा आसान नहीं होता। खास बात यह है कि एकत्रीकरण में दो या दो से ज्यादा चीजों को आपस में मिलाया जाता है जबकि वृद्धि में किसी चीज को एक निश्चित मात्रा से बढ़ाया जाता है। दूसरी किस्म से बच्चों को वास्ता ज्यादातर पैसे या मापन के संदर्भ में होता है। दूसरी किस्म में पहले के बनिस्पत से ज्यादा समझ की जरूरत है। इसलिए बेहतर होगा कि बच्चे पहली किस्म से वाकिफ होने के बाद, शायद कक्षा 2 में आकर ही इससे सामना करें।
- E5) बच्चों का सम्पर्क दोनों किस्मों के इबारती सवालों जैसे चीजों, पैसे, मापन, समय, आदि के संदर्भ में कराना जरूरी है। शुरू में सवाल जानी-पहचानी चीजों से जुड़े हों, जिन्हें बच्चे टटोल सकें। इससे उन्हें सवाल हल करने में आसानी होगी। थोड़े ऊँचे स्तर पर उनसे विभिन्न चीजों की खरीदारी की कुल कीमत पता करने को कहा जा सकता है। (पहली किस्म)। इसी प्रकार से आप जरा बड़े बच्चों से (कक्षा 3 या 4 में) पूछ सकते हैं कि इस वक्त उनकी उम्र कितनी है और 15 वर्ष बाद कितनी होगी (दूसरी किस्म)। जहां तक मापन का संबंध है, जब तक वे विभिन्न इकाइयों व उप-इकाइयों के बारे में सीख नहीं जाते, तब तक यह जरूरी होगा कि सभी राशियाँ एक ही इकाई में हों।
- E6) गिनती के पैटर्न द्वारा आप इस प्रश्न के निष्कर्ष पर पहुंच सकते हैं; साथ ही यह भी समझना होगा कि क्रम मिलना और इस प्रकार की प्रक्रियाएँ गिनना व जोड़ने में समान है।
- E7) अंतर शब्दों में है। 'तुलना' किस्म का जो उदाहरण हमने दिया है वह प्रतीकों के रूप में यों लिखा जा सकता है। : $15 - 5 = \square$ पूरक जोड़ के उदाहरण को प्रतीकों के रूप में इस तरह लिखा जाएगा : $\square + 20 = 50$
- E9) उदाहरण के लिए, पासे और पत्थरों का खेल – जिसे ज्यादा पत्थर मिलते हैं वह जीतेगा, और जितने ज्यादा पत्थर मिलते हैं, इस आधार पर निश्चित अंकों से जीतेगा।
- E11) आपने जो मुख्य दिक्कतें देखी होंगी, वे निम्नलिखित प्रकार की हो सकती हैं :

I) 'हासिल' को न समझने की वजह से। मसलन, वह

$$\begin{array}{r}
 62 \quad 62 \\
 - 28 \text{ या } - 28 \\
 \hline
 46 \quad 44
 \end{array}$$

जैसी गलतियाँ करती है।

जिन संख्याओं में 0 कोई अंक नहीं है, उनके साथ बच्ची हासिल के सवाल ठीक से कर लेती है। लेकिन जहाँ 0 आया, उससे गड़बड़ हो जाती है, जैसे कि

$$\begin{array}{r} 60 \\ - 28 \text{ या } - 28 \text{ में!} \\ \hline 42 \end{array} \quad \begin{array}{r} 60 \\ - 28 \text{ में!} \\ \hline 48 \end{array}$$

II) 'उधार लेना' या पुनर्समूहीकरण करने के बाद भी बच्ची को पूरक जोड़ करना होगा। जैसे कि

$$\begin{array}{r} 63 \\ - 28 \text{ में पुनर्समूहीकरण करके} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{दहाई} \quad \text{इकाई} \\ 5 \quad 13 \text{ मिलता है।} \\ 2 \quad 8 \\ \hline \end{array}$$

अभी बच्ची को यह तो पता करना ही होगा कि 8 में कितना जोड़ने से 13 बनता है, जो पूरक जोड़ के उदाहरण है।

$$\begin{array}{r} 200003 \\ - 78697 \\ \hline \end{array} \quad \text{III) उसे जैसे सवालों में 3 में से 7 घटाने के लिए 1 लाख उधार लेना होगा।}$$

इससे वे चक्कर में पड़ जाती है।

E15) दोनों, लेकिन पहला ज्यादा महत्वपूर्ण है। अगर बच्ची की मानसिक प्रक्रियाएँ और कौशल ठीक तरह विकसित हों, तो वह कई तरह के सवाल ठीक से कर पाएगी। हो सकता है कभी-कभार गलत उत्तर आ जाए, क्योंकि उसका ध्यान कहीं और हो। लेकिन दूसरी ओर, अगर शिक्षक सिर्फ सही उत्तर को चाहे, तो हो सकता है कि बच्चे ठीक से गणित कभी न सीखें।

E16) इसके लिए उन्हें निम्नलिखित जैसे पैटर्नों को बनाने और बढ़ाने का मौका दें।

i) $1 + 1 = 2$

$$2 + 1 = 3$$

⋮

$$8 + 1 = 9$$

$$9 + 1 = 10$$

iii) $1 + 1 = 2$

$$2 + 2 = 4$$

⋮

$$9 + 9 = 18$$

ii) $1 - 1 = 0$

$$2 - 1 = 1$$

⋮

$$9 - 1 = 8$$

iv) $2 - 2 = 0$

$$3 - 2 = 1$$

⋮

$$9 - 2 = 7$$

- E18) बच्चों को ढेर सारी माचिस की तीलियाँ देकर उनसे कहिए कि वे इनके दस-दस के बंडल बना लें। सबसे पहले तो उन्हें इस बात से अच्छी तरह से परिचित होने दीजिए कि बंडल दहाई और तीलियाँ इकाई को दर्शाती हैं। अब वे इनका उपयोग घटाने की क्रमबद्ध गतिविधियों में करें। पहले 16-5 जैसे, फिर 26-9 जैसे, और आगे चलकर 82-37 जैसे सवाल करके। 26-9 जैसे सवालों को हल करते हुए उन्हें उधार का अर्थ समझ आने लगेगा क्योंकि इसमें उन्हें 20 दर्शाने वाले दो बंडलों में से एक लेकर, उसे खोलकर पहले से मौजूद 6 तीलियों में से दस तीलियाँ जोड़नी होंगी।

बंडल	तीलियाँ	बंडल	तीलियाँ
2	6	1	16
—	9	—	9
कुल		1	7

इस गतिविधि को विभिन्न तरीकों से अलग-अलग चीजों के साथ कई बार दोहराएं। इसके बाद ठोस वस्तुओं के सहारे के बगैर घटाने की संक्रिया का अभ्यास करवाएं। इस तरह के काफी अभ्यास के बाद बच्चे उधार वाले घटाने के सवाल, मन में भी आराम से करने लगेंगे।

आप 'बंडल' गतिविधि या 'मोती' गतिविधि को ढालकर उपयोग कर सकते हैं। अनगिनत सम्भावनाएं मौजूद हैं।

- E19) चित्रात्मक निरूपण के उदाहरणों को यदि आपने ढंग से देखा हो तो आप इस प्रश्न के निष्कर्ष पर आसानी से पहुंच सकते हैं। साथ ही जोड़ में भी समूहन, पुर्नसमूहन जोड़ क्रम से आता है। इसके कारण को भी इसके उत्तर के लिए काम में लाया जा सकता है।

पाठ-7

- E1) बच्चों को टोलियों में बाँट दें। हर टोली को 1 से 50 तक संख्या वाले कार्ड अच्छी तरह फेंट कर दे दें और एक संख्या दे दें। हर टोली को यह पहचानना है कि यदि वे दी गई संख्या के अनुसार छोड़-छोड़कर गिनती करें, तो कौन-कौन से कार्ड प्राप्त होंगे। इस तरह, एक टोली मान लीजिए 5 संख्याएं छोड़कर गिनती करेगी। दूसरी टोली 7 संख्याएं छोड़-छोड़कर प्राप्त संख्याएं खोजेगी, वगैरह। यह करने के बाद सारी टोलियाँ एक-दूसरे को अपने निष्कर्ष बता सकते हैं।
- E2) रेत के ढेर में एक टहनी या डंडी खड़ी कर दीजिए। इससे 10 मीटर दूर एक गोला बना लीजिए। हर बच्ची गोले में खड़ी होकर एक गेंद इस डंडी पर फेंके। यदि गेंद डंडी को लग जाए, तो उसे पांच अंक मिलेंगे। हर बच्ची को 10 मौके मिलेंगे। 10 मौके पूरे होने पर उसे बताना होगा कि उसने कितनी बार डंडी को मारा और उसे कुल कितने अंक मिले।

इस खेल को निम्नानुसार थोड़ा बदला भी जा सकता है। एक डंडी की बजाय चित्र 6 के अनुसार 10 डंडियां गाड़ दें। अब गेंद की बजाय एक डंडी का उपयोग करें। हर बच्ची को एक ही मौका मिलेगा। एक बार में गिरी प्रत्येक डंडी के लिए उसे 5 अंक मिलेंगे। हर बच्ची को पता करने दीजिए कि उसे कितने अंक मिले। बच्चों को प्रोत्साहित कीजिए कि वे अंकों की गिनती के लिए छोड़-छोड़कर गिनती करने के तरीके का उपयोग करें।



आप 2 से.मी. गहरा एक गड्ढा भी बना सकते हैं। हर बच्चे को इस गड्ढे से 3 मीटर दूर खड़े होकर एक कंचे को इसमें लुढ़काना होगा। यदि कंचा गड्ढे में चला जाता है, तो उस बच्चे को 5 अंक मिलेंगे। हर बच्चे को 10 मौके दिए जा सकते हैं।

- E4) 1981 में ब्रिटेन के 66 ग्यारह वर्षीय बच्चों पर ब्रॉउन द्वारा किए गए एक अध्ययन से पता चला कि 9 X 3 से संबंधित कहानी बनाने में 23 बच्चों ने 'दर' मॉडल व 5 ने 'पैमाना' मॉडल का उपयोग किया। शेष बच्चे इसे कर ही नहीं पाए। क्या आपके परिणाम ऐसे ही हैं ? या कुछ बच्चों ने कोई अन्य मॉडल (मसलन, आयताकार समूह) का भी उपयोग किया ? क्या 7 वर्षीय बच्चों ने सिर्फ 'दर' मॉडल का उपयोग किया ?

- E5) बच्ची को पहाड़े किसी भी क्रम में और बीच-बीच से दोहराना आना चाहिए। उससे पहाड़े के बीच में से कोई तथ्य पूछिए। यदि वह सही उत्तर दे पाए। तो हो सकता है कि वह पहाड़े जानती है। यदि वह क्रम से हटकर गुणन-तथ्य न बता पाए तो उसे बराबर मात्रा के समूह जोड़ने तथा छोड़-छोड़कर गिनती करने के अभ्यास की ज़रूरत है।

ऐसी गतिविधियां भी सोची जा सकती हैं जिनमें बच्चों को अन्य बच्चों या शिक्षक द्वारा पूछे गए सवाल का फौरन जवाब देना पड़े। लेकिन ऐसा करने से पहले उन्हें बराबर मात्रा के समूहों की अलग-अलग राशियां जोड़ने तथा विभिन्न मात्रा के समूहों को जोड़ने का काफी अभ्यास करना होगा।

- E6) बेशक तीसरा सबसे अहम है। उसके बगैर बाकी दो बेकार हैं।

- E7) बच्चे को गुणन-तथ्यों का अभ्यास करवाने के लिए कई गतिविधियां आयोजित की जा सकती हैं। बच्चों को दो टोलियों में बांटा जा सकता है। एक टोली दूसरी टोली से इस तरह के सवाल करे : 4 गुना 3 कितना ?, 5 दूनी कितना ?, 5 तिया क्या होगा ?, वगैरह। प्लैश कार्ड तथा स्व-सुधार कार्डों का उपयोग भी किया जा सकता है (चित्र 7 देखें)।

$$5 \times 3 = ?$$

(क)

$$5 \times 3 = 15$$

(ख)

चित्र-7

- E8) हो सकता है कि यह अभ्यास आपको इतना दिलचस्प लगे कि आप इससे मिलता-जुलता अपना प्रोजेक्ट बनाना चाहें।

- E9) दूसरे चरण में हम 35 को 2 से गुणा कर रहे हैं या 20 से?

- E10) अपने ऐल्गोरिद्म को लिख लीजिए। यह समझाइए कि क्यों इस विधि के लिए एक विशेष तरीके की ज़रूरत है। यानी क्यों बाएं से शुरू करना, दूसरी पंक्ति में $\times$ लगाना, तीसरी कतार में $\times \times$ (दो कट) लगाना ज़रूरी है।

- E11) एक वजह यह है कि भाग में ऐल्गोरिद्म लागू करते वक्त बच्चे को एक साथ दो स्थान के अंकों पर ध्यान देना पड़ सकता है। ऐसा उसने अन्य किसी संक्रिया में नहीं किया है। (मसलन, 225 में 5 का भाग देते वक्त उसे एक साथ बाईं ओर के दो अंकों पर गौर करना होगा।)

- E12) चूंकि गुणा व भाग एक-दूसरे के उलट हैं, इसलिए दोनों को साथ-साथ सीखने से दोनों को समझने में आसानी होगी। यह कतई ज़रूरी नहीं है कि भाग शुरू करने से पहले गुणा सीखकर उस पर महारत हासिल कर ली जाए।

- E13) आप यह बात भाग को बारम्बार घटाने की प्रक्रिया मानकर दिखा सकते हैं। मसलन, $6 \div 0$ का उत्तर पाने के लिए हमें देखना है कि 0 को 6 से कितनी दफ़ा घटाकर हमें 0 मिलेगा। लेकिन, कितनी भी दफ़ा घटाने पर, हमें 0 कभी नहीं मिलेगा।

- E14) इस पाठ्यक्रम में आपने अब तक जो कुछ पढ़ा है, उसके आधार पर आप कई अंदर और बाहर खुले में खेले जाने वाले खेल या ऐसे क्रियाकलाप तैयार कर सकते हैं जो उन्हें पसन्द आएँ। अहम् बात यह है कि पूरी गतिविधि के दौरान आप यह अवलोकन करते रहें कि वे क्या कर रहे हैं। उनसे बातचीत कीजिए और उन्हें प्रोत्साहित कीजिए कि वे भाग की अवधारणा व प्रक्रिया की अपनी समझ को व्यक्त करते चलें। बच्चों के लिए यह ज़रूरी है कि वे पारिभाषिक शब्दों को अलग-अलग संदर्भों में बोलें और

सुनें ताकि उन्हें समझ सकें, और ऐसी स्थितियाँ खुद बनाएं जहाँ वे इन शब्दों का उपयोग करें। आप कुछ ऐसे कहानियाँ भी तैयार कर सकते हैं जिनमें बच्चों को इन शब्दों की परिभाषा/वर्णन को समझने में मदद मिले। मसलन, 'किसी खेल के लिए 5-5 बच्चों की टोलियाँ बनानी हैं। कक्षा में 38 बच्चे हैं। कितनी टोलियाँ बनेगी और कितने बच्चे शेष रहेंगे जिन्हें अन्य कक्षाओं के साथ मिला लेंगे?'।

E15) 2-अंक या 3-अंक की संख्याओं में 1 अंक की संख्या का भाग सीखने के लिए एक अच्छा साधन रंगीन कार्डों से बनाया जा सकता है। ये कार्ड 100 रुपये, 10 रुपये और 1 रुपये को दर्शा सकते हैं। बच्ची को कुछ 10 रुपये वाले और कुछ 1 रुपये वाले कार्ड देकर कहा जा सकता है कि वह उन्हें कुछ निर्धारित हिस्सों में बराबर-बराबर बाँटे। निम्न प्रकार की स्थितियाँ सामने आ सकती हैं :

- 1) दहाई (यानी 10 रुपये वाले कार्ड) और इकाई (यानी 1 रुपये वाले कार्ड) दोनों ही निर्धारित संख्या से भाज्य हों, जैसे $86 \div 2$, $93 \div 3$, वगैरह।
- 2) दहाई में शेष बचे, परन्तु कुल मिलाकर कुछ शेष न रहे। इस मामले में शेष दहाइयों को इकाइयों में बदलना होगा, पहले से मौजूद इकाइयों में जोड़ना होगा और फिर बाँटना होगा, जैसे $56 \div 2$, $72 \div 3$, वगैरह। इनमें से प्रत्येक उदाहरण में पहले चरण में एक दहाई शेष रहेगी। लेकिन इकाई में जोड़कर भाग देने पर कुछ भी शेष नहीं रहेगा।
- 3) भाग देने पर कुछ रह जाए, जैसे $35 \div 3$, वगैरह।

बच्ची धीरे-धीरे इसी तरह सैकड़ा, दहाई व इकाई के कार्ड के साथ भाग देने लग सकती है।

टुकड़े या पूरे?

इस अध्ययन के विषयवस्तु

पाठ – 8 किस पूर्ण के हिस्से?

परिचय – उद्देश्य – आधा यानि कितना ? पूर्ण और उसके हिस्से – सारांश ।

पाठ – 9 भिन्न की किस्में

परिचय – उद्देश्य – भिन्न के लिए चित्र बनाना, भिन्नों का मापन, भिन्नों का पैमाना, जटिल भिन्न एवं सारांश ।

पाठ – 10 दशमलव

परिचय – उद्देश्य – भिन्नों के लिए दस का पैमाना – दशमलवों का गणित – सारांश ।

पाठ-8, 9 व 10 के अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

इस इकाई की शुरुआत हम पहेली से करते हैं—

एक वृत्ताकार बर्फीले जमे तालाब के बीचों-बीच एक पहलवान बैठा है और उसे छलांगे लगाकर तालाब से बाहर निकलना है। एक शर्त है : पहली छलांग तालाब के किनारे तक की दूरी की आधी से ज्यादा नहीं हो सकती। दूसरी छलांग पहली छलांग की दूरी की आधी से ज्यादा नहीं हो सकती। ऐसे ही, तीसरी, चौथी छलांग। सवाल है : क्या वह पहलवान बर्फ के पिघलने से पहले (यानि गर्मियाँ आने से पहले) तालाब से बाहर आ सकता है? सोचकर देखा जाए। पहली छलांग किनारे से आधी दूरी तक ले आयेगी। दूसरी छलांग बाकी आधी दूरी की आधी दूरी तक होगी। तीसरी छलांग बची दूरी की और आधी दूरी तक होगी। इसी तरह चौथी, पाँचवीं, छलांगें....। साफ है, वह पहलवान कभी भी किनारे तक नहीं पहुँच पायेगा— गर्मियों में बर्फ पिघल जाएगी और वह पानी में डूब जाएगा।

इस पहेली में खास बात है : पूरे के टुकड़ों की बात। इसमें पहलवान को दूरी का आधा टुकड़ा ही हासिल है। हम टुकड़ों को अच्छी तरह जानते हैं— $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ आदि। इनको भिन्न कहा जाता है। इस इकाई में हम इन्हीं भिन्न संख्याओं पर बात करेंगे।

पाठ—8

किस पूर्ण के हिस्से

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - आधा यानि कितना?
 - पूर्ण और पूर्ण के टुकड़े
- सारांश

परिचय

वैसे तो भिन्न संख्याओं से बच्चों का सामना रोज़ाना होता है मगर आम तौर पर इनके वास्तविक अर्थ को लेकर उनके विचार काफी उलझे हुए होते हैं। उदाहरण के तौर पर बातचीत में, जहाँ वास्तव में 'हिस्सा' शब्द का इस्तेमाल होना चाहिए, वहाँ बच्चे गलती से 'आधा' शब्द का इस्तेमाल करते हैं। हमें आधा केक तभी मिल सकता है जब केक को दो बराबर भागों में बांटा जाए। परन्तु हकीकत में हर हिस्सा ही तकरीबन आधा होता है। जब हम आधा किलोग्राम चाय खरीदते हैं तो, वास्तव में हमने एक पैकेट चाय खरीदी होती है। यहाँ कई बच्चों के लिए आधे का मतलब सिर्फ एक लेबल हो जाता है। आधे को लेकर बच्चों में एक और आम गलतफहमी यह होती है कि आधा तभी मिलता है जब एक पूर्ण (यानी एक पूरी वस्तु) के हिस्से किए जाएं। वे यह नहीं समझ पाते कि 'पूर्ण', चीजों का एक समूह भी हो सकता है। एक पूरे को दो आधों में बाँटना बच्चों के लिए मुश्किल होता है। अक्सर यह देखा जाता है कि वे दो हिस्से करके रुकने की बजाय हिस्से करते चले जाते हैं। वे सोचते हैं कि एक बार काटने से एक हिस्सा मिलता है और दो बार काटने से दो हिस्से। यह भी देखा गया है कि बच्चे किसी वस्तु, जैसे कि केक के हिस्से करते वक्त दो छोटे टुकड़े निकाल लेते हैं और एक बड़ा हिस्सा अविभाजित ही छोड़ देते हैं। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि अक्सर बच्चों में हिस्सों व पूर्ण के बीच संबंध की समझ नहीं होती। अगर किसी बच्चे के पास आधा भाग होता है तो वह यह नहीं समझ पाता कि दूसरा हिस्सा भी आधा ही होगा। कारण यह है कि ऐसा समझने के लिए हिस्से और पूर्ण के आपसी संबंध को समझना आवश्यक होता है। बच्चों के विचार उलझे हुए क्यों होते हैं ? इस पाठ में हमने कुछ ऐसी शिक्षण विधियों के सुझाव दिए हैं जिनसे बच्चों को इन उलझनों से बाहर निकलने में मदद मिल सकती है।

उद्देश्य

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप

- भिन्न की संकल्पना पढ़ाने के लिए कई बाल केन्द्रित विधियों का इस्तेमाल कर सकेंगे।
- इस्तेमाल की गई विधि का मूल्यांकन कर सकेंगे।
- जरूरत पड़ने पर इस्तेमाल की गई विधि में परिवर्तन कर सकेंगे।

क्या आधा सचमुच आधा है?

उस दिन रेणु के दोनों बच्चे, 10 साल की मीना और 8 साल का रवि खाना खा रहे थे। दोनों का खाना पूरा हो गया था लेकिन एक रोटी बच गई थी। रेणु ने उनसे कहा कि उसे भी आपस में बाँटकर खत्म कर दें। रवि ने रोटी ली, एक कोने से छोटा सा टुकड़ा तोड़कर मीना को दे दिया। मैंने रवि से पूछा कि उसने अपनी बहन को कितना हिस्सा दिया है। उसने बेहिचक जवाब दिया 'आधा'।



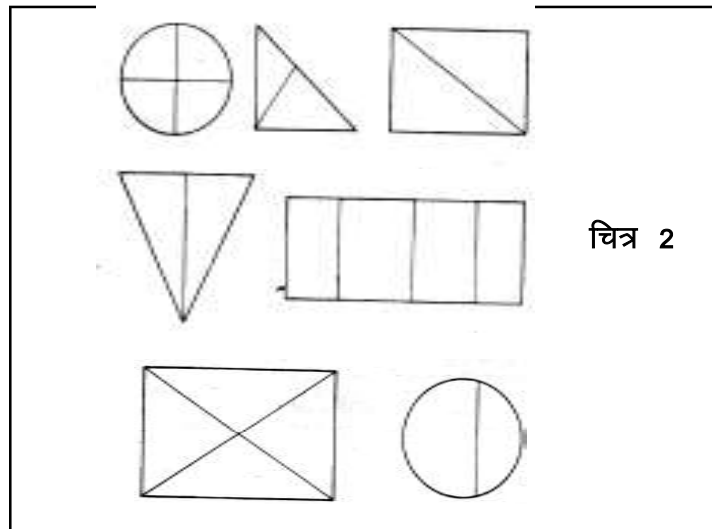
चित्र-1 : सोनू यह लो तुम्हारा आधा गिलास दूध

मैंने एक बिस्कुट लिया और एक छोटा सा टुकड़ा उसे देकर पूछा कि उसे कितना बिस्कुट मिला। उसका जवाब वही था, 'आधा'। यानि रवि पूरी चीज के किसी भी टुकड़े को 'आधा' मानता है।

इस आयु समूह के बच्चों के साथ यह दिक्कत आम बात है। पूर्ण का कोई भी टुकड़ा उनके लिये आधा होता है। मगर यह गलतफहमी होती क्यों है ? एक वजह तो यह हो सकती है कि उन्होंने बचपन में अपनी माँ को इसी ढंग से आधी चपाती या आधा गिलास दूध देते देखा होगा। मगर कौतूहलवश मैं तीसरी कक्षा के एक वर्ग में पहुँच गई जहाँ शिक्षिका एन.सी.ई.आर.टी. की पाठ्य पुस्तक से 'भिन्न' पढ़ाना शुरू करने वाली थी। उन्होंने विभिन्न आकृतियाँ बनाई। (चित्र 2)

आकृतियाँ बनाने के बाद उन्होंने बच्चों से पूछा कि कौन सी आकृतियाँ दो बराबर हिस्सों में बाँटी गई हैं और कौन सी आकृतियाँ चार बराबर हिस्सों में बाँटी गई हैं। अधिकांश बच्चों के उत्तर सही थे।

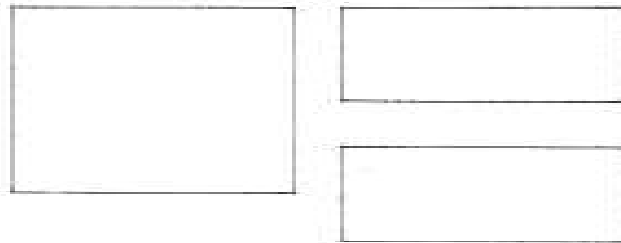
तब उन्होंने कुछ और आकृतियाँ बनाई। (चित्र 3)



चित्र 3

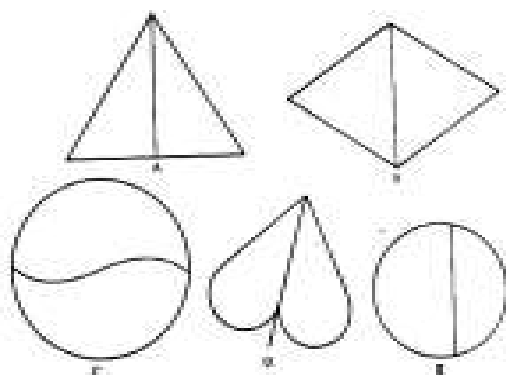
हर आकृति दो बराबर भागों में बंटी हुई थी। एक हिस्सा छायादार था और दूसरा साफ। उन्होंने छात्रों को बताया कि हर आकृति में छायादार भाग और साफ भाग पूरे का आधा-आधा है तथा हम हर ऐसे हिस्से को 'आधा' कहते हैं। इसके बाद उन्होंने एक कागज लेकर, उसके दो किनारों को मिलाते हुए मोड़कर दो बराबर हिस्सों में काट दिया।

चित्र 4



फिर उन्होंने दो छात्रों को बुलाया और प्रत्येक को एक-एक टुकड़ा दे दिया। अब उन्होंने पूरी कक्षा से पूछा कि दोनों छात्रों के पास कितना-कितना कागज है। पूरी कक्षा ने जवाब दिया, 'आधा'। तब उन्होंने दोनों टुकड़े लिए और उन्हें एक के ऊपर एक रखकर बताया कि दोनों टुकड़े बराबर हैं। इसी ढंग से उन्होंने एक-चौथाई (या पाव) की संकल्पना भी समझाई। अन्त में उन्होंने किताब से कुछ सवाल कक्षा में करने को तथा कुछ होमवर्क के रूप में दे दिए। शिक्षक काफी संतुष्ट दिख रही थीं। ऐसा लगता था कि वे जो कुछ करना चाहती थीं, उसे करने में सफल रहीं। लेकिन मुझे थोड़ा संदेह था। मुझे यकीन नहीं था कि यह बात सचमुच बच्चे समझ गए हैं कि किसी भी पूरी चीज का आधा प्राप्त करने के लिए दो बराबर भाग करने का महत्व क्या है। इसके अलावा यह समझाना भी जरूरी था कि दो बराबर भाग करने के कई तरीके हो सकते हैं। यानी यह कोई जरूरी नहीं है कि विभाजक रेखा सरल रेखा ही हो।

मैंने तय किया कि प्रेक्षकों के आधार पर कुछ मूल्यांकन करना चाहिए ताकि यह पता लगाया जा सके कि शिक्षिका व बच्चों के बीच वास्तव में कितना संवाद हुआ है। दो दिनों बाद मैं अनीता के घर चली गई। अनीता मेरी सहेली की बेटिया थी थोड़ी इधर-उधर की बातचीत के बाद मैंने अनीता को पांच आकृतियाँ दिखाई (चित्र-5)

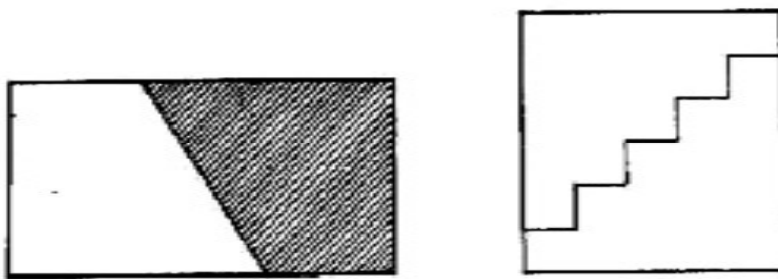


चित्र-5

उदाहरण 1

- मैं : अनीता जरा बताओ इनमें से कौन-सी आकृतियाँ दो बराबर भागों में बंटी है?
- अनीता : आकृति A, B, और E दो बराबर हिस्सों में बँटी है। आकृति C नहीं बंटी है और D, हां D भी दो बराबर भागों में बँटी है।
- मैं : क्या तुम पक्का कह सकती हो कि C दो बराबर भागों में नहीं बंटी है और E दो बराबर भागों में बँटी है।
- अनीता : हां, आन्टी, मैं पक्का कह सकती हूँ।
- मैं : अच्छा। चलो हम C की आकृति का एक कागज लेते हैं। मैं इसे बीच वाली वक्र रेखा पर से काट देती हूँ। लो, हमारे पास दो टुकड़े हो गए।
- अब इन्हें एक के ऊपर एक जमाएँ तो क्या होगा?
- क्या एक टुकड़ा दूसरे पर पूरा जम जाता है?
- अनीता : हां आन्टी।
- मैं : मतलब दोनों टुकड़े बराबर हैं।
- अनीता : हां, ये टुकड़े भी बराबर है। अब मुझे पता चल गया कि आकृति C भी दो बराबर भागों में बँटी है।

मुझे बहुत अच्छा लगा कि अनीता ने जवाब खुद ब खुद दिया। अब मैंने आकृति E को लिया। हालांकि उसके दो भागों के बीच बहुत ज्यादा अन्तर नहीं था। मगर कागज को काटकर मैं उसे समझा पाई कि इसके दो भाग बराबर नहीं हैं। मैंने उसके साथ चित्र -6 में दिखाई दो और आकृतियों के बारे में बातचीत की।



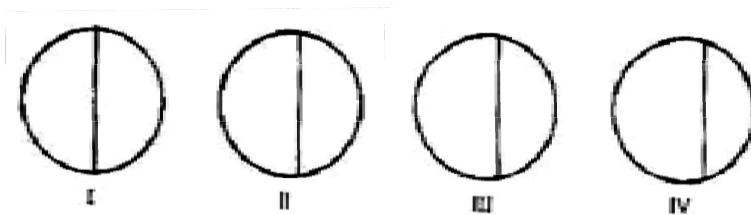
चित्र-6

अब अनीता विश्वास के साथ सही जवाब दे रही थी।

अनीता को ऐसा क्यों लगा था कि C के दो बराबर भाग नहीं किए गए हैं ?

आकृति E को लेकर अनीता को जो दिक्कत आई, वह कोई अनोखी बात नहीं है। प्रायः यह देखा गया है कि जब तक दो भागों के बीच अन्तर एकदम स्पष्ट न हो जाए तब तक बच्चे उन्हें आधा ही कहते हैं। चित्र-7 की तीसरी आकृति तक वे दोनों भागों को बराबर बताते रहते हैं। इसका मतलब यह है कि कक्षा में पूर्ण के आधे की बात पढ़ाते वक्त दो बराबर भाग करने के महत्व पर जोर देना चाहिए। बच्चों को यह भी दिखाया जाना चाहिए कि कब दो हिस्से सचमुच बराबर होते हैं। इस संदर्भ में हम यहां दो गतिविधियाँ दे रहे हैं। शिक्षक इन्हें अपनी कक्षा में करवा सकते हैं।

दो भाग तब बराबर होते हैं जब एक को दूसरे पर रखने पर वह पूरा ढक जाए।



चित्र - 7

गतिविधि (i) : एक बड़ा कागज और तीन-चार टुकड़े लें। बच्चों से यह पता लगाने को कहें कि कौन से टुकड़े बड़े कागज के आधे हैं।

गतिविधि (ii) : एक रिबन लें। दो बच्चों से कहें कि वे इसे आपस में इस तरह बांटें कि दोनों को आधा-आधा मिले। जब वे आपस में बांट लें तो उनसे कहिए कि वे जांच करें कि क्या सचमुच दोनों हिस्से बराबर हैं।

इसके अलावा छात्रों से किसी वृत्त, वर्ग या त्रिकोण के दो बराबर भाग करने जैसी गतिविधि करवानी चाहिए। दो बराबर भाग 3-4 अलग-अलग ढंग से करने को कह सकते हैं। सिर्फ वृत्त, वर्ग या त्रिकोण के दो हिस्से करने का ही अभ्यास नहीं करवाना चाहिए। बच्चों को यह भी समझना चाहिए कि यदि 10 कारों की दौड़ में पांच कारें आखिर तक नहीं पहुँचती तो इसका मतलब यह है कि आधी कारें आखिर तक नहीं पहुँची।

शुरुआत में आप ऐसा उदाहरण ले सकते हैं जहाँ बराबर बंटवारा सम्भव हो। जैसे- अगर 10 गोलियाँ दो बच्चों में बराबर-बराबर बाँटी जाएं तो दोनों को गोलियों का आधा-आधा भाग मिला। यानि 10 का आधा 5. बच्चों से 6 या 14 शीशियों के ढक्कन या चॉक या कोई अन्य चीज लेने को कहें। अब उनसे कहें कि आधी चीजें अलग करें। अब कितनी चीज उनके पास हैं? इस पर चर्चा करें।

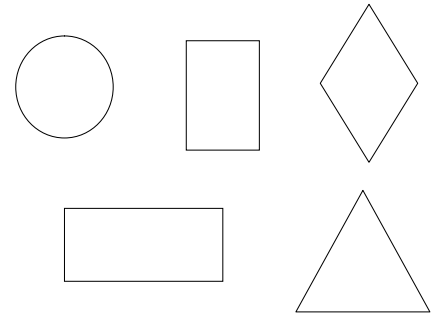
E1) ऐसी दो और गतिविधियाँ बताइए जिनके द्वारा यह पता चल सके कि बच्चे सचमुच इस बात को समझ गए हैं कि किसी पूरे का आधा पता लगाने के लिए दो बराबर हिस्से करना जरूरी है।

$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ आदि की संकल्पना भी इसी तरह से पढ़ाई जा सकती है।

यहाँ कुछ गतिविधियों के सुझाव दिए गए हैं, जो शायद आपको उपयोगी लगें।

उदाहरण 2 : चित्र-8 में दिखाई गई किसी भी आकृति का कागज लें।

इसे दो विपरीत किनारे मिलाते हुए मोड़ लें। मोड़ पर अच्छे से दबा लें। अब इसे वापिस खोल लें। आप देखेंगे कि एक रेखा द्वारा कागज दो बराबर हिस्सों में बंट गया है। यानि एक-दूसरे के ऊपर रखे जाने पर ये हिस्से एक-दूसरे को पूरा-पूरा ढंक लेंगे। प्रत्येक हिस्सा पूरे का आधा है। अब कागज को इसी तरह एक बार और मोड़िए। कागज अब चार हिस्सों में बंट जाएगा।

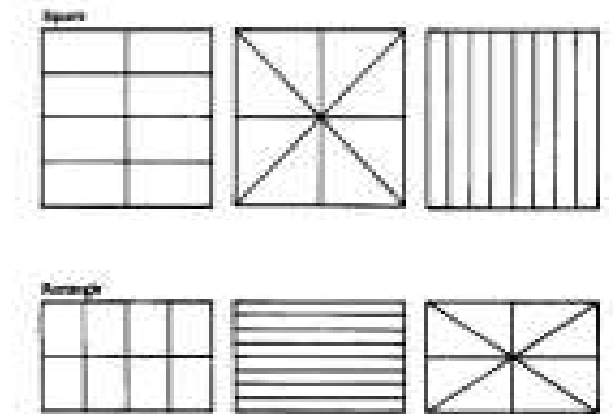


चित्र-8

इस तरह आप बच्चों को 1 के 2 भाग, 1 के 4 भाग, 1 के 8 भाग, 1 के 16 भाग आदि से परिचित करा सकते हैं। $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

यह ध्यान रखें कि वर्ग और आयत को कई ढंगों से आठ भागों में बांटा जा सकता है। कुछ ढंग चित्र-9 में दिखाए गए हैं।

बच्चों को इस प्रकार की गतिविधियाँ आसान व रोचक लगती हैं। मगर इस गतिविधि द्वारा $\frac{1}{3}$ दिखा पाना शायद उनके लिए आसान न हो। यहाँ आप बच्चों की मदद कर सकते हैं। कागज को तीन बराबर भागों में मोड़ना सिखाकर आप फिर $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ आदि दिखा सकते हैं।



चित्र-9

अंकित चौथी में पढ़ता है और उसे गणित में रुचि है। वह गणित का सक्रिय छात्र है। वह गणित की कुछ दिक्कतें लेकर मेरे पास आया था। उससे बात करते हुए मुझे पता चला कि उनकी कक्षा में भिन्न संख्याओं का अभ्यास अभी-अभी पूरा हुआ है। तो मैंने सोचा कि क्यों न उससे कुछ सवाल करवाकर देखा जाए। मैंने कुछ आकृतियाँ बनाकर उससे पूछा कि प्रत्येक में छायादार हिस्सा पूरे का कितना अंश है, भिन्न के रूप में लिखो (चित्र-10)

इसका जवाब था—

(क) $\frac{3}{4}$ (ख) $\frac{2}{5}$ तथा (ग) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

E2) (क) आपके विचार में अंकित की दिक्कत क्या थी?

(ख) क्या यह बच्चों की आम दिक्कत है?

(ग) आप उसकी मदद कैसे करेंगे?

E3) कागज मोड़कर $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ दिखाने में आप बच्चे की मदद

E4) क्या आप कोई ऐसी गतिविधि सुझा सकते हैं जिससे बच्चे को $\frac{1}{5}$ की संकल्पना समझने में मदद मिले?

E5) कक्षा में भिन्न पढ़ाने के अपने तरीके की सफलता का मूल्यांकन आप कैसे करेंगे?

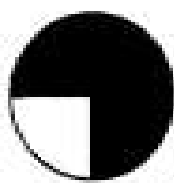
ऊपर की गई चर्चा से आप समझ ही गए होंगे कि हिस्से को पूरे के संदर्भ में देख पाना बच्चों के लिए एक और उलझन का विषय साबित होता है। अगले खण्ड में हम इसी समस्या पर गौर करेंगे।

पूर्ण और उसके हिस्से

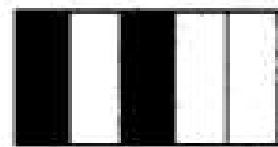
भिन्न को समझने में एक अड़चन यह आती है कि इसे अलग से स्वतंत्र इकाई के रूप में नहीं देखा जा सकता। भिन्न का मतलब तभी है जब उसे उस पूरे से जोड़कर देखा जाए जिसका वह भाग है। किसी चीज का हिस्सा समझने से पहले जरूरी है कि हम उस पूरी चीज को जानते हों जिसका वह हिस्सा है। आप इस बात से तो सहमत होंगे कि तीन-चौथाई (पौन) का मतलब यह है कि किसी पूर्ण को चार बराबर भागों में बांटकर उनमें से तीन भाग लिए गए हैं। या यह भी हो सकता है कि समूह में चार वस्तुएं या सदस्य थे जिनमें तीन ले लिए गए हैं। या थोड़ा अलग रूप से देखने पर इसका मतलब यह भी हो सकता है कि तीन पूर्ण को चार बराबर भागों में बांट दिया गया है। इन सारे तरीकों से नतीजा एक ही निकलेगा मगर ध्यान रखने की बात यह है कि ये अलग-अलग संकल्पनाएं हैं। इन्हें समझने में बच्चों को मार्गदर्शन की आवश्यकता होती है।

कुछ शिक्षकों व बच्चों के माता-पिता से बातचीत करके ऐसा लगता है कि जब केवल एक पूर्ण दिया जाए तो बच्चे 'हिस्से' व 'पूर्ण' की संकल्पना आसानी से समझ पाते हैं। मगर जब 'पूर्ण' चीजों का एक समूह हो, तो उन्हें इसके हिस्से लिखने में दिक्कत होती है। इस समस्या से निपटने का एक तरीका यह भी हो सकता है कि हम हिस्सों की बात करते हुए हर बार उससे संबंधित पूर्ण का भी उल्लेख करें। सिर्फ चौथाई (पाव) कहने के बजाय हम सेब का चौथाई हिस्सा, मीटर का चौथाई हिस्सा, या बारह का चौथाई हिस्सा वगैरह कहें। इसके अलावा हिस्से की संकल्पना की शुरुआत में एक पूर्ण तक ही सीमित रखें।

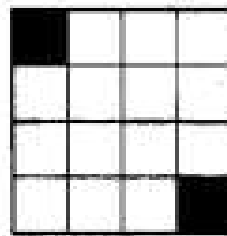
इस संदर्भ में शिक्षक कक्षा में कुछ गतिविधियाँ करवा सकते हैं। यहां एक गतिविधि दी जा रही है जो एक कक्षा में की गई थी।



क

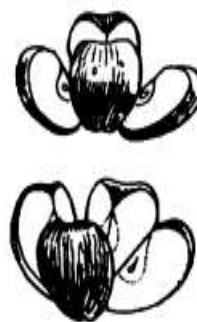


ख



ग

चित्र 10



चित्र -11

उदाहरण 3

- शिक्षिका : यह एक सेब है जिसे चार बराबर भागों में काटा गया है। मैं जब इन चार टुकड़ों को एक साथ जोड़ती हूँ (दिखाते हुए), तो पूरा सेब बन जाता है। (चित्र-11) मोहन, यहाँ आकर एक टुकड़ा ले लो। तुम्हारे पास सेब का कितना हिस्सा है?
- मोहन : एक।
- शिक्षिका : कितने हिस्सों में से?
- मोहन : चार में से एक हिस्सा।
- शिक्षिका : क्या तुम बता सकते हो कि तुम्हारे पास एक सेब का कितना भाग है?
- मोहन : जी मैडम, मेरे पास एक सेब का चौथाई हिस्सा है।
- शिक्षिका : ठीक है। अब यह एक और टुकड़ा ले लो। अब बताओ तुम्हारे पास कितना सेब है?
- मोहन : अब मेरे पास दो टुकड़े हैं।
- शिक्षिका : कितने टुकड़ों में से?
- मोहन : मेरे पास चार में से दो टुकड़े हैं।
- शिक्षिका : तुम्हारे पास चार में से दो टुकड़े हैं। क्या तुम इस बात को आधे के रूप में बता सकते हो?
- मोहन : जी मैडम, मेरे पास अब आधा सेब है।
- शिक्षिका : एक और टुकड़ा लेकर बताओ कि अब तुम्हारे पास सेब का कितना हिस्सा है?
- मोहन : अब मेरे पास चार में से तीन टुकड़े हैं।
- शिक्षिका : मतलब अब तुम्हारे पास सेब का तीन-चौथाई भाग है।
- मोहन : जी मैडम।
- शिक्षिका : मोहन के पास सेब के चार टुकड़ों में से तीन टुकड़े हैं। और इन चार टुकड़ों को जोड़ने से पूरा सेब बन जाता है। तो इस ढंग से हमें पूरे का तीन-चौथाई भाग मिलता है। यहाँ पूरे का मतलब है एक सेब।

इसके बाद शिक्षिका ने सारे बच्चों को कागज, ब्रेड, बिस्कुट, चपाती जैसी अलग-अलग चीजों, जो भी कक्षा में उपलब्ध थीं, के साथ तरह-तरह की गतिविधियाँ करवाई। इन चीजों की मदद से उन्होंने सारे बच्चों को $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ दिखाया। बीच-बीच में उन्होंने बच्चों से सवाल पूछे।

बच्चों से सारे सवालों के जवाब मिल जाने के बाद वे काफी संतुष्ट नजर आ रही थीं।

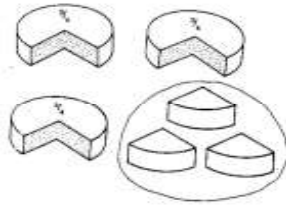
जैसा कि हमने पहले जिक्र किया था कि जब 'पूर्ण' कई वस्तुओं का एक समूह होता है, तब बच्चों को उसके हिस्सों को उस पूर्ण से जोड़कर देखने में दिक्कत होती है। इसलिए यह जरूरी है कि हम छात्रों को विभिन्न तरह के 'पूर्ण' से परिचित कराएं। जब हमें यकीन हो जाए कि बच्चे एक ही वस्तु से बने 'पूर्ण' के संदर्भ में 'अंश-पूर्ण' संबंध को भलीभांति समझ चुके हैं।

आइए अब एक बार फिर पूर्ण के तीन-चौथाई की समस्या को उठाते हैं। हम देखने की कोशिश करेंगे कि छात्रों को कितनी तरह के 'पूर्ण' से परिचित कराया जा सकता है।

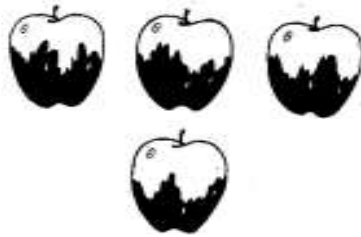
1. एक 'पूर्ण' जिसमें एक से ज्यादा मगर चार से कम चीजें हों।

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

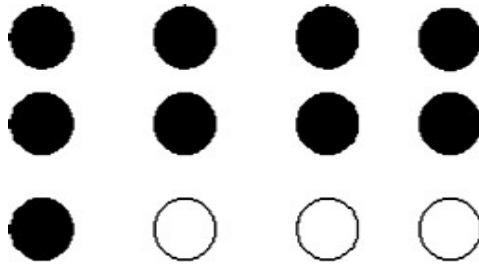
$$\frac{3 \times 1}{4} = 3 \div 4$$



2. चार चीजों से बना पूर्ण जिसमें हर चीज पूर्ण हो।



3. चार से ज्यादा चीजों से बना 'पूर्ण' जिसमें चीजों की कुल संख्या चार से विभाजित हो।



उदाहरण 4 — शिक्षिका कक्षा में कुछ टाफियां और बिस्कुट लेकर आई और बच्चों से बातचीत शुरू करते हुए उन्होंने मोहन को अपने पास बुलाया।

शिक्षिका : ये चार बिस्कुट हैं। मैंने मोहन को तीन बिस्कुट दे दिए। उसके पास कितने बिस्कुट हैं ?

छात्र : तीन बिस्कुट।

शिक्षिका : कितने में से?

छात्र : चार में से।

शिक्षिका : मोहन, क्या तुम बोर्ड पर लिख सकते हो कि बिस्कुटों का कितना हिस्सा तुम्हें मिला?

मोहन : जी, मैडम (बोर्ड वह बोर्ड पर $\frac{3}{4}$ लिखता है।)

शिक्षिका : तो क्या हम कह सकते हैं कि मोहन के पास बिस्कुट का तीन-चौथाई हिस्सा है?

मोहन : जी, मैडम

शिक्षिका : यानि इस उदाहरण में तीन-चौथाई का मतलब हुआ चार में से तीन बिस्कुट। क्या तुम बता सकते हो कि यहां 'पूर्ण' क्या है?

(कक्षा में थोड़ी देर चुप्पी रहती है।)

एक लड़का: बिस्कुट।

शिक्षिका : कितने बिस्कुट?

लड़का : चार बिस्कुट।

सभी छात्र : जी, मैडम।

शिक्षिका : शाबाश! यानी यहां हमारा पूर्ण चीजों का एक समूह है जिसमें चार बिस्कुट हैं।

अब शिक्षिका ने पांच टाफियां उठाईं और रेणु को उसमें से दो दे दीं। फिर उन्होंने ऊपर गई गतिविधि दोहराई। उन्होंने बच्चों से कई सवाल पूछे। बच्चों को अब यह ठीक से समझ आ गया था कि यहां पूर्ण का मतलब पांच टाफियां हैं। इसके बाद अभ्यास के लिए उन्होंने बच्चों को कुछ सवाल हर करने को दिए।

इस तरह से छात्रों को विभिन्न पूर्ण से परिचित कराया जा सकता है।

E6) इसी प्रकार ऊपर वर्णित सभी पूर्ण के संदर्भ में एक-एक गतिविधि बताइए।

सारांश

इस पाठ में हमने निम्नांकित पहलुओं पर चर्चा की:

- 1) 10 वर्ष तक बच्चों में आम तौर पर 'आधे' को लेकर काफी उलझे हुए विचार होते हैं। पूर्ण का कोई भी हिस्सा उनके लिए आधा होता है। वे इस बात का अर्थ नहीं समझ पाते कि किसी भी पूर्ण का 'आधा' पता लगाने के लिए दो बराबर भाग करना आवश्यक होता है। इसके अलावा कई बच्चों को लगता है कि विभाजक रेखा केवल सरल रेखा ही हो सकती है। यदि बच्चों को उनके इर्द-गिर्द उपलब्ध प्रत्येक चीजों के साथ गतिविधियां करवाई जाएं, तो काफी हद तक ऐसी गलतफहमियों से बचा जा सकता है। उन्हें वृत्त, वर्ग, त्रिकोण आदि आकृतियों को अलग-अलग ढंग से दो बराबर-बराबर हिस्सों में बांटने को कहा जा सकता है। जब वे किसी चीज को दो हिस्सों में बांट लें तो उनसे इस बात की जांच करने को कह सकते हैं कि हिस्से बराबर हैं या नहीं।
- 2) इस आयु के बच्चों को एक और दिक्कत यह आती है कि वे अंश का संबंध पूर्ण से नहीं जोड़ पाते। वे यह नहीं समझ पाते कि अंश का मतलब पूर्ण के संदर्भ में है। इस समस्या से निपटने के लिए हमें अंश के साथ सदैव सम्बन्धित पूर्ण का उल्लेख करना चाहिए। यह भी जरूरी है कि हम बच्चों को अलग-अलग गतिविधियों के जरिये विभिन्न किस्म के पूर्ण से परिचित कराएं।

पाठ – 9

भिन्न की किस्में

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - भिन्न के लिए चित्र बनाना
 - भिन्नों का मापन
 - भिन्नों का पैमाना
 - जटिल भिन्न
- सारांश

परिचय

अक्सर देखा गया है कि भिन्न को लेकर बच्चों का ज्ञान बहुत सीमित होता है। इसे एक संख्या के रूप में समझ पाना उनके लिए असंभव—सा होता है। फलस्वरूप वे भिन्न को संख्या से जोड़ नहीं पाते। यदि आप किसी बच्ची से पूछें कि 'आधा' क्या होता है, तो अक्सर यह जवाब मिलेगा कि आधा मतलब केक या रोटी या किसी अन्य चीज का एक हिस्सा होता है। यही स्थिति एक—तिहाई, एक—चौथाई या किसी भी अन्य हिस्से के साथ भी होती है। बच्चे भिन्नों और संख्याओं के बीच के संबंधों को नहीं समझ पाते। इसकी एक वजह यह हो सकती है कि बच्चों से भिन्नों की बात करते हुए जिस भाषा का इस्तेमाल हुआ है, वह त्रुटिपूर्ण हो। या फिर बच्चों ने शायद अपने शिक्षक को यह कहते कभी न सुना हो कि भिन्न संख्याएं होती हैं। बच्चे भिन्नों को मात्र उसके प्रत्यक्ष रूप में ही जानते—समझते हैं और इसलिए वे उनका प्रतीकन नहीं कर पाते।

इस पाठ में हम कुछ गतिविधियां सुझा रहे हैं जिनके प्रयोग से आप बच्चों को यह समझा पाएंगे कि भिन्नों को अमूर्त राशियों के रूप में कैसे देखें और उन्हें संकेतों के रूप में कैसे व्यक्त करें। यहां हमने भिन्न संख्याओं की तुल्यता तथा क्रमण की भी बात की है।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन करने के बाद आप

- शिक्षण के ऐसे तरीकों का इस्तेमाल कर पाएंगे जिनसे बच्चों को भिन्नों व संख्याओं के बीच का सम्बन्ध पहचानने तथा संकेतों के प्रयोग से भिन्नों का प्रतीकन करने में मदद मिलेगी।
- तुल्य भिन्नों की संकल्पना पढ़ाने के लिए विभिन्न बाल केन्द्रित विधियां इस्तेमाल कर सकेंगे।

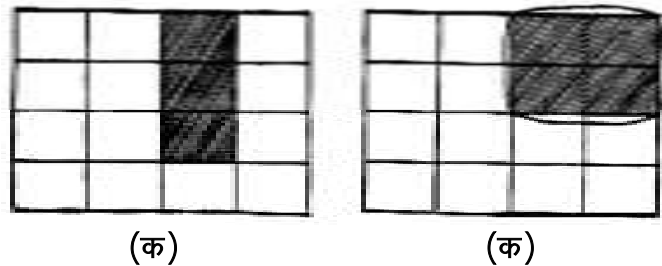
- शिक्षण के ऐसे तरीकों का प्रयोग कर पाएंगे जिनसे बच्चों को एक से बड़े व एक से छोटे भिन्न पहचानने में मदद मिलेगी तथा वे भिन्नों को सही क्रम में लिख पाएंगे।

भिन्नों का प्रतीकन

एक दिन मैं अपनी भतीजी अंकिता और उसकी सहेली रमा के बातचीत कर रही थी। दोनों कक्षा चार में पढ़ती हैं। तभी मुझे याद आया कि मेरी एक शिक्षक मित्र ने कहा था कि बच्चों को भिन्नों के प्रतीकन में दिक्कत आती है। मैंने सोचा कि क्यों न इन दो बच्चों का परीक्षण किया जाए।

उदाहरण 1

मैं : हर आकृति में छायादार भाग क्या दिखाता है?



चित्र 1

अंकिता : 1 (क) में छायादार भाग तीन बटा सोलह है और 1 (ख) में चार बटा सोलह है।

रमा : 1 (क) में तीन बटा सोलह है और 1 (ख) में एक-चौथाई है।

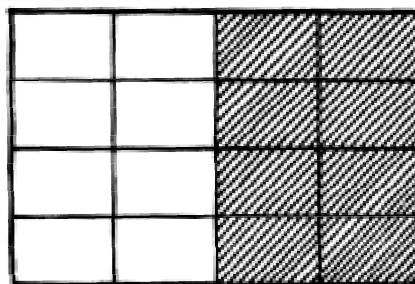
ये काफी दिलचस्प उत्तर थे। मैंने सोचा कि भिन्नों के प्रतीकन के बारे में रमा की समझ को और गहराई से आंकना चाहिए।

मैं : रमा, तुमने ऐसा क्यों कहा कि 1 (ख) में छायादार भाग एक चौथाई है?

रमा : (हिचकिचाते हुए) क्योंकि पूरे कागज पर सोलह हैं और हर तरफ हर एक में चार हैं। यदि आप इसे काटेंगे तो (हर बार चार-चार वर्गों के समूह की ओर इशारा करते हुए) यह एक चौथाई है, यह एक चौथाई है।

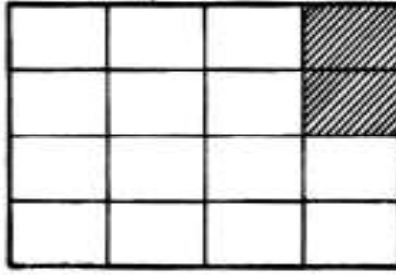
परन्तु उसे देखकर मेरे मन में शंका पैदा हुई। जब उसने कहा कि 'हर एक में चार हैं.....हर तरफ' तो उसके हावभाव से लग रहा था कि वह घेरे के अंदर के चारों आयतों को गिन रही थी। मुझे शंका यह हुई कि क्या वह यह कह रही है कि घेरेदार भाग एक चौथाई है क्योंकि उसमें चार आयत हैं या वह कह रही है कि यह एक चौथाई है क्योंकि पूरे कागज पर बराबर साइज के ऐसे चार हिस्से हैं। मेरा शक तब सही साबित हो गया जब रमा और अंकिता ने यह बताया कि कोई हिस्सा आठवां भाग कब होता है।

रमा : यह आठवां भाग है क्योंकि इसमें आठ आयत हैं।



चित्र 2

अंकिता : नहीं, आठवां भाग यह है क्योंकि पूरे को ऐसे आठ भागों में बांटा जा सकता है।



चित्र 3

यानी किसी भिन्न का प्रतीकन करना और उसे संकेतों में व्यक्त करना बच्चों के लिए और बड़ी समस्या है।

E1) ऊपर दिए गए चित्रों व व्याख्याओं में से कौन सी सही है? सही हल पर ध्यान केन्द्रित करने के लिए आप क्या करेंगे?

यह बहुत जरूरी है कि भिन्नों के प्रतीकन के तरीके को लेकर अगर बच्चे के दिमाग में कोई भ्रम है तो उसे दूर किया जाए। उसके बाद ही इस विषय में आगे बढ़ना चाहिए। जब बच्चा 'आधा', 'तिहाई', 'चौथाई' जैसे भिन्नों के नाम से सुपरिचित हो जाएं और इन शब्दों को संबंधित पूर्ण (केक का एक तिहाई) के संदर्भ में समझने लगे तब वो भिन्नों के संकेत सिखाने के लिए तैयार हो जाते हैं। ऐसा देखा गया है कि हम आम तौर पर उन्हें बता देते हैं कि 'दो तिहाई' लिखने के लिए वे 2 के नीचे एक लाइन खींचकर उसके नीचे तीन

इस प्रकार $\frac{2}{3}$ लिख दें मगर यह नहीं समझाते कि हम ऐसे क्यों लिख रहे हैं। बच्चे कई बार भ्रमित हो जाते हैं और दो तिहाई $\frac{2}{2}$ लिख देते हैं। हमें उनको यह समझाना चाहिए कि लाइन के नीचे की संख्या (हर) से पता चलता है कि पूर्ण को कुल कितने भागों में बांटा गया है जबकि ऊपर की संख्या (अंश) से पता चलता है कि हम उनमें से कितने भागों को लेते हैं। भिन्न $\frac{2}{3}$ से पता चलता है कि पूर्ण को कुल तीन बराबर भागों में बांटा गया है और हम उनमें से दो भाग ले रहे हैं। भिन्न $\frac{2}{3}$ के हर से हमें 'तिहाई' शब्द मिलता है और अंश से पता चलता है कि कितनी तिहाइयों पर ध्यान दिया जाना है।

भिन्नों को संख्या के रूप में लिखने पर हमें जोर देना चाहिए। जैसे एक कागज को दो बराबर टुकड़ों में बांटा जाता है। इन दो टुकड़ों में से एक टुकड़े को संख्या $\frac{1}{2}$ से व्यक्त किया जाता है। इस तरह बच्चे संख्या व भिन्न के आपसी संबंध को प्रत्यक्ष रूप से देख समझ सकते हैं।

इसी प्रकार बच्चों को भिन्न के प्रतीकन को संकेतों में तब्दील करने का भी अभ्यास कराना जरूरी है। शुरुआत में उन्हीं भिन्नों पर ध्यान देना अच्छा रहता है जिनमें अंश '1' हो। इससे बच्चों का ध्यान हर के महत्व पर केन्द्रित करने में मदद मिलता है। बच्चों को निम्नलिखित तालिका भरने के लिए कहा जा सकता है :

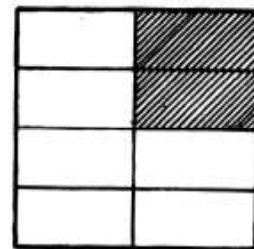
पूर्ण के बराबर हिस्सों की संख्या	2	3	4	5	6
हर हिस्से का प्रतीकन	आधा	तिहाई	चौथाई	—	—
एक हिस्से का संकेत	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	—	—	—

धीरे-धीरे बच्चे विभिन्न 'अंश' से संबंधित अभ्यास/गतिविधियां कर सकते हैं।

E2) क्या आप कक्षा में 40 बच्चों के लिए कोई ऐसी गतिविधि सुझा सकते हैं जिससे यह पता लग सके कि भिन्नों के प्रतीकन और संकेत की संकल्पना वे समझ गए हैं या नहीं?

E3) कोई बच्चा यदि भिन्नों का नामकरण उल्टा करता है अर्थात् $\frac{4}{3}$ को तीन चौथाई कहें तो आप उसे कैसे समझाएंगे।

जब एक बार बच्चे यह समझ लें कि भिन्न वास्तव में संख्याएं हैं तो हो सकता है वे उन संख्याओं पर गणितीय संक्रियाओं के बारे में भी सोचें। मगर इससे पहले कि आप उन्हें भिन्नों के जोड़ या घटा आदि सिखाएं यह जरूरी है कि उन्हें भिन्न संबंधी अन्य संकल्पनाएं जैसे कि भिन्न की तुल्यता और क्रमण आदि की पूरी समझ हो। भिन्नों के जोड़ घटा आदि समझने में इन संकल्पनाओं का बहुत महत्व है। बहुत से शिक्षकों का अनुभव है कि बच्चे ये संकल्पनाएं आसानी से नहीं समझ पाते।



चित्र-4

भिन्नों की तुल्यता

बच्चों के सामने ऐसे कई उदाहरण आते हैं जब एक ही भिन्न को एक से अधिक ढंग से व्यक्त किया जा सकता है। कई बच्चे कहेंगे कि चित्र-4 में $\frac{2}{8}$ हिस्सा छायादार है जबकि अन्य बच्चे कहेंगे कि छायादार हिस्सा $\frac{1}{4}$ है।

दोनों ही उत्तर सही हैं। मगर कई बार बच्चे इस बात को आसानी से स्वीकार नहीं कर पाते कि अलग-अलग भिन्न एक ही मात्रा या बराबर हिस्सों को निरूपित कर सकते हैं। जैसे $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \dots$ एक ही मात्रा को निरूपित करते हैं। इस तरह ये भिन्न परस्पर तुल्य या बराबर हैं।

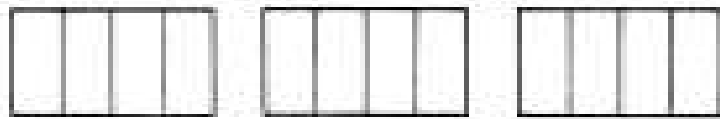
उदाहरण-2 एक बार मैं अपने पड़ोस के 4 बच्चों को दुकान में कुछ खिलाने ले गई। सभी बड़ी पेस्ट्री खाना चाहते थे।

मैं : अगर मैं 3 पेस्ट्री खरीदूं तो तुम लोग उन्हें आपस में बराबर-बराबर कैसे बांटोगे?

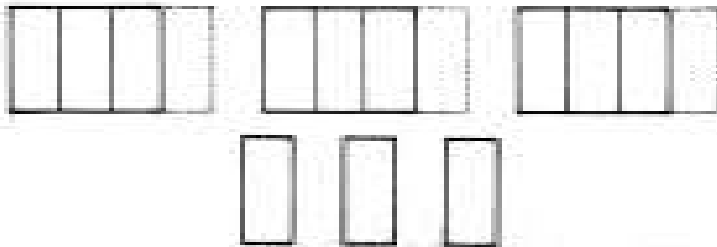
एक बच्चा : मैं हर एक पेस्ट्री के चार बराबर टुकड़े करके सबको हर पेस्ट्री का एक-एक टुकड़ा दे दूंगा। तो हम सबको बराबर-बराबर पेस्ट्री मिल जाएगी।

दूसरा बच्चा : नहीं, मैं पहले एक-एक पेस्ट्री तीन लोगों को दे दूंगा। फिर इन तीनों से कहूंगा कि वे चौथे को अपनी-अपनी पेस्ट्री का चौथाई हिस्सा दे दें। तब हम सबको बराबर हिस्सा मिल जाएगा।

मैं : ठीक। तुम दोनों ने 3 पेस्ट्री को चार बराबर-बराबर हिस्सों में इस तरह बांटा। (चित्र-5)



चित्र 5 (क)



चित्र 5 (ख)

क्यों न सब लोग जरा लिख कर बताएं कि हर एक को पेस्ट्री का कितना हिस्सा मिलेगा?

पहला बच्चा : हर एक को $\frac{1}{4}$ मिलेगा।

दूसरा बच्चा : हर एक को $\frac{3}{4}$ मिलेगा।

तीसरा बच्चा : हर एक को $\frac{3}{12}$ मिलेगा।

E4) आप इन बच्चों के उत्तरों के बारे में क्या कहेंगे? कौन सही था और कौन गलत, और क्यों?

ऊपर लिए गए उदाहरण में पहले बच्चे ने तीन पेस्ट्रियों को एक 'पूर्ण' के रूप में देखा, इसलिए उसे इसका $\frac{1}{4}$ मिला। दूसरे बच्चे के लिए पूर्ण का मतलब तीन अलग-अलग पेस्ट्रियां थीं और उसका हिस्सा इन तीन पेस्ट्रियों का $\frac{1}{4}$ था। तीसरे बच्चे ने भी तीन पेस्ट्रियों को एक 'पूर्ण' के रूप में देखा, जिसे 12 बराबर भागों में बांटा गया था और उसे इनमें से तीन भाग मिले थे।

इस उदाहरण से पता चलता है कि बच्चों के लिए यह समझना जरूरी है कि भिन्न को नाम देते वक्त 'पूर्ण' का उल्लेख अनिवार्य है। एक बार वे इस बात को समझ गए, तो उन्हें एक ही मात्रा को अलग-अलग भिन्न संख्याओं के रूप में व्यक्त करने में कोई दिक्कत नहीं होगी।

शुरुआत में, कोई औपचारिक नाम बताए बगैर, हम उनसे कह सकते हैं कि वे थोड़ी जासूसी करके यह तो पता लगाएं कि किसी भिन्न के कितने और नाम हो सकते हैं। मगर यह जासूसी थोड़े व्यवस्थित ढंग से करनी होगी। शुरुआत निम्नलिखित गतिविधि से की जा सकती है।

उदाहरण 3

कागज की एक पट्टी लेकर उसे आठ हिस्सों में मोड़ दीजिए। अब बच्चों से कहिए कि आधी पट्टी को

अलग-अलग नाम दें। उन्हें ये पता लगाने दीजिए कि पट्टी का $\frac{1}{2}$ वही है जो पट्टी का $\frac{2}{4}$ है या $\frac{4}{8}$ है। इसी प्रकार से एक वर्ग को आठ हिस्सों में मोड़कर पता लगा सकते हैं कि वर्ग का $\frac{1}{2}$ ही वर्ग का $\frac{2}{4}$ और वर्ग का $\frac{4}{8}$ भी होता है। अब इस समय आप आधे, दो-चौथाई, चार-आठवें की तुल्यता (समानता) समझा सकते हैं और लिख सकते हैं कि $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ जिसका मतलब है कि एक-आधा और दो-चौथाई बराबर हैं। अब आप बच्चों से कहें कि वे अपने निष्कर्ष को निम्नानुसार लिखकर बयान करें-

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

बच्चे इस सूची का अध्ययन करके अंश व हर का पैटर्न देख सकते हैं। खासकर वे यह देख सकते हैं कि प्रत्येक भिन्न में हर, अंश से दुगुना है। आप बच्चों से इसी क्रम का पालन करने वाली अन्य भिन्न संख्याएं बताने को कह सकते हैं। शुरुआत करने के लिए आप अपनी ओर से $\frac{6}{12}$ का सुझाव दे सकते हैं।

इस प्रकार एक बार बच्चों को दिए गए भिन्न के तुल्य भिन्न खोजने का काफी अनुभव हो जाए और वे हर बार तुल्य भिन्नों के बीच के पैटर्न को देख समझ लें तो वे खुद ब खुद तुल्य भिन्न लिखने का नियम यानी अंश व हर दोनों को एक ही संख्या से गुणा करना या दोनों को उनके गुणनखंड से भाग देना खोज लेंगे।

E5) एक-एक गतिविधि ऐसी सुझाइए जिसकी मदद से बच्चों को एक तिहाई, एक-चौथाई और दो-तिहाई के तुल्य भिन्न पता करने में मदद मिले।

गतिविधि जिसमें शिक्षिका ने अपनी कक्षा में उपलब्ध विभिन्न प्रत्यक्ष चीजों का प्रयोग तुल्य भिन्न की संकल्पना समझाने में किया है।

उदाहरण 4

शिक्षिका : मेरे पास 32 कंचे हैं। मैं मोहन और सोहन को 16-16 कंचे दे रही हूं।

मोहन, इन 16 कंचों को 4 बराबर भागों में बांटो।

मोहन : (इस तरह बांटकर शिक्षिका को दिखाता है)

00 00 00 00

00 00 00 00

ये चार बराबर हिस्से हो गए।

शिक्षिका : हर हिस्से में कितने कंचे हैं?

मोहन : चार कंचे हैं।

शिक्षिका : एक हिस्सा कंचों का कितना भाग है?

मोहन : यह 16 कंचों का $\frac{1}{4}$ है।

शिक्षिका अब एक अन्य छात्रा रानी को बुलाती है।

शिक्षिका : मोहन, चार में से दो हिस्से रानी को दे दो।

मोहन : जी, मैडम। $\left\{ \begin{matrix} 00 & 00 \\ 00 & 00 \end{matrix} \right\}$ यानी दो हिस्से रानी को दे देता है।

शिक्षिका : मोहन, यह बताओ कि रानी को तुमने कंचों का कितना भाग दिया है?

मोहन : मैंने उसे सोलह कंचों का $\frac{2}{4}$ दिया है।

शिक्षिका : शाबाश! सोहन, अब तुम अपने 16 कंचों के 8 बराबर हिस्से करो।

सोहन : (00 00 00 00 00 00 00 00 के रूप में बांटता है) हो गया।

तब शिक्षिका ने उससे इस तरह के सवाल पूछे कि हर हिस्से में कितने कंचे हैं? एक हिस्सा कंचों का कितना भाग है? आदि। इसके बाद उन्होंने रीता नाम की एक छात्रा को बुलाकर सोहन से कहा कि वह उसे 8 हिस्सों में से चार हिस्से दे दे। सोहन ने (00 00 00 00) 4 हिस्से रीता को दे दिए।

शिक्षिका : सोहन, यह बताओ कि तुमने रीता को कंचों का कितना भाग दिया है?

सोहन : मैंने उसे 16 कंचों का $\frac{4}{8}$ दिया है।

शिक्षिका : ठीक है। यानी रानी को 16 कंचों का $\frac{2}{4}$ मिला और रीता को 16 कंचों का $\frac{4}{8}$ मिला। तुम दोनों के पास कितने-कितने कंचे हैं (रानी और रीता से सवाल)?

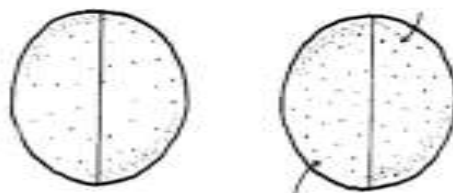
रानी : मैडम, आठ कंचे।

रीता : मुझे भी आठ कंचे मिले।

शिक्षिका : क्या इसका मतलब यह हुआ कि 16 कंचों का $\frac{2}{4}$ और $\frac{4}{8}$ बराबर होता है?

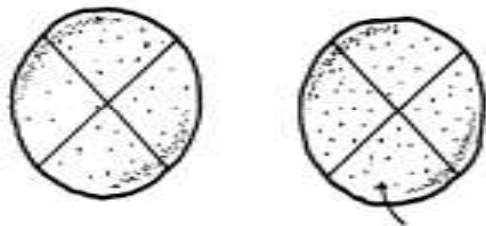
पूरी कक्षा : जी हां, मैडम।

शिक्षिका : बिल्कुल सही। अन्तर सिर्फ इतना है कि उनके समूह अलग-अलग ढंग से बनाए गए हैं। इसी तरह से वे यह भी समझाती हैं कि यदि दो रोटियों को चार बराबर टुकड़ों में बांटा जाए (चित्र- 6)।



चित्र 6

तो 2 रोटी का $\frac{2}{4}$ एक पूरी रोटी होगा। और यदि 2 रोटियों को 8 भागों में बांटा जाए (चित्र 7)।



चित्र 7

तो 2 रोटी का $\frac{4}{8}$ भी एक पूरी रोटी होगा। यानी 2 रोटी का $\frac{2}{4}$ वही है जो 2 रोटी का $\frac{4}{8}$ ।

ऐसी गतिविधियों से बच्चे यह समझ पाएंगे कि पूर्ण कुछ भी हो, मगर दो-चौथाई निसंदेह रूप से चार-आठवें या छः-बारहवें के बराबर होता है।

E6) क्या आप सहमत हैं कि ऐसी गतिविधियों से बच्चों को भिन्न की तुल्यता की संकल्पना समझने में मदद मिलती है? यदि हां, तो क्यों? यदि नहीं, तो आपका क्या सुझाव है?

जब हम बच्चों को एक भिन्न देकर उसके तुल्य भिन्न लिखने को कहते हैं तो बच्चे आम तौर पर गुणा का तरीका अपनाते हैं। यानी वे अंश और हर दोनों को एक ही संख्या से गुणा करने का तरीका अपनाते हैं। अंश और हर के गुणनखंड से भाग देने का तरीका उन्हें कठिन लगता है। शायद इसी वजह से किसी भिन्न को उसके लघुतम पद में लिखने में बच्चों को दिक्कत होती है। मेरी भतीजी अंकिता के साथ जो चौथी में पढ़ती है के साथ एक दिन हम भिन्न पर चर्चा कर रहे थे।

उदाहरण 5

मैं : क्या तुम $\frac{8}{12}$ के तुल्य कोई भिन्न बता सकती हो?

अंकिता : हां।

अंकिता : शिक्षिका ने क्या बताया था? हां, याद आया। 2 से गुणा करके $\frac{16}{24}$ मिलेगा, 3 से गुणा करके $\frac{24}{36}$ मिलेगा, 4 से गुणा करके $\frac{32}{48}$ मिलेगा। इस तरह से $\frac{8}{12}$ के बराबर कई भिन्न लिख सकती हूँ।

मैं : बढ़िया। सही बताया तुमने। अब यह बताओ कि क्या $\frac{2}{3}$ भी $\frac{8}{12}$ के बराबर है?

अंकिता : अभी करके देखती हूँ।

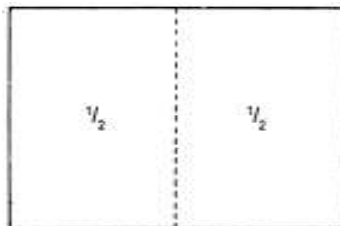
मैं उसे ध्यान से देख रही थी। मैंने देखा कि यहां भी वह गुणा के तरीके का उपयोग कर रही थी। उसने $\frac{2}{3}$ (अंश व हर दोनों) को 2 से गुणा किया। इससे बात नहीं बनी। फिर उसने 3 से गुणा किया पर बात नहीं बनी। तब उसने 4 से गुणा किया और चीख पड़ी।

अंकिता : हां। $\frac{2}{3}$ भी $\frac{8}{12}$ के बराबर है। हम 2 को 4 से और 3 को भी 4 से गुणा करें तो $\frac{8}{12}$ आता है।

मैं : मगर इसका एक ज्यादा आसान तरीका है। तुम्हें पता है कि 8 और 12 का एक सामान्य गुणनखंड 4 है। तो बस, 8 को 4 से भाग दे दो और 12 को 4 से भाग दे दो और $\frac{2}{3}$ मिल जाएगा।

अंकिता : हां लगता तो आसान है मगर क्या ऐसे कर सकते हैं?

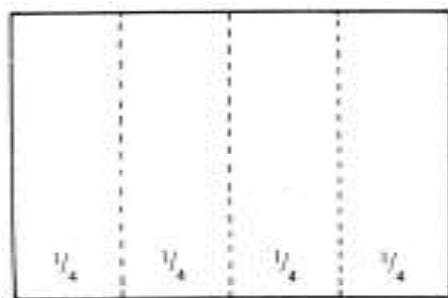
मैं : क्यों नहीं? चलो, तुमको एक चीज़ दिखाती हूँ। यह कागज़ देखो। इसे मोड़ दिया। ये दो बराबर हिस्से हो गए (चित्र 8)। बताओ, प्रत्येक हिस्सा कितना भाग हैं?



चित्र 8

अंकिता : $\frac{1}{2}$ ।

मैं : एक बार और मोड़ दें तो चार बराबर हिस्से हो जाएंगे। (चित्र 9 देखें) अब कागज़ कितने हिस्सों में बंट गया?



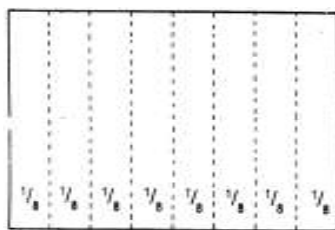
चित्र 9

अंकिता : चार हिस्सों में। हर हिस्सा $\frac{1}{4}$ है।

मैं : अब मैं कागज़ को खोल देती हूँ। क्या तुम यह मानती हो कि $\frac{1}{2}$ कागज़ 2 एक-चौथाई हिस्सों के बराबर है?

अंकिता : हां।

मैं : तो मैं $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ लिख सकती हूँ। अब यदि मैं इस कागज़ को एक बार और मोड़कर खोल दूँ तो यह ऐसा दिखेगा (चित्र 10)।



चित्र 10

अब बताओ कि कागज़ के $\frac{1}{2}$ हिस्से में कितने आठवें भाग हैं।

अंकिता : एक, दो चार। चार भाग हैं।

मैं : यानी $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ।

अंकिता : हां।

मैं : क्या अब हम कह सकते हैं कि $\frac{4}{8}$ के तुल्य $\frac{2}{4}$ और $\frac{1}{2}$ है? क्या हम ऐसा लिख सकते हैं—

$$\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}?$$

अंकिता : हां, ऐसा लिख सकते हैं।

मैं : यानी $\frac{4}{8}$ के तुल्य भिन्न हम निम्न अंश और हर के साथ लिख सकते हैं। हम लिखते

$$\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ है तो क्या तुम्हें कोई पैटर्न दिखाई पड़ता है?}$$

अंकिता : जी हां। बाएं से दाएं चलते हुए हम अंश और हर दोनों को दो-दो से भाग देते जा रहे हैं।

मैं : क्या इसका मतलब यह हुआ कि हमें दो से भाग देते हुए एक-एक कदम ही चलना होगा।

क्या हम सीधे $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ नहीं लिख सकते?

अंकिता : क्यों नहीं? यदि हम 4 और 8 को सीधे 4 से भाग दे दें तो $\frac{1}{2}$ आ जाएगा।

मैं : क्या अब तुम मानती हो कि तुल्य भिन्न लिखने के लिए हम अंश व हर दो को उनके सामान्य गुणनखंड से भाग दे सकते हैं?

अंकिता : जी।

मुझे खुशी थी कि अंकिता का संदेह दूर हो चुका था और उसे मेरे साथ गतिविधि करने में मजा भी आया था। इसके बाद मैंने उसे $\frac{5}{10} = \frac{\square}{2}$, $\frac{14}{56} = \frac{2}{\square}$ आदि में खाली डब्बों में अंक भरने के अभ्यास करवाए। अंकिता ने इन्हें सही-सही कर दिया। मैंने मौके का फायदा उठाया उसे यह भी समझा दिया कि जब हम $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ लिखते हैं तो $\frac{1}{2}$ लघुतम रूप है क्योंकि अब अंश और हर का कोई सामान्य गुणनखंड नहीं है। इसलिए अब हम इन्हें और विभाजित नहीं कर सकते।

E 7) आप किस तरीके से पता करेंगे कि अंश और हर को उनके गुणनखंड से विभाजित करके तुल्य भिन्न पता करने की विधि आपके छात्र समझ गए हैं या नहीं?

आपने देखा होगा कि बच्चे कभी-कभी पूछते हैं कि तुल्य भिन्न पता करने के लिए हम जिस तरह से अंश व हर में गुणा या भाग करते हैं, उसी तरह अंश और हर दोनों में एक ही संख्या जोड़ या घटाकर तुल्य भिन्न क्यों पता नहीं कर सकते? ऐसे सवालों के जवाब बच्चों को खुद ही खोजने को कहना चाहिए। उनसे कहिए कि वे एक भिन्न संख्या लिखें। मसलन $\frac{1}{2}$ और उसमें अंश और हर दोनों में 2 जोड़कर देखें कि क्या $\frac{1}{2} = \frac{1+2}{2+2} = \frac{3}{4}$ होता है?

E 8) बच्चों को यह समझाने के लिए आप क्या करेंगे कि $\frac{5}{6} = \frac{5-2}{6-2} = \frac{3}{4}$ के बराबर नहीं है?

बच्चों को यह समझाने में भी दिक्कत आती है कि $\frac{4}{4}, \frac{5}{5}$ आदि 1 के तुल्य हैं। उन्हें यह कहना मुश्किल लगता है कि $\frac{4}{4} = 1$ या $\frac{5}{5} = 1$ । देखें उदाहरण 6।

उदाहरण 6

शिक्षिका : यह एक सेब है। मैं इसके चार बराबर हिस्से करती हूँ। अगर इन चारों हिस्सों को एक साथ रखें तो पूरा सेब बनता है। रेणु यहां आकर एक टुकड़ा ले लो।

रेणु : जी मैडम।

शिक्षिका : सेब का कितना हिस्सा तुम्हें मिला?

रेणु : एक हिस्सा।

शिक्षिका : कितने हिस्सों में से?

रेणु : चार में से एक हिस्सा।

शिक्षिका : इसे बोर्ड पर लिख दो।

रेणु : इसी तरह से शिक्षिका ने रेणु को दूसरा व तीसरा हिस्सा दिया और बोर्ड पर $\frac{2}{4}$ व $\frac{3}{4}$ लिखवाया। आखिर में चौथा हिस्सा भी रेणु को दे दिया।

शिक्षिका : सेब के कितने हिस्से तुम्हारे पास हैं?

रेणु : चार हिस्से।

- शिक्षिका : कितने हिस्सों में से चार हिस्से तुम्हारे पास हैं?
- रेणु : 4 में से 4।
- शिक्षिका : क्या इसके लिए हम भिन्न $\frac{4}{4}$ लिख सकते हैं?
- रेणु : जी मैडम।
- शिक्षिका : ठीक। तो बच्चों यह बताओ कि रेणु के पास कितना सेब है?
- छात्र : पूरा/एक/समूचा।
- शिक्षिका : तो क्या हम $\frac{4}{4} = 1$ लिख सकते हैं?
- छात्र : जी मैडम।
- शिक्षिका : इसी प्रकार से $\frac{5}{5} = 1, \frac{6}{6} = 1$ वगैरह होते हैं। ऊपर की गई गतिविधि को चार बराबर हिस्सों में काटकर या फिर चार कंचों आदि के साथ भी करायी जा सकती है।

एक बार बच्चे यह समझ गए कि $\frac{4}{4} = 1, \frac{5}{5} = 1$ आदि होते हैं, तो उन्हें यह समझने में मदद मिलेगी कि 5 चौथाई हिस्से $\left(\frac{5}{4}\right)$ वह भिन्न है जो 1 से ज्यादा है। यदि एक कागज को चार बराबर भागों में बांटा गया है तो इस प्रकार के 5 चौथाई हिस्से इस कागज को पूरा ढक लेंगे और अतिरिक्त कागज की भी जरूरत पड़ेगी। इसलिए 5 चौथाई एक से बड़ा भिन्न है।

E 9) कक्षा चार के बच्चों को $\frac{5}{4}$ समझाने हेतु कोई अभ्यास सुझाइए।

आप इस बात से सहमत होंगे कि बच्चों को भिन्नों का घटाना सिखाने से पहले, यह जरूरी है कि वे भिन्नों का क्रमण अच्छी तरह से समझ लें। अब हम इसी विषय पर चर्चा करेंगे।

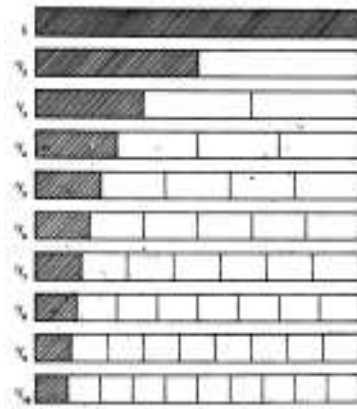
भिन्नों का क्रमण

दो भिन्नों का क्रमण, यानी यह तय कर पाने की समझ कि क्या वे बराबर हैं या एक छोटा एक बड़ा है और यदि हां तो कौन सा छोटा व कौन सा बड़ा है, के लिए जरूरी होता है कि बच्चे पहले इकाई भिन्नों के क्रमण की समझ हासिल करें। इसके लिए नीचे दी गई कुछ आसान गतिविधियाँ।

उदाहरण 7

एक ही माप की कागज की दस पट्टियाँ लें। पहले पट्टी को वैसी ही रहने दें। दूसरी पट्टी को दो बराबर भागों में बांट दें, तीसरी पट्टी को तीन बराबर भागों में। इसी प्रकार से दसवीं पट्टी को दस बराबर भागों में बांट दें। अब इन्हें एक गत्ते पर एक-दूसरे के नीचे चिपका दें और हर पट्टी के एक-एक भाग को रंग दें। (चित्र 11)

बराबर माप की पट्टियों के अलग-अलग रंगे हिस्सों को देखकर बच्चे समझ पाएंगे कि $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{10}$ ।



चित्र 11

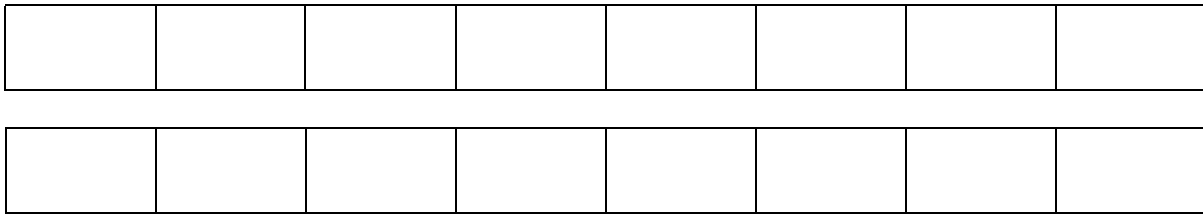
$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{10}$ समझाने की इस गतिविधि को संख्या रेखा (number line) की मदद से भी किया जा सकता है।

E10) संख्या रेखा की मदद से कक्षा में यह समझाइए कि $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{10}$ होता है। आपके विद्यार्थियों की क्या प्रतिक्रिया रही? क्या संख्या रेखा पर भिन्न संख्याओं के निरूपण को समझना उन्हें ज्यादा मुश्किल लगता है या यह उनके लिए एक उपयोगी उपकरण का काम करती है?

भिन्नों का क्रमण समझने के लिए यह समझना निहायत जरूरी है कि 'पूर्ण' का माप क्या है और उसे कितने भागों में बांटा गया है। यदि बच्चे को इस चीज़ की समझ है, तो उसके लिए इकाई भिन्नों, समान अंश वाली भिन्नों और समान हर वाली भिन्नों का क्रमण करना आसान हो जाता है। परन्तु कई बार बच्चे माप और भागों के बीच के संबंध की गलत व्याख्या कर बैठते हैं। इस संदर्भ में मुझे अपनी 8 वर्षीय भतीजी अंकिता के साथ हुआ अनुभव याद आता है।

एक बार मैं उससे भिन्नों के क्रमण के बारे में बातचीत कर रही थी। इकाई भिन्नों के क्रमण को लेकर अंकिता में काफी आत्मविश्वास नज़र आ रहा था उसने आसानी से यह कह दिया कि $\frac{1}{8}, \frac{1}{5}$ से छोटा है। इसने यह भी बताया कि वह ऐसा क्यों समझती है। उसने बताया कि यदि वह एक केक को 7 और बच्चों के साथ बांटेगी तो उसे कम हिस्सा मिलेगा जबकि यदि उसी केक को वह 4 और बच्चों के साथ बांटेगी तो उसे ज्यादा हिस्सा मिलेगा। उसने $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{11}, \frac{1}{20}$ आदि भिन्नों को भी आसानी से क्रमबद्ध कर दिया। मगर जब उसने यह कहा कि $\frac{7}{8}, \frac{4}{8}$ से कम है तो मैं आश्चर्य चकित रह गई। उसका कहना था कि 7 हिस्सों का मतलब हुआ ज्यादा

हिस्से और जब हिस्सों की संख्या ज्यादा होगी तो हरेक हिस्सा माप में छोटा होगा। मैंने कहा कि चलो देखते हैं। मैंने कागज की दो बराबर पट्टियां ली और दोनों को 8 बराबर हिस्सों में बांटा (चित्र 12)। अंकिता ने इस काम में मेरी सहायता की।



चित्र 12

उदाहरण 8

मैं : अंकिता, अब पहली पट्टी लेकर उसके 8 भागों में से 4 में लाल रंग भर दो।

अंकिता : जी। लीजिए, हो गया, (चित्र 13)



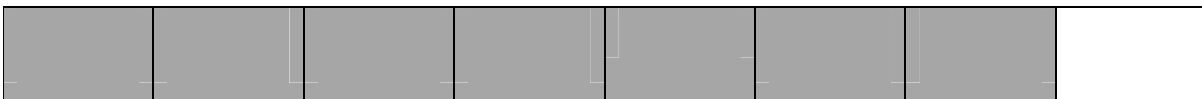
चित्र 13

मैं : लाल भाग कितना हिस्सा है?

अंकिता : $\frac{4}{8}$

मैं : ठीक। अब दूसरी पट्टी लो और उसके 8 भागों में से 7 को भूरा कर दो।

अंकिता : लीजिए, हो गया (चित्र 14)।



चित्र 14

मैं : भूरा भाग कितना हिस्सा है?

अंकिता : $\frac{7}{8}$

मैं : कौन सा भाग बड़ा है — लाल रंग वाला भाग या भूरा रंग वाला भाग।

अंकिता : भूरा रंग वाला भाग ज्यादा है।

और इससे पहले कि मैं उससे कोई सवाल करूँ, उसने खुद ही ठीक जवाब दे दिया। अब उसे इस काम में मजा आने लगा था और वह चाहती थी कि मैं इस तरह की और गतिविधियां उसके साथ करूँ। अतः मैंने कागज की

मदद से उसे $\frac{4}{4}$ और $\frac{5}{4}$ दिखाया। इस बीच मैंने उससे कुछ सवाल पूछे, जैसे कि $\frac{4}{4}$ और $\frac{5}{4}$ में से कौन सा

बड़ा है? और क्यों है? उसने बढ़िया जवाब दिए।

अब उसे यह स्पष्ट था कि $\frac{4}{13}, \frac{4}{8}$ से कम है। परन्तु उसके लिए यह तय कर पाना अभी भी मुश्किल था कि $\frac{7}{8}$ कम है या $\frac{12}{13}$ । मैंने सोचा कि जवाब उसी से प्राप्त करना चाहिए। मैं निम्नलिखित ढंग से आगे बढ़ी।

मैं : अंकिता क्या अब तुम्हें $\frac{7}{8}$ और $\frac{11}{8}$ या $\frac{3}{7}$ और $\frac{4}{7}$ जैसी संख्याओं की तुलना करने में कोई दिक्कत है?

अंकिता : जी नहीं आण्टी, यह तो बहुत सरल है। इसमें कोई दिक्कत नहीं है।

मैं : तुम्हें ऐसा क्यों लगता है कि $\frac{7}{8}$ और $\frac{11}{8}$ की तुलना करना आसान है और $\frac{7}{8}$ व $\frac{12}{13}$ की तुलना करना ज्यादा कठिन है?

अंकिता : यह इसलिए आसान है क्योंकि दोनों में हर समान है और हमें सिर्फ अंश की चिंता करनी होती है।

मैं : ठीक। मगर क्या तुम $\frac{7}{8}$ और $\frac{12}{13}$ को बदलकर ऐसी संख्या नहीं बना सकती जिनमें हर समान हों। (थोड़ा सोचकर)

अंकिता : हां, कर सकती हूँ।

उसने कुछ परिकलन किया और उत्तर निकाल लिया।

अंकिता : $\frac{7}{8}$ और $\frac{12}{13}$ के संख्याएं $\frac{91}{104}$ और $\frac{96}{104}$ हैं।

मैं : ठीक क्या अब तुम बता सकती हो कि भिन्न $\frac{7}{8}$ बड़ा है या $\frac{12}{13}$?

अंकिता : (मुस्कराते हुए) हां, $\frac{12}{13}$ बड़ा है।

अंकिता खुश और रोमांचित थी। उसे ऐसा अभ्यास करके मजा आया था और उसमें आत्मविश्वास नजर आ रहा था। यह देखकर मुझे भी खुशी हुई।

बच्चों को प्रत्यक्ष व चित्रात्मक साधनों से बच्चे भिन्नों के क्रमण की संकल्पना समझने के बाद उन्हें एक सामान्य नियम बता सकते हैं। इसे आम तौर पर सामान्य हर का नियम कहते हैं। भिन्नों का क्रम पता लगाने में इसका प्रयोग होता है। इस नियम के अनुसार दो या दो से ज्यादा भिन्नों की तुलना करने के लिए उन्हें ऐसी तुल्य संख्याओं में बदला जाता है जिनमें सबके हर बराबर हों। तब भिन्न का अंश सबसे बड़ा हो, वह सबसे बड़ी भिन्न होगी।

E11) सामान्य हर नियम का प्रयोग किए बगैर आप बच्चों को कैसे समझाएंगे कि $\frac{12}{13}$ और $\frac{7}{8}$ में से कौनसी संख्या बड़ी है?

अब हम विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न में बदलने की। एक ऐसी समस्या के बारे में चर्चा करेंगे जो प्रायः बच्चों के सामने आती है।

विषम भिन्न

प्राथमरी स्कूल के शिक्षक अक्सर यह बताते हैं कि विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न में बदलते वक्त बच्चे आम तौर पर मिश्रित भिन्न में पूर्णांक वाले स्थान पर भागफल की बजाय शेषफल लिख देते हैं।

जिन भिन्न संख्याओं में अंश, हर से बड़ा होता है उन्हें विषम भिन्न कहते हैं।

पिछले रविवार को एक मित्र के घर पर मुझे यही देखने को मिला। उसकी 9 वर्षीय बेटी मिनी अपना गृहकार्य कर रही थी। मैंने उसकी नोटबुक पर यों ही निगाह डाली। वह विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न में बदलने

के सवाल कर रही थी। उसने 7 में 4 का भाग इस तरह किया $4 \overline{) 7}^{-1}$ और $\frac{7}{4}$ को $3\frac{1}{4}$ लिख दिया। मैं चुपचाप

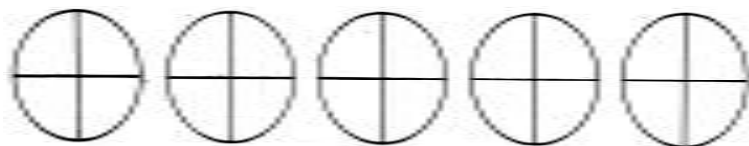
देखती रही। उसने फिर $\frac{11}{6} = 6 \overline{) 11}^{-1}$ $\frac{-6}{5} = 5\frac{1}{6}$ लिखा।

मिश्रित भिन्न पूर्णांक संख्या और उचित भिन्न का योग होते हैं।

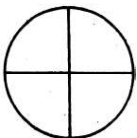
उससे बात करते हुए समझ में आया कि विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न में बदलने के बारे में उसके शिक्षक ने उसे जो कुछ बताया होगा, उसे उसका धुंधला सा अहसास था। वह एक मशीन की तरह ये सवाल कर रही थी और वह जो कुछ कर रही थी, उसका कोई ठोस चित्र उसके दिमाग में नहीं था। मैंने बात को स्पष्ट करने के लिए निम्नलिखित तरीका अपनाया।

उदाहरण 9

मैंने पांच वृत्ताकार कागज के टुकड़े लिए। हर एक टुकड़े को चार बराबर भागों में बांटा गया था (चित्र 15 देखें)।



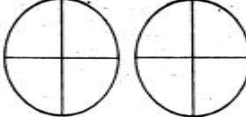
चित्र-15

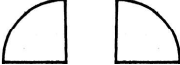
मैं :  का $\frac{1}{4}$ कितना होगा?

मिनी : 4 भागों में से एक भाग।

मैं : क्या यह  होगा?

मिनी : हाँ।

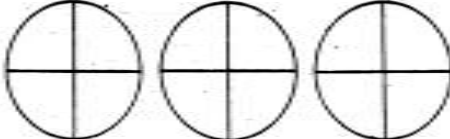
मैं : यह बताओ कि  का $\frac{1}{4}$ कितना होगा?

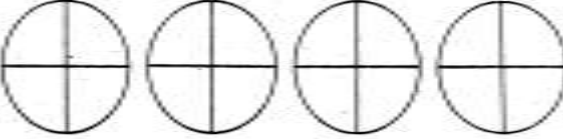
मिनी :  होगा।

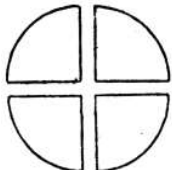
मैं : यह कितना हिस्सा दर्शाता है?

मिनी : यह $\frac{2}{4}$ है।

मैं : बढ़िया। यानी यह दो एक-चौथाई है। क्या इसी तरह से हम कह सकते हैं कि

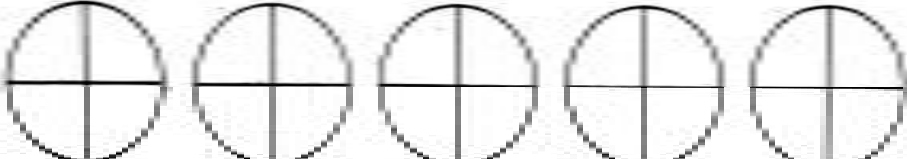
 का $\frac{1}{4}$ यानी तीन एक चौथाई

 = $\frac{3}{4}$ है और 

का $\frac{1}{4}$ यानी चार एक चौथाई  = 1 है।

मिनी : हाँ।

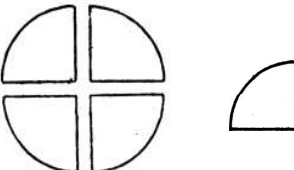
मैं : अब बताओ कि



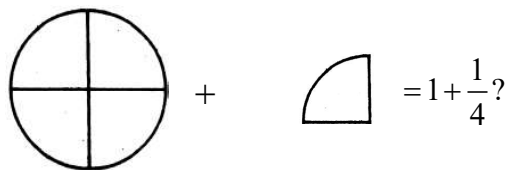
का $\frac{1}{4}$ यानी पांच एक-चौथाई क्या होगा?

मिनी थोड़ी भ्रमित दिख रही थी। मैंने थोड़ी मदद करने का सोचा।

मैं : मिनी क्या $\frac{5}{4}$ और 5 का $\frac{1}{4}$ एक ही बात नहीं है?



मिनी : हां..... हां.....। अब मैं बता सकती हूँ कि 5 का $\frac{1}{4}$ क्या होगा। 5 का $\frac{1}{4}$ होगा।
 मैं : क्या इसे हम ऐसे नहीं कह सकते?



मिनी : हां आण्टी। दोनों बराबर हैं।

मैं : ठीक। इसका मतलब हुआ कि $\frac{5}{4}$ बराबर हैं पूरे के और $\frac{1}{4}$ के और इसे हम $1\frac{1}{4}$ लिखते हैं। जब हम 5 को 4 से भाग देते हैं तो भागफल से हमें मिश्रित भिन्न का पूर्णांक वाला हिस्सा मिलता है और शेषफल/भाजक से हमें उसका उचित भिन्न वाला हिस्सा मिलता है। यानी $\frac{5}{4} = \text{भागफल} \frac{\text{शेष}}{\text{भाजक}} = 1\frac{1}{4}$ होता है।

अब बताओ $\frac{7}{4}$ के बारे में क्या कहती हो?

मिनी : अब यह बात मुझे समझ आ गई है। आपने जैसा बताया उसके हिसाब से $\frac{7}{4}$ हुआ एक पूरा और $\frac{3}{4}$ और इसलिए यह $1\frac{3}{4}$ होगा।

मिनी ने अपनी गलती समझ ली थी। इसी तरह के कुछ और सवाल हल करने के बाद उसका आत्मविश्वास बढ़ गया था।

E 12) मिनी की समस्या क्या थी?

E 13) क्या आप कोई और तरीका सुझा सकते हैं जिसका उपयोग करके मिनी की गलती को सुधारा जा सकता था?

सारांश

इस पाठ में हमने निम्नलिखित बिन्दु उभारने की कोशिश की—

1. आमतौर पर यह देखा गया है कि बच्चों को भिन्नों के प्रतीकन व उन्हें संकेत रूप में दर्शाने में दिक्कत होती है। भिन्नों के संकेत रूप में दर्शाने के नियम समझना उनके लिए मुश्किल होता है। भिन्नों के प्रतीकन के तरीके को लेकर बच्चे के दिमाग में कोई उलझन हो, तो उसे दूर करने के बाद ही इस विषय में आगे बढ़ना चाहिए। जब बच्चे 'आधा', 'तिहाई', 'चौथाई', जैसे भिन्नों के नाम व पूर्ण से उनके संबंध में भली भाँति परिचित हो जाएं तभी उन्हें भिन्नों के संकेतों से परिचित कराया जाना चाहिए। उन्हें यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि जब हम 2 के नीचे लाइन खींचकर लाइन के नीचे 3 लिखते हैं। यानी $\frac{2}{3}$

- लिखते हैं तो भिन्न $\frac{2}{3}$ का हर हमें बताता है कि पूर्ण के तीन बराबर भाग किए गए हैं और अंश बताता है कि हम इनमें से 2 भागों को ले रहे हैं। उन्हें भिन्नों के नाम को संकेत में बदलने का काफी अभ्यास कराना चाहिए। इसके लिए शिक्षक कक्षा में कई गतिविधियां करवा सकते हैं।
- भिन्नों को अंश-हर के रूप में लिखकर एक ही भिन्न को अलग-अलग ढंग से दर्शा सकते हैं। बच्चों से कहा जा सकता है कि वे किसी एक भिन्न को दर्शाने के लिए अधिक से अधिक संख्याएं खोजें। यह कर लेने के बाद उन्हें तुल्य भिन्न की संकल्पना से परिचित कराया जा सकता है। कागज़ मोड़ने तथा इसी तरह की अन्य गतिविधियां करने व विभिन्न किस्म के पूर्ण से परिचित होने के बाद उन्हें यह समझने में कठिनाई नहीं होती है कि क्यों इतनी संख्याएं परस्पर तुल्य हैं। जब बच्चे एक भिन्न के तुल्य अन्य भिन्न खोजने का काफी अभ्यास कर चुकें तब उन्हें हर उदाहरण में पैटर्न खोजने दें और तुल्य भिन्न लिखने का नियम खुद ब खुद पता करने दें।
 - जब बच्चे तुल्य भिन्न लिखने के नियम से परिचित हो जाएं तो उन्हें अंश व हर के गुणनखंड से भाग देकर तुल्य भिन्न पता करने को काफी अभ्यास करवाएं क्योंकि इसमें बच्चों को प्रायः दिक्कत होती है।
 - पूर्ण को कुल कितने हिस्सों में बांटा गया है तथा प्रत्येक हिस्से के आकार के परस्पर संबंध को समझने में बच्चे कई मर्तबा गलती कर बैठते हैं। इसका असर भिन्नों का क्रमण करने पर भी पड़ता है। कागज को रंगने की गतिविधि के जरिये उन्हें यह समझने में मदद मिल सकती है कि कौन सी संख्या बड़ी है। शिक्षक इकाई भिन्न से शुरू करके समान अंश या समान हर वाले भिन्न पर जा सकते हैं। इस तरह से बच्चे खुद ब खुद अन्य भिन्नों जैसे $\frac{5}{6}$ व $\frac{7}{8}$ तथा $\frac{3}{4}$ व $\frac{6}{7}$ आदि की तुलना का नियम यानी सामान्य हर नियम खोज पाएंगे।
 - 8-10 वर्ष के बच्चों को विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न में बदलने में कठिनाई होती है। इससे निपटने के लिए प्रत्यक्ष चीजों के साथ गतिविधि के जरिये दिखाया जा सकता है कि $\frac{7}{4}$ (यानी सात एक-चौथाई या 7 का $\frac{1}{4}$) का वास्तव में अर्थ क्या है? इससे उन्हें एक प्रत्यक्ष चित्र हासिल होगा और वे संकल्पना को समझ पाएंगे।

पाठ — 10

दशमलव

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - भिन्नों के लिए दस का पैमाना
 - दशमलवों का गणित
- सारांश

परिचय

पिछले पाठ में हमने उन समस्याओं की बात की थी जो बच्चों को भिन्न संख्याओं पर संक्रियाएं करते समय होती है। इस पाठ में हम उन समस्याओं पर विचार करेंगे जो बच्चों को भिन्न संख्याओं को दशमलव के रूप में लिखने में होती हैं दशमलव संख्याएं वे संख्याएं हैं जिन्हें दशमलव बिन्दु के साथ लिखा जाता है।

दशमलव की अवधारणा एक महत्वपूर्ण अवधारणा है। इसे समझने में बच्चों को अक्सर दिक्कत होती है। इसलिए दशमलव संख्याओं से निपटने में वे अक्सर गलतियां करते हैं। उदाहरण के लिए 15 साल की एक बच्ची से पूछा गया कि .05, .5, .5808 तथा .056 में से सबसे छोटी संख्या कौन सी है तो वह उस नियम को याद करने की कोशिश करने लगी जो उसने प्राइमरी स्कूल में सीखा था। थोड़ा सोचकर उसने .5808 को सबसे छोटी संख्या बताया जब उससे कारण पूछा गया, तो उसने बताया कि उसके शिक्षक ने उसे समझाया था कि दशमलव बिन्दु के बाद जितने ज्यादा अंक होते हैं, संख्या उतनी ही छोटी होती है।

इसी प्रकार जब 12 से 15 वर्ष के बच्चों को $40 \div 0.8$ करने को कहा जाता है तो उनके उत्तर 5 या .5 हो सकते हैं।

इस पाठ में हम बच्चों को दशमलव में इतनी दिक्कत क्यों होती है? तथा हम इन दिक्कतों को हल करने के लिए कुछ उपयुक्त तरीके भी विकसित करने की कोशिश करेंगे।

शब्दावली के अनुसार से दशमलव संख्याओं को दशमलव या दशमलव भिन्न भी कहा जाता है। हम इस पाठ में दशमलव संख्या का ही उपयोग करेंगे।

पहले हम कुछ ऐसी समस्याओं पर चर्चा करेंगे जो इसलिए पैदा होती हैं क्योंकि बच्चे दशमलव के संकेतों को समझ नहीं पाते हैं।

उद्देश्य

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप

- दशमलव की अवधारणा सिखाने के लिए ऐसी तरह-तरह की चिजों को इस्तेमाल कर पायेंगे, जिनसे बच्चे परिचित हों।
- उन तरीकों को जानेंगे, जिनसे आप दशमलव संख्याओं के स्थानीय मान को समझने में बच्चों की मदद कर सकें।
- ऐसे तरीके तैयार कर पायेंगे जिनसे बच्चों को दशमलव संख्याओं की चार संक्रियाओं के नियम विकसित करने में मदद मिलेगी।
- दशमलव संख्याओं की गणनाओं में बच्चों की दक्षता बढ़ाने के लिए कई गतिविधियां तैयार कर पाएंगे।

दशमलव संख्या क्या है?

जब हम दशमलव सीखते/सिखाते हैं, तो हममें से कितने लोग यह सवाल पूछते हैं कि “क्यों 1.5, 1.50, 1.500 समान हैं” मगर 1.05 से अलग क्यों है” यदि आप किसी ऐसे बच्चे से यह सवाल पूछें जिसने दशमलव सीख लिया हो, तो वह आपको कुछ अनिश्चित और चकराया हुआ नजर आएगा।

इस भाग में हम ऐसे कुछ तरीकों पर बात करेंगे जिनसे बच्चों को दशमलव सीखने में मदद मिलेगी, तथा ऐसी गलतफहमियों से बचा जा सकेगा।

उदाहरण 1 : कक्षा 4 की शिक्षक से पूछा कि वे बच्चों को दशमलव कैसी पढ़ाती हैं। उन्होंने मुझे बताया कि सबसे पहले तो वे 10 से भाग का नियम बताकर उन्हें दशमलव पद्धति से परिचित कराती हैं। जैसे—

$$\frac{7}{10} = .7$$

$$\frac{27}{10} = 2.7$$

$$\frac{125}{10} = 12.5$$

इस तरह नियम यह है कि 10 से भाग देना, और संख्या के आखिरी अंक के पहले दशमलव होना एक ही बात है इसके बाद वे इसी नियम को हर 100 व हर 1000 वाली भिन्न संख्याओं पर भी लागू कर देती हैं।

वे $\frac{27}{100} = .27$, $\frac{205}{100} = 2.05$, $\frac{127}{1000} = .127$ आदि लिखकर बताती हैं। साथ ही वह यह भी समझाती हैं कि $.7 = .70$ इसके बाद वे ढेर सारे अभ्यास देती हैं जिनमें दशमलव संख्या को भिन्न में और भिन्न संख्याओं को

दशमलव में बदलने का अभ्यास भी होता है जिससे कि वे उनकी समझ को परख सकें। कुछ छात्रों को $\frac{3}{100}$ को दशमलव के रूप में लिखने को कहा गया। कई बच्चे चक्कर में पड़ गए क्योंकि उन्हें यह समझ नहीं आ रहा था कि दूसरा अंक कहां से लाएं? तब शिक्षक ने उन्हें समझाया कि वे संख्या से शुरू करके बाईं ओर चलते

जाएं। जहां कोई अंक न हो वहां शून्य लिख दें। उन्होंने बच्चों को यह भी समझाया कि 0.3 व .3 में क्या अन्तर है। इसके बाद बच्चों को कई अभ्यास करने को दिए जैसे कि $\frac{19}{1000}$ को दशमलव रूप में लिखना। हम अभी आगे बताएंगे कि शिक्षक ने हमें और क्या-क्या बताया।

E1) मान लीजिए कोई बच्ची 0.06 को 'शून्य दशमलव छः पढ़ती है। आप उसे कैसे समझाएंगे कि उसने गलती की है और वास्तव में इसे शून्य दशमलव शून्य छः पढ़ना जरूरी है?

अभ्यास से पता चलता है कि दशमलव पद्धति को पूरी तरह समझने के लिए जरूरी है स्थानीय मान की अवधारणा का ज्ञान हो।

आइए देखते हैं कि शिक्षक दशमलव संख्याओं के स्थानीय मान रूप की बात किस तरह समझाती हैं। यह ध्यान दें कि उन्होंने भिन्न संख्याओं को दशमलव संख्या में और दशमलव संख्याओं को भिन्न में बदलने के काफी सारे सवाल करवाने के बाद ही यह काम शुरू किया है। सबसे पहले उन्होंने बच्चों को कुछ पूर्णांक संख्याओं जैसे कि 324, 271 और 450 को 100, 10 और 1 के गुणज के रूप में लिखने को कहा। यह तो उन्होंने आसानी से कर लिया और लिखा

$$324 = 3 \times 100 + 2 \times 10 + 4 \times 1$$

$$271 = 2 \times 100 + 7 \times 10 + 1 \times 1$$

$$450 = 4 \times 100 + 5 \times 10 + 0 \times 1$$

फिर उन्होंने साथ रखे अंकों के स्थान का संबंध इस तरह बताया, सैकड़ों के स्थान और दहाई के स्थान को देखो। तुम्हें 100 से 10 कैसे मिलेगा? 100 को 10 को भाग देकर। अब दहाई के स्थान और 1 के स्थान को लो। तुम्हें 10 से 1 कैसे मिलेगा? 10 को 1 से भाग देकर? इस तरह हरेक स्थान की तरफ ध्यान दिला कर उन्होंने कहा "इस तरह जैसे-जैसे हम दायीं तरफ बढ़ते हैं" हम 10 से भाग देते हैं। इसी तरह हर बार 10 से भाग देकर हम इकाई के बाद वाले स्थानों की ओर बढ़ना जारी रखते हैं। तब इकाई के दाहिनी ओर दसवां भाग होगा, फिर सौवां भाग आदि। और यह दिखाने के लिए कि इस स्थान पर 'इकाई' समाप्त होती है, हम इकाई संख्याओं

के आगे बिन्दु लगा देते हैं। जैसे- 2.5 का मतलब है $2 \times 1 + 5 \times \frac{1}{10}$

.7 का मतलब है- $\frac{7}{10}$

11.47 का मतलब है $1 \times 10 + 1 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 7 \times \frac{1}{100}$

इस तरह 2.5 का मतलब है $2 \times 1 + 5 \times \frac{1}{10} = 2 + \frac{5}{10} = 2.5$ और इसी तरह $16.7 = 16 + .7$ इस तरह दशमलव बिन्दु पूर्णांक को भिन्न संख्या को भिन्न संख्या से अलग करती है, इसके बाद उन्होंने बताया कि बच्चों को यह सब सिखाने के बाद वे उनसे दशमलव संख्याओं को स्थानीय मान के रूप में लिखवाती हैं। जैसे-

$$51.6 = 51 \frac{6}{10} = 5 \times 10 + 1 \times 1 + 6 \times \frac{1}{10}$$

इसी तरह से वे स्थानीय मान के रूप में प्रस्तुत संख्या को दशमलव के रूप में लिखवाने का अभ्यास भी करवाती है। जैसे,

$$2 \times 100 + 0 \times 10 + 7 \times 1 + 8 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} = 207.83$$

स्थानीय मान रूप सिखाने के बाद वे बच्चों से ढेर सारे अभ्यास करवाती हैं। इनमें इबारती सवाल भी होते हैं। जैसे, 'कोई मेज 92.3 सेमी लम्बी है। बताओ यह मेज कितने मीटर लम्बी है? मैंने उनसे पूछा कि वे इस तरह के सवाल पहले क्यों नहीं देती? उनका जवाब था कि पहले इस तरह के सवाल दिए जाएं तो बच्चे गलतियां करते हैं। जैसे, जब उनसे 8 पैसे को रूपए के रूप में लिखने को कहा जाता है तो वे 0.08 लिखने की बजाय .8 लिख देते हैं। इसलिए ऐसे सवाल तभी देना अच्छा रहता है जब वे स्थानीय मान के रूप में संख्या प्रस्तुत करना सीख चुके हों। तो इस तरह से वे बच्चों को दशमलव संख्याओं से परिचित कराती हैं।

E2) उदाहरण 1 में वर्णित तरीके के सकारात्मक व नकारात्मक पहलू क्या हैं?

E3) अपने अनुभव के आधार पर बताइए कि क्या बच्चों को दशमलव भिन्न का तर्क (यानी $\frac{1}{10}$ की घात का क्रम) समझाने से उन्हें मदद मिलेगी या वे चकरा जाएंगे। अपने उत्तर का कारण भी दें।

उदाहरण 2 : शिक्षक 5 पेंसिलें और 5 रबर लेकर आई। हर पेंसिल की लम्बाई रबर से करीब दस गुनी है (चित्र 1) वे अलग-अलग लम्बाई का धागा भी लाई।



चित्र 1

उन्होंने छात्रों को पांच टोलियों में बांट दिया। हर टोली को उन्होंने एक पेंसिल, एक रबर और धागे का एक-एक टुकड़ा दे दिया। अब उन्होंने छात्रों को कहा कि पेंसिल व रबर की मदद से धागे की लम्बाई नापें। शुरुआत में थोड़ी मदद भी की। आइए देखते हैं कि वे टोली 1 से किस ढंग से बातचीत करती हैं।

शिक्षक : पेंसिल की मदद से इस धागे की लम्बाई नापो। यह धागा पेंसिल से कितने गुना लम्बा है?

(छात्रों ने नापकर दिखाया और कहा 3 गुना। मगर धागे का कुछ हिस्सा बचा हुआ था।)

शिक्षक : बचे हुए हिस्से का क्या करें?

टोली : यह एक पेंसिल से कम है।

शिक्षक : क्या उस हिस्से को रबर से नाप सकते हो?

टोली : (करके दिखाते हुए) यह रबर से छः गुना है।

शिक्षक : यानी धागा पेंसिल से तीन गुना और रबर से छः गुना है। चलो इसे तालिका में लिख देते हैं (तालिका 1 की पहली पंक्ति देखें)।

तालिका 1

पेंसिल	रबर
3	6
2	5
1	3
4	7
5	1

शिक्षक : अब इस तालिका को देखो। (टोली 1 ने धागे की लम्बाई पेंसिल की तीन गुना और रबर की छः गुना नापी है।) अब यह बताओ कि पेंसिल रबर से कितने गुना लम्बी है। नापकर देखो।

एक छात्र : दस गुना।

शिक्षक : कैसे निकाला?

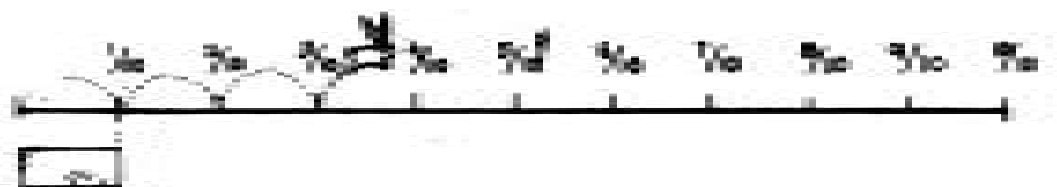
(छात्र ने पेंसिल को रबर से नापकर दिखाया।)

शिक्षक : तो रबर पेंसिल का कितना हिस्सा है? (कोई जवाब नहीं।) यदि दस रबर एक पेंसिल के बराबर हैं, तो एक रबर कितनी पेंसिल के बराबर होगा?

एक अन्य छात्र: $\frac{1}{10}$

शिक्षक : हां, $\frac{1}{10}$ होगा।

अब शिक्षक ने एक रेखा बनाई जिसकी लम्बाई पेंसिल के बराबर थी और एक छोटा आयत बनाया। चित्र 2 में देखिए।



चित्र 2

उन्होंने रबर को चित्र पर रखते हुए $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{10}{10}$ आदि निशान लगा दिए।

शिक्षक : तो रबर पेंसिल का $\frac{1}{10}$ है। तब रबर के छः गुने

का मतलब है छः गुना $\frac{1}{10}$ जो $6 \times \frac{1}{10}$ है। यानी

पेंसिल का $\frac{6}{10}$ यानि धागे की लम्बाई पेंसिल की

लम्बाई की 3 गुना और पेंसिल की लम्बाई के $\frac{1}{10}$ की 6 गुना है।

तालिका 2

पेंसिल (इकाई)	रबर (दसवां)
भाग)	

3

6

अब शिक्षक ने पेंसिल के नीचे इकाई लिखा और रबर के नीचे दसवां भाग (या $\frac{1}{10}$) लिखा।

उन्होंने तालिका के बाजू में ही तालिका 2 बना दी ताकि दोनों साथ-साथ दिखें। अब उन्होंने इकाई के स्तंभ में 3 और दसवें भाग के स्तम्भ में 6 लिख दिया।

शिक्षक : अब बताओ पेंसिल की लम्बाई के पदों में धागे की लम्बाई क्या लिखेंगे।

एक छात्र : $3\frac{6}{10}$

शिक्षक : शाबाश! और अन्य टोलियों के धागों की लम्बाइयां क्या हैं?

कुछ छात्र : $2\frac{5}{10}, 1\frac{3}{10}, 4\frac{7}{10}$ और $5\frac{1}{10}$.

शिक्षक : सहूलियत के लिए हर बार $\frac{1}{10}$ लिखने की बजाय एक बिन्दु लगा सकते हैं। जैसे $3\frac{6}{10}$ को 3.6 लिख सकते हैं। इससे पता चलता है कि 3 इकाइयां हैं और 6 दसवें भाग हैं।

$$\text{यानी } 3.6 = 3 \times 1 + 6 \times \frac{1}{10} = 3\frac{6}{10}$$

तो, हमने $3\frac{6}{10}$ को एक बिन्दु की मदद से 3.6 लिखा। क्या अब हर टोली बता सकती है कि इस तरह बिन्दु के साथ उनके धागे की लम्बाई कितनी है?

टोलियां : 2.5, 1.3, 4.7, 5.1

शिक्षक : बहुत बढ़िया। इन संख्याओं को मैं तालिका में लिख देती हूं (उन्होंने तालिका 2 की बाजू में तालिका 3 भी बना दी।)।

इस बिन्दु को दशमलव बिन्दु कहते हैं। इस तरह से बिन्दु का इस्तेमाल करके संख्या लिखने के तरीके को दशमलव प्रणाली कहते हैं।

अब तालिका 3 को देखो। यदि मैं इकाई के स्तम्भ में 1 और दसवें भाग के स्तम्भ में 4 लिख दूं तो दशमलव पद्धति में वह संख्या क्या होगी?

एक छात्र : यह संख्या एक दशमलव चार होगी।

शिक्षक : भिन्न के रूप में इस संख्या को कैसे लिखेंगे?

वही छात्र : $1\frac{4}{10}$ लिखेंगे।

शिक्षक : इसे इकाई और दसवें भाग के रूप में तोड़कर कैसे लिखेंगे?

कई छात्र : $1 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10}$ लिखेंगे।

तालिका 3

पेंसिल (इकाई)	रबर (दसवां)
भाग)	3
2	5
1	3
4	7
5	1

शिक्षक : मान लो कि मैं इकाई के स्तम्भ में 0 और दसवें भाग के स्तम्भ में 5 लिख दूँ तो दशमलव पद्धति में यह संख्या क्या होगी?

एक अन्य छात्र : (कुछ सोचकर) क्या यह शून्य दशमलव पांच होगी?

शिक्षक : हाँ। अब बताओ इस संख्या को भिन्न में कैसे लिखोगे?

छात्र : $0\frac{5}{10}$

शिक्षक : यानी क्या?

वही छात्र : मतलब $\frac{5}{10}$

शिक्षक : कैसे?

वही छात्र : $0.5 = 0 \times 1 + 5 \times \frac{1}{10}$

इस तरह से बातचीत करते हुए शिक्षक ने इस बात को परखा कि छात्रों ने अलग-अलग संख्याओं की दशमलव पद्धति समझी या नहीं।

तो इस तरह से शिक्षक ने बच्चों का परिचय दशमलव संख्या से कराया। इसके बाद उन्होंने दशमलव संख्याओं का सैकड़े, दहाई, इकाई, दसवें, सौवें के गुणकों के रूप में लिखना सिखाया।

- E4) ऐसे दो अभ्यास या गतिविधियाँ सुझाइए जिन्हें 20 बच्चों के समूह के साथ किया जा सके तथा जिनसे दशमलव पद्धति समझने में मदद मिले।
- E5) उदाहरण 1 व 2 में हमने दशमलव सिखाने के दो अलग-अलग तरीकों की चर्चा की। आपके मुताबिक बच्चों को दशमलव की बुनियादी समझ हासिल करने के लिहाज से कौन सा तरीका ज्यादा कारगर रहेगा?
- E6) यदि कोई बच्चा भिन्न संख्या को दशमलव संख्या में तथा दशमलव संख्या को भिन्न में बदल ले तो यह माना जा सकता है कि उसे दशमलव पद्धति समझ आ गई है। यह कथन सही है या गलत? कारण सहित बताइए।

अब तक आप यह तो समझ ही गए होंगे कि दशमलव बिन्दु की अवधारणा तथा संख्या की दशमलव पद्धति को समझने में बच्चों को समय लगता है।

दशमलव संख्याओं की विभिन्न गणितीय संक्रियाएं करने के लिए यह अवधारणात्मक समझ निहायत जरूरी है। अगले भाग में हम इस से संबंधित कुछ समस्याओं को देखेंगे।

दशमलव संख्याओं पर संक्रियाएं

क्या आपने कभी किसी बच्चे को दशमलव का जोड़-गुणा सिखाने की कोशिश की है? क्या आपकी कोशिश यही थी कि वह विभिन्न नियमों को तेज गति से और सही-सही लागू करने लगे? बदकिस्मती से हम अक्सर

यही करते हैं। हम प्रायः इन क्रियाओं में निहित अवधारणाओं की समझ पर जोर नहीं देते। मगर, जरूरत इस बात की है कि समझ बनाने पर ध्यान दिया जाए। हमें यह भी आदत बनानी चाहिए कि उनसे ऐसे सवाल पूछते चलें जिनसे उन्हें और हमें उनकी समझ को परखने में मदद मिले। उन्हें ऐसे अभ्यास दें जिनसे उनकी बुनियादी समझ की जांच हो सके। जब भी वे किसी क्रिया को करने के लिए कोई एल्गोरिद्म लागू करें तो हमें उनसे पूछना चाहिए कि उन्हें कैसे मालूम कि उनका उत्तर सही है।

इस खण्ड में हम इस बात पर विचार करेंगे कि दशमलव की चार बुनियादी संक्रियाओं के नियम समझने व उन्हें लागू करने में बच्चों की मदद कैसे की जाए।

आइए, सबसे पहले जोड़ व बाकी से संबंधित कुछ दिक्कतों पर गौर करें।

जोड़/बाकी

प्राइमरी स्कूल के कुछ शिक्षकों से बातचीत करते हुए हमें पता चला कि दशमलव के जोड़-बाकी में बच्चे खास तौर से तब दिक्कत महसूस करते हैं जब इन संख्याओं के दशमलव वाले हिस्से में अंकों की संख्या अलग-अलग होती है। जैसे $0.123 + 1.1 + 1.101$ जैसा जोड़। उनमें से एक शिक्षक ने हमें विस्तार से बताया कि वे कक्षा 5 के बच्चों को दशमलव संख्याओं का जोड़ कैसे सिखाती हैं। आइए उनका तरीका देखें।

उदाहरण 3 : शिक्षक कक्षा में 2.7 और 1.8 तथा 18.75 और 20.65 जैसे जोड़ पहले ही सिखा चुकी थीं। अब अगला कदम यह था कि उन्हें $18.7 + 20.65$ जैसे जोड़ सिखाना था। वे इस तरह आगे बढ़ीं।

उन्होंने बोर्ड पर $18.7 + 20.65$ लिखा। संख्याओं की ओर इशारा करते हुए उन्होंने बच्चों से कहा, “पहली संख्या में दशमलव बिन्दु के बाद एक अंक है और दूसरी संख्या में दो अंक हैं। इसलिए हम $18.7 = 18.70$ लिख देंगे। अब इन्हें एक के नीचे एक लिखकर जोड़ देंगे। फिर उन्होंने बोर्ड पर लिखा –

$$\begin{array}{r} 18.70 \\ +20.65 \\ \hline 39.35 \end{array}$$

और बता दिया कि 18.7 और 20.65 का जोड़ 39.35 है। उन्होंने इसी तरह का एक और सवाल कराने के बाद बच्चों को निम्नलिखित सवाल दिया –

$$0.05 + 0.101 + 0.3$$

उन्होंने देखा कि कई बच्चों ने इसे यों लिख लिया था :

$$\begin{array}{r} 0.005 \quad 0.05 \\ 0.101 \quad \text{या} \quad 0.101 \\ +0.300 \quad +0.003 \end{array}$$

हर बार उन्हें कई-कई मर्तबा बच्चों की गलतियां सुधारनी पड़ीं।

E7) आपके ख्याल में बच्चे गलतियां क्यों कर रहे थे? आप उनकी मदद कैसे करेंगे।

E8) अपने आसपास के बच्चों से पूछिए कि रोजमर्रा की ऐसी स्थितियां सोचें जहां उन्हें दशमलव संख्याओं की जरूरत पड़ेगी। उनके जवाब नोट कीजिए।

यदि आप उदाहरण 3 में बच्चों द्वारा की गई गलतियों पर ध्यान देंगे तो आपको पता चलेगा कि उन्हें वास्तव में यह समझ नहीं आया है कि क्यों 18.7 और 18.70 या 18.700 एक ही बात है जबकि 18.07 अलग है। दूसरे शब्दों में वे यह नहीं समझ पाए हैं कि दशमलव बिन्दु के बाद संख्या के अन्त में जब चाहे तब शून्य क्यों लगाया या हटाया जा सकता है? अतः जोड़ का नियम सिखाते वक्त ये बातें भी उन्हें साफ तौर पर बतानी होंगी। बच्चे को यह अहसास कराना होगा कि उस नियम के पीछे क्या समझ है। कुछ लोगों ने देखा है कि यदि छात्रों को दशमलव सिखाने के लिए पिछले भाग में वर्णित गतिविधियों की मदद ली जाए, तो वे दशमलव बिन्दु के बाद के हर अंक का स्थानीय मान समझने लगते हैं। इसके बाद वे गणितीय क्रियाएं ज्यादा बेहतर ढंग से कर पाते हैं।

E9) “100 भागों में बंटे वर्ग” का उपयोग करके आप विद्यार्थी को जोड़ की क्षमता हासिल करने में कैसे मदद कर सकते हैं?

आइए अब दशमलव के घटाने से संबंधित समस्याओं की बात करें। शिक्षकों का अनुभव है कि जब संख्याएं एक लाइन में लिखी हों, तो ज्यादा गलतियां होती हैं। इसी प्रकार से जब संख्याओं में दशमलव के बाद अंकों की संख्या अलग-अलग हो, तो भी बच्चे ज्यादा गलती करते हैं।

$\begin{array}{r} 1.53 \\ -3.4 \\ \hline 11.9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3.4 \\ -1.53 \\ \hline .81 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3.4 \\ -1.53 \\ \hline 1.93 \end{array}$
(क)	(ख)	(ग)

E10) ऊपर दिए गये उत्तर किस तर्क के आधार पर आए होंगे? बच्चों की समझ को दुरुस्त करने के लिए किस तरह का अभ्यास व कार्य जरूरी होगा?

E11) ‘क्या 100 हिस्सों में बंटा वर्ग’ बच्चों को दशमलव के घटाने के सवाल बेहतर ढंग से करने में मदद कर सकता है? अपने उत्तर का कारण भी दीजिए।

गलतियां बच्चों के सीखने का स्वाभाविक व अनिवार्य अंग हैं। गलतियों से पता चलता है कि वे किस तरह सोचते व सीखते हैं। दशमलव के जोड़ने व घटाने से संबंधित विभिन्न गलतियों के विश्लेषण के बाद आप शायद सहमत होंगे कि इन समस्याओं का संबंध घटाने की क्रिया से न होकर दशमलव पद्धति में बिन्दु के दोनों ओर अंकों के क्रम की समझ से है। हमारे ख्याल से इसका सर्वोत्तम समाधान तो यह होगा कि दशमलव में स्थानीय मान की बेहतर समझ विकसित की जाए।

गुणा/भाग

कुछ माता-पिता के साथ चर्चा के दौरान यह बात सामने आई कि बच्चों के लिए गुणा करना उतना मुश्किल नहीं होता जितना कि भाग करने के दौरान। थोड़ी सी समस्या यह आती है कि बच्चे गुणा करने के तथाकथित नियमों को लेकर भ्रमित हो जाते हैं। दो दशमलव संख्याओं का गुणा करने का जो नियम पाठ्यपुस्तकों में दिया गया है, वह है।

1. गुणा ठीक उसी तरह करें जैसे दो पूर्णांक संख्याओं का करते हैं।

2. गुणनफल में दशमलव बिन्दु इस तरह लगाएं कि गुणनफल में दशमलव के बाद अंकों की संख्या तथा गुणित व गुणक (मूल संख्याएं) में दशमलव के बाद अंकों की कुल संख्या बराबर रहे।

इस नियम को समझने से पहले बच्चों को यह पता होना चाहिए कि गुणित व गुणक क्या होते हैं। इतनी कठिन भाषा के इस्तेमाल के बावजूद बच्चे अक्सर गुणा करने के या अन्य नियम सीख ही लेते हैं। परन्तु अधिकतर बच्चे इन्हें जल्दी ही भूल भी जाते हैं और फिर वे इन्हें गलत ढंग से लागू करने लगते हैं। इस संदर्भ में एक दिलचस्प वाक्या है।

उदाहरण 4 : एक बार मैंने अपने भतीजे नन्दू से 2.14 में 10 का गुणा करने को कहा वह कक्षा 6 में पढ़ता है। थोड़ी देर सोचकर उसने कहा “क्या 2.14 होगा?” फिर तुरन्त अपनी गलती सुधारते हुए बोला “नहीं, शायद दशमलव बिन्दु को दाईं ओर खिसकाना पड़ेगा, तो 21.4 आएगा।” बात यह है कि उसे नियम को लेकर आत्मविश्वास नहीं है। वह इसे बगैर समझे याद करने की कोशिश करता है। मुझे लगा कि कुछ उपाय करने की जरूरत है।

उस शाम मैंने एक योजना बनायी कि उसे कौन सी अवधारणाएं व प्रक्रियाएं समझाऊंगी। मैंने उन चीजों व गतिविधियों की भी योजना बनाई जो उन अवधारणाओं से पहले करना जरूरी है। अगले दिन हमने इस बारे में बातचीत शुरू की। पहले मैंने यह पता किया कि उसे दशमलव पद्धति समझ में आती है या नहीं। उसे दशमलव पद्धति में स्थानीय मान को लेकर कोई दिक्कत न थी। इसके बाद मैं आगे बढ़ी।

मैं : मान लो कि हम 0.1×5 करना चाहते हैं। पहले तो यह बताओ कि 0.1 का तुम क्या मतलब समझते हो?

भतीजा : मतलब? भिन्न के रूप में यह $\frac{1}{10}$ होगा।

मैं : ठीक। तो 0.1×5 क्या होगा?

$$\text{उसने लिखा } \frac{1}{10} \times 5 = \frac{5}{10}$$

मैं : इसे दशमलव रूप में कैसे लिखोगे?

भतीजा : 0.5

मैं : बढ़िया। तो $0.1 \times 5 = \frac{5}{10} = 0.5$ हुआ। अब बताओ 0.01×5 और 0.001×5 का उत्तर क्या होगा?

भतीजा : $0.01 \times 5 = 0.05$

मैं : कैसे निकाला?

$$\text{नन्दू ने लिखा } 0.01 \times 5 = \frac{1}{100} \times 5 = \frac{5}{100} = 0.05 \quad \text{और} \quad 0.001 \times 5 = \frac{1}{1000} \times 5 = \frac{5}{1000} = 0.005$$

मैं : हां, बहुत बढ़िया। अब देखते हैं कि क्या तुम इसी तरह से 0.6×0.3 निकाल सकते हो?

नन्दू ने लिखा $0.6 \times 0.3 = \frac{6}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{18}{100} = 0.18$ और बोला शून्य दशमलव एक आठ।

मैं : यानी $0.6 \times 0.3 = 0.18$ हुआ। एक और उदाहरण देखें 0.2×0.14 कितना होगा?

नन्दू ने लिखा $0.2 \times 0.14 = \frac{2}{10} \times \frac{14}{100} = \frac{28}{1000}$ फिर थोड़ा सोचकर लिखा 0.028 होगा।

मैं : चलो पहले जरा देख लें कि अभी तक हम लोगों ने क्या-क्या कर लिया है।

(मैंने सारे सवाल एक-एक करके लिख दिए)

$$0.1 \times 5 = 0.5$$

$$0.01 \times 5 = 0.05$$

$$0.001 \times 5 = 0.005$$

$$0.6 \times 0.3 = 0.18$$

$$0.2 \times 0.14 = 0.028$$

मैं : इन सब पर जरा ध्यान दो। क्या 'बराबर' चिन्ह के दोनों तरफ की संख्याओं में दशमलव बिन्दु के दाईं ओर के अंकों में कोई संबंध दिखता है? पहले उदाहरण को देखो। बराबर चिन्ह के बाईं ओर दशमलव बिन्दु के दाईं ओर कुल मिलाकर कितने अंक हैं?

भतीजा : एक ही है।

मैं : और दाईं बाजू?

भतीजा : एक ही है।

मैं : अगले सवाल में?

भतीजा : दाहिनी ओर भी दो अंक है और बाईं ओर भी दो हैं। तीसरे सवाल में दाहिनी ओर भी तीन हैं, बाईं ओर भी तीन हैं। और चौथे उदाहरण में (थोड़ा सोचता है) 0.6 में एक अंक है और 0.3 में भी एक है। तो कुल 2 हुए और दाहिनी तरफ भी 2 है। और अगले सवाल में 0.2 में एक ओर 0.14 में दो हैं। तो कुल तीन हुए और दाईं ओर भी तीन हैं।

मैं : तो क्या इन सबमें कोई नियम दिखता है?

भतीजा : बराबर चिन्ह के दाईं और बाईं ओर अंकों की कुल संख्या बराबर है।

मैं : और कुछ?

(वह चुप रहा)

मैं : देखो। 0.6×0.3 को देखो। क्या 6, 3 और 18 के बीच कोई संबंध है?

भतीजा : हां, 6 गुणा 3 बराबर 18 होता है।

मैं : बाकी सवालों की संख्याओं में भी कोई संबंध है क्या?

भतीजा : हां, समझ गया। 14 गुणा $2 = 28$ होगा और $1 \times 5 = 5$ होगा।

मैं : बढ़िया, तो तुमने गुणा का नियम खुद ही खोज लिया। अब तुम्ही यह नियम बताओ।

भतीजा : मान लीजिए कि हम 0.7 और 0.6 का गुणा करना चाहते हैं। तो पहले हम 7 और 6 पूर्णांकों का गुणा कर देंगे और 42 आ जाएगा। अब दोनों गुणकों में दशमलव के दाहिनी ओर के अंक गिन लेंगे। इस सवाल में 2 अंक हैं। इसलिए गुणनफल 0.42 होगा।

मैं : ठीक। अब यदि गुणा करते वक्त तुम्हें नियम को लेकर शंका हो, तो तुम संख्याओं को भिन्न के रूप में लिखकर जांच कर सकते हो:

$$0.7 \times 0.6 = \frac{7}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{42}{100} = 0.42 \text{ समझ गए?}$$

भतीजा : जी।

मैं : अब उसी सवाल को लेते हैं जो मैंने तुमसे कल पूछा था। 2.14×10 कितना होगा? तुम्हें कल समझ नहीं आ रहा था कि यह 0.214 होगा या 21.4 होगा? अब इसकी जांच करके देख लो।

उसने लिखा $2.14 \times 10 = \frac{214}{100} \times 10 = 21.4$

भतीजा : 21.4 होगा।

मैं : नियम लागू करके देखो।

भतीजा : $214 \times 10 = 2140$ । बाईं हाथ की संख्याओं में दशमलव के बाद दो अंक हैं। इसलिए उत्तर 21.40 होगा।

मैं : ठीक। अब तुम चक्कर में नहीं पड़ोगे, क्यों?

ऊपर दिए गए उदाहरण से पता चलता है कि किस तरह विद्यार्थी गुणा का नियम खुद विकसित कर सकते हैं। ऐसा होने पर उन्हें एक ऐसी प्रक्रिया को याद रखने पर मजबूर नहीं होना पड़ेगा, जिसे वे समझते नहीं। उदाहरण से यह भी पता चलता है कि नियम को लेकर किसी भी भ्रम की स्थिति में विद्यार्थी भिन्न के तरीके से अपने उत्तर की जांच भी कर सकते हैं। इससे उनमें आत्मविश्वास बढ़ता है।

E12) “100 हिस्सों में बंटे वर्ग” की गतिविधि हम दशमलव संख्याओं की गुणा सिखाने के लिए कैसे इस्तेमाल कर सकते हैं?

आइए अब दशमलव संख्याओं के भाग से जुड़ी समस्याओं पर विचार करें। हमने बार-बार इस बात पर जोर दिया है कि समस्या की मूल वजह यह है कि भाग की प्रक्रिया में निहित बुनियादी अवधारणाओं की समझ का अभाव है। कुछ शिक्षकों ने बताया कि बच्चे ज्यादा गलती तभी करते हैं जब भाजक दशमलव संख्या हो। आइए यह देखने की कोशिश करते हैं कि भिन्न वाला तरीका

इसमें कितना मददगार हो सकता है।

उदाहरण 5 : कक्षा 5 की एक शिक्षक अपने विद्यार्थियों को यह समझाने की कोशिश कर रही थी कि दशमलव संख्या से भाग कैसे करते हैं। बतौर उदाहरण उन्होंने बोर्ड पर $24 \div 0.4$ लिखा।

शिक्षक : गुणा की तरह यहां भी हम भिन्न वाले तरीके से आगे बढ़ेंगे। यानी हम दशमलव संख्याओं को भिन्न के रूप में लिख लेंगे और फिर भिन्न संख्याओं के भाग का नियम लगाएंगे। तो बताओ कि 0.4 को भिन्न के रूप में कैसे लिखें?

एक बच्चा: 0.4 बराबर $\frac{4}{10}$ होता है।

शिक्षक : अब क्या तुम $24 \div \frac{4}{10}$ निकाल सकते हो?

एक छात्र : $24 \div \frac{4}{10}$ यानी $24 \times \frac{10}{4} = 60$

शिक्षक ने पूर्णांक संख्या को दशमलव संख्या से भाग देने के एक-दो उदाहरण और करवाए। इसके बाद उन्होंने यह समझाया कि एक दशमलव संख्या को दूसरी संख्या से भाग कैसे देते हैं। उदाहरण के लिए $0.36 \div 0.2$ लिया। उन्होंने बच्चों से कहा कि इन्हें भिन्न संख्या के रूप में लिख दें। इसमें बच्चों को कोई दिक्कत नहीं हुई

$$\frac{36}{100} \div \frac{2}{10}$$

परन्तु इस चरण के बाद बहुत ही थोड़े बच्चे सही-सही भाग कर पाए।

कुछ बच्चों ने $\frac{100}{36} \div \frac{10}{2}$ कर दिया।

जो बच्चे एक भिन्न संख्या में दूसरी भिन्न संख्या का भाग देना समझ चुके हैं, उन्हें यह तरीका अपनाने में कोई दिक्कत नहीं आती। मगर अन्य बच्चों के लिए यह तरीका मुश्किल होता है। उनके लिए शायद इसी तरीके के समान एक अन्य तरीका बेहतर हो। यह तरीका है,

$$\frac{0.36}{0.2} = \frac{0.36 \times 10}{0.2 \times 10} = \frac{3.6}{2}$$

चूंकि पूर्णांक संख्या से भाग देने में कोई दिक्कत नहीं है, इसलिए शायद उन्हें यह तरीका आसान लगे।

मगर इस तरह के भाग करते हुए भी बच्चे अक्सर गलती कर बैठते हैं। वे यह तय नहीं कर पाते कि दशमलव बिन्दु कहां लगाएं। उदाहरण के लिए, जब मैंने छठी कक्षा के एक बच्चे को $54.16 \div 8$ करने कहा, तो उसने कुछ इस तरह किया। (चित्र 3)

जाहिर है कि उसने नियम को समझा नहीं था और अपना ही नियम लागू कर रही थी। वह यह भूल चुकी

थी कि वह 54 से कुछ अधिक संख्या को 8 से भाग दे रही है, न कि 54.16 को 8 से। उसने यह नहीं सोचा कि उसका उत्तर 7 के लगभग आना चाहिए।

$$\begin{array}{r} 0.677 \\ 8 \overline{)54.16} \\ \underline{48} \\ 61 \\ \underline{56} \\ 56 \end{array}$$

हमारे लिए बच्चों को यह समझाना बहुत जरूरी है कि वे भाग में दशमलव बिन्दु कब लगाएँ। हम इस बात पर जोर देते हैं कि बिन्दु पूर्णांक को भिन्न वाले हिस्से से अलग करने के लिए है। इस बात को निम्न चरणों के जरिए से समझना ठीक रहेगा।

चरण 1 : पहले दिखाएं कि भाग कैसे दिया जाए, जैसे कि 4.16 को 8 से। इन अंकों को चुनने के पीछे इरादा यह है कि 4.16 का पूर्णांक 4 है जो 8 से कम है। हम 4.16 की जगह कोई और अंक भी ले सकते हैं जिसका पूर्णांक वाला हिस्सा 8 से कम हो।

$$\begin{array}{r} 0.56 \\ 8 \overline{)4.16} \\ \underline{0} \end{array}$$

चित्र 3

अब 4.16 में 8 का भाग देने के लिए पहले हमें 4 में 8 का भाग देना होगा। ऐसा करने पर हमें 1 से कम संख्या मिलेगी जो कि एक उचित भिन्न है। इस तरह भागफल में कोई पूर्णांक नहीं है (चित्र 4 देखें)। हम भागफल को दशमलव बिन्दु से शुरू करते हैं यह दिखाने के लिए कि कोई पूर्णांक नहीं है और भिन्न वाला हिस्सा शुरू होता है। फिर हम चित्र 4 के अनुसार प्रक्रिया जारी रखते हैं।

$$\begin{array}{r} 0.52 \\ 8 \overline{)4.16} \\ \underline{40} \\ 16 \\ \underline{16} \\ 0 \end{array}$$

टिप्पणी : यहां हमें बच्चों को यह समझाने में मदद करनी चाहिए कि भाग सही है या नहीं यह जानने का भी एक तरीका है — देखें कि $.52 \times 8 = 4.16$ है या नहीं।

अगली चरण में हम उन्हें $54.16 \div 8$ जैसे सवाल दे सकते हैं।

चित्र 4

चरण 2 : ध्यान दें कि पहले हमें 54 में 8 का भाग देना है (चित्र 5 देखें) तब शेषफल के तौर पर हमें 6 मिलता है। फिर हमें 6 में 8 का भाग देना है। इस चरण पर पूर्णांक वाला हिस्सा 8 से छोटा है। यह स्थिति अवस्था 1 जैसी है और हमें ठीक वैसे ही चलना होगा (देखें चित्र 5)।

$$\begin{array}{r} 6.77 \\ 8 \overline{)54.16} \\ \underline{48} \\ 61 \\ \underline{56} \\ 56 \\ \underline{56} \\ 0 \end{array}$$

इसके बाद अभ्यास के लिए काफी सारे सवाल दें और हर बार इस बात पर जोर दें कि भाग देने में जब भी वह अवस्था आये कि पूर्णांक वाला हिस्सा भाजक से कम हो। तो हम भागफल में दशमलव बिन्दु लगाते हैं।

इस तरह के भागों से, जिनमें संख्या भाजक से पूरी तरह विभाज्य हो, हम अगली अवस्था में जा सकते हैं।

चरण 3 : ऐसी संख्याओं का भाग जिनमें अंश के दायीं ओर शून्य लगाने पड़ें ताकि वह भाजक से पूरी तरह विभाज्य हो। जैसे कि 54.12 को 8 से भाग देना।

चित्र 5

आइए अब हम $3.12 \div 8$ के संश्लिष्ट भाग का उदाहरण देखते हैं।

$$\begin{array}{r} 0.39 \\ 8 \overline{)3.12} \\ \underline{24} \\ 72 \\ \underline{72} \\ 0 \end{array}$$

इस प्रक्रिया को समझने के लिए हमें यह समझना जरूरी होगा कि यहां वास्तव में क्या हो रहा है।

$$3.12 = 3 \times 1 + 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100}$$

वास्तव में संश्लिष्ट भाग की क्रिया में कई उपक्रियाएं शामिल होती हैं। इन उपक्रियाओं को समझना भाग

समझने के लिए जरूरी है। यह संभव है कि यदि विद्यार्थी इन उपक्रियाओं के तर्क को समझने के लिए तैयार न हो, तो उपक्रियाएं उसे भ्रमित भी कर सकती हैं। उदाहरण के लिए यही देखें कि $3.12 \div 8$ में क्या कुछ करना होता है।

$$3.12 = 3 \times 1 + 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100}$$

$$= \frac{30}{10} + \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100}$$

(चूँकि $3 < 8$ है इसलिए इस राशि को 8 से भाग देने से पूर्व हमें 3 से अगले स्थान पर जाकर 3 को $\frac{30}{10}$ मानना होता है।)

$$= (8 \times \frac{3}{10} + \frac{7}{10}) + \frac{2}{100}$$

$$(\text{चूँकि } \frac{31}{10} = \frac{8 \times 3 + 7}{10})$$

$$= 8 \times \frac{3}{10} + \left(\frac{70}{100} + \frac{2}{100} \right)$$

$$= 8 \times \frac{3}{10} + \left(\frac{72}{100} \right)$$

$$= 8 \times \frac{3}{10} + 8 \times \frac{9}{100}$$

$$= 8 \times 0.39$$

लेकिन हममें से अधिकतर लोग बच्चों से मात्र इतनी उम्मीद करते हैं कि कुछ चरण याद रखें और सवाल हल कर दें। इन सारी उपक्रियाओं की उपेक्षा होती है। आप इस बात से तो सहमत होंगे कि इन उपक्रियाओं को मात्र वही बच्चे समझ सकते हैं जो स्थानीय मान की धारणा से भलीभाँति परिचित हों।

E13) बच्चों में दशमलव के गुणा व भाग की समझ बेहतर बनाने के लिए कोई खेल तैयार कीजिए।

E14) बच्चों में दशमलव की विभिन्न क्रियाओं की समझ के मूल्यांकन के लिए आप क्या-क्या तरीके अपनाएंगे?

बच्चे अपने हर अनुभव से सीखते हैं। विशेष रूप से तैयार शिक्षण सामग्री की बजाय उनकी ज्यादा रुचि रोजमर्रा की चीजों और औजारों में होती हैं। उनके दैनिक जीवन में ऐसे पर्याप्त अवसर होते हैं जब वे दशमलव संख्याओं का उपयोग कर सकते हैं। दशमलव संख्याओं की अवधारणा व हुनर विकसित करने में बच्चों के इन अनुभवों का लाभ उठाया जाना चाहिए।

सारांश

इस पाठ में हमने निम्न बिन्दुओं पर चर्चा की—

1. कुछ ऐसी बुनियादी समस्याओं पर जो बच्चों को दशमलव के साथ आती हैं।

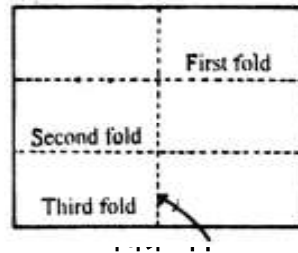
2. कुछ ऐसे तरीकों पर विचार किया जिनके जरिये बच्चे संख्याओं की दशमलव पद्धति को बेहतर समझ पाएं।
3. बच्चों को दशमलव संख्याओं की क्रियाओं से परिचित कराने के तरीकों पर गौर किया।
4. निम्नलिखित बातों पर जोर दिया
 - ठोस वस्तु/अनुभव आधारित शिक्षण
 - बच्चों को विविध गतिविधियां देना
 - उन्हें नियम रटाने की बजाय उसका तर्क समझने में मदद करना।

पूरे पाठ के दौरान हमने इस बात पर जोर दिया कि यह निहायत जरूरी है कि बच्चे ठीक से यह समझें कि संख्याओं की दशमलव पद्धति में क्यों व कैसे लिखा जाता है। एक बार यह हो जाए तो आम तौर पर बच्चे को दशमलव संख्या की संक्रियाओं में कोई दिक्कत नहीं होती।

सबक-4 के पाठ 8, 9 व 10 के अभ्यासों पर टिप्पणियां

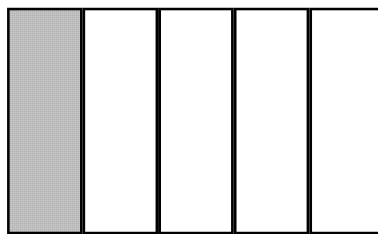
पाठ 8

- E1) i) एक बच्ची को रोटी दीजिए और उसे उसमें से आधा लेने का कहिए। जब वह कर चुके तो उससे कहिए कि जाँच कर ले कि दोनों हिस्से बराबर हैं या नहीं।
- ii) बच्चों को मिट्टी या कागज से बनी आकृतियां देकर कहा जा सकता है कि उन्हें दो बराबर भागों में बांटे। यह काम वे आकृति को काटकर, मोड़कर या चित्र बनाकर कर सकते हैं।
- E2) क) दरअसल अंकित ने बड़े वर्ग के अन्दर चार वर्गों (मोटी रेखा से दर्शाए गए वर्गों) को चार अलग-अलग पूर्ण मानकर जवाब दिया। वह यह नहीं समझ पाये कि ये चार वर्ग दरअसल उसी पूर्ण यानी बड़े वर्ग के हिस्से हैं। यह समस्या अंश का सम्बन्ध पूर्ण से न देख पाने की वजह से है।
- ख) जी हां। पूर्ण और उसके अंशों के संबंध वाली समस्या इस आयु के बच्चों की आम समस्या है।
- ग) कागज मोड़ने या कंचे, बिस्कुट, टाफियों जैसी प्रत्यक्ष चीजों के साथ गतिविधियों के जरिये उसके संकल्प स्पष्ट किए जा सकते हैं।
- E3) आप एक आयताकार कागज लेकर उसे तीन बराबर हिस्सों में मोड़ सकते हैं। मोड़ों पर कागज को दबाकर खोलिए। इस तरह $\frac{1}{3}$ दिखाया जा सकता है। इस गतिविधि को दोहराकर तथा कागज को एक बार फिर मोड़कर $\frac{1}{6}$ दिखाया जा सकता है। (चित्र 14 देखें।)



- E4) एक वृत्त को पांच बराबर भागों में बांटना बच्चों के लिए प्रायः कठिन होता है। अतः आप एक आयत खींचकर उसे पांच बराबर भागों में बांट दें। जैसा कि चित्र 15 में दिखाया गया है। अब इनमें से एक हिस्से में रंग भर दें और बच्चों से इसे भिन्न में दर्शाने को कहें। या आप बच्चे से कह सकते हैं कि वह $\frac{1}{5}$ भाग में रंग भरे। यही बात आप कागज को मोड़कर भी दिखा सकते हैं। आप यह भी कर सकते हैं कि 10 टाफियां लेकर बच्चे से उन्हें पांच दोस्तों में बराबर-बराबर बांटने को कहें। इसके बाद बच्चे से पूछें कि हरेक को कितनी-कितनी टाफियां मिलीं।

चित्र 15



E5) कक्षा में आप सभी बच्चों के साथ कागज वाला अभ्यास कर सकते हैं। उन्हें तीन वर्गों में बांट दें। प्रत्येक वर्ग से कहें कि वह कागज को दो बराबर भागों में मोड़ ले। कागज को वापिस खोलकर आधे भाग को छायादार बनाएं। बच्चों से आप यह भी कहलवाएं कि उन्हें पूरे का आधा प्राप्त हुआ है। इसके बाद आप कागज के तीन बराबर हिस्से करने वाली गतिविधि करवा सकते हैं। यह दो हिस्से करने से कहीं ज्यादा मुश्किल है। इससके बाद आप हर वर्ग को 12 कंचे या टाफियां देकर उनसे इन्हें तीन या चार बराबर भागों में बांटने को कह सकते हैं।

E6) i) एक दर्जन केले या संतरे लें, जिनमें से तीन सड़े हों। बच्चों से सड़े केले/संतरों को छांटने का कहें। अब उनसे शेष केलों/संतरों को भिन्न के रूप में बताने का कहें।

ii) 3 रोटियां लेकर 4 बच्चों से कहिए कि आपस में बराबर-बराबर बांट लें। वे दो तरीके अपना सकते हैं।

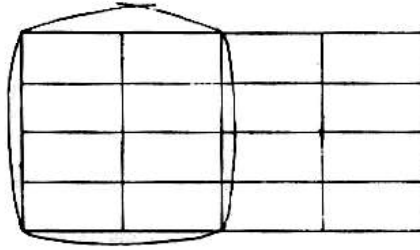
क) तीन लड़के एक-एक रोटी ले लें और फिर प्रत्येक लड़का $\frac{1}{4}$ रोटी चौथे बच्चे को दे सकता है।

ख) वे तीनों रोटियों को चार बराबर हिस्सों में बांटकर फिर इन हिस्सों को आपस में बराबर बांट सकते हैं।

रोटी बराबर-बराबर बांट लेने के बाद उनसे यह लिखने को कहा जा सकता है कि प्रत्येक को कितना हिस्सा मिला।

पाठ-9

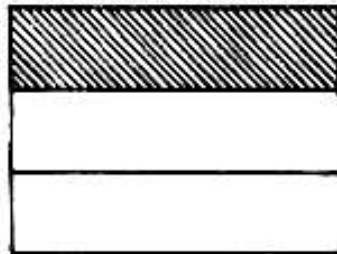
- E 1) चित्र-3 और अंकिता द्वारा दी गई व्याख्या सही है। सही पहलू पर बच्चों का ध्यान केन्द्रित करने के लिए काफी चर्चा करनी पड़ती है व समय भी लगाना पड़ता है। भिन्नों के प्रतीकन का अभ्यास कराने के लिए कई उदाहरणों का सहारा लेना होता है। यह किया जा सकता है कि पूरी कक्षा को टोलियों में बांट दिया जाए और हर टोली से कहा जाए कि वह कागज के हर हिस्से को अधिक से अधिक तरीकों से व्यक्त करें। हर नया तरीका खोजने पर उस टोली को एक अतिरिक्त अंक दिया जाए। अधिकतम अंक हासिल करने वाली टोली विजेता होगी। ऐसी गतिविधियों से उन्हें अनजाने में ही हिस्सों के नामों का अच्छा अनुभव हो जाएगा। इससे उन्हें भिन्नों की तुल्यता समझने में मदद मिलेगी।
- E 2) इस संदर्भ में मैं आपसे एक गतिविधि की चर्चा करना चाहूँगी जो मैंने एक कक्षा में देखी थी। शिक्षक ने कक्षा को 4-5 टोलियों में बांट दिया था। अब उन्होंने बोर्ड पर एक चित्र बनाया (चित्र-16 देखें)।



चित्र-16

शिक्षक ने बच्चों से कहा कि वे इसे कागज पर बना लें और गोल घरे से घिरे हिस्से के बारे में जो कुछ बता सकते हैं बताएं। बच्चों ने अपनी-अपनी टोली में काम किया और निष्कर्ष लिख लिए। उन्होंने एक-दूसरे को यह भी समझाया कि उस हिस्से को उन्होंने वही नाम क्यों दिया। इसे 'आधा' कहेंगे क्योंकि पूरे कागज पर इसके समान हिस्से हैं। इसे 'चार-आठवा हिस्सा' कहेंगे क्योंकि दो आयत 'आठवां हिस्सा' हुए और इस तरह के यहां चार हिस्से हैं। इस तरह से शिक्षक ने उनसे उनके हर उत्तर का कारण भी पूछा जैसे घिरा हुआ हिस्सा क्यों दो चौथाई है या 'आठ-सोलहवां' है या 'चार-सोलहवां' वगैरह है। बच्चों ने इन नामों को शब्दों में भी लिखा और भिन्न संख्या के रूप में भी, क्योंकि हर नए तरीके से लिखने का उन्हें एक अंक मिलता था। इस गतिविधि के जरिये शिक्षक को यह पता चला कि बच्चों को भिन्नों के प्रतीकन का कितना तजुर्बा है।

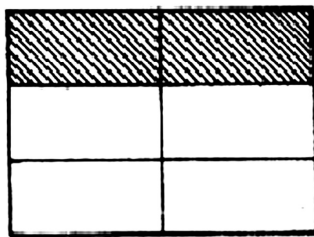
- E5) $\frac{1}{3}$ के तुल्य भिन्न दर्शाने के लिए एक आयताकार कागज लेकर उसको तीन बराबर हिस्सों में मोड़ लें। अच्छे से दबाकर इसे खोल लें। कागज तीन बराबर हिस्सों में बंट जाएगा (चित्र-17 देखें)। कागज को एक बार फिर मोड़कर खोल लें (चित्र-18 देखें)। कागज अब छः बराबर हिस्सों में बंट गया है। इस क्रिया को एक बार और दोहराएं और चित्र-19 में दिखाए अनुसार कागज 12 बराबर हिस्सों में बंट जाएगा। अब



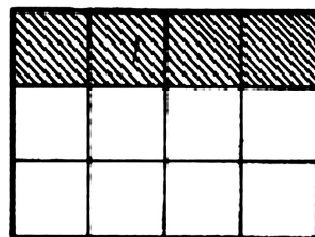
चित्र-17

चित्र-17 में $\frac{1}{3}$ हिस्से को, चित्र-18 में $\frac{2}{6}$ हिस्से को तथा चित्र-19 में $\frac{4}{12}$ हिस्से को रंगकर आप बता सकते हैं कि $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$ चित्र-17, 18 व 19 की मदद से आप यह भी दिखा सकते हैं कि $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}$ और $\frac{4}{12}$ आपस में तुल्य हैं।

$\frac{1}{4}$ के तुल्य भिन्न भी कागज मोड़ने की गतिविधि के जरिये दिखाए जा सकते हैं। इसके लिए आपको शुरू में कागज को चार बराबर हिस्सों में मोड़ना होगा।



चित्र-18



चित्र-19

- E6) ऐसी गतिविधियों की उपयोगिता आंकने के लिए मैंने कुछ शिक्षकों से बातचीत की। उनमें से कुछ की राय थी कि ऐसी गतिविधियों से बच्चों को तुल्यता की बात समझने में जरूर मदद मिलती है। उनका कहना था कि ऐसी गतिविधियों से बच्चों को यह देखने व समझने में मदद मिलती है कि क्यों $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}$ के तुल्य है और $\frac{2}{6}, \frac{4}{12}$ के। इस तरह की गतिविधियाँ से उन्हें अपनी गलतफहमियों दूर करने में भी मदद मिलती है। बड़ी संख्या में ऐसे उदाहरणों को हल करके बच्चे इनमें निहित पैटर्न पहचान पाएंगे। परन्तु यह आवश्यक नहीं कि आप इससे सहमत ही हों। अच्छा यह होगा कि आप अपनी कक्षा में इन गतिविधियों को आजमाएं और इनके बारे में अपनी राय लिखें।
- E7) इसका मूल्यांकन करने का एक तरीका यह हो सकता है कि आप बच्चों से किसी भिन्न के तुल्य भिन्न लिखने का अभ्यास करवाएं जिसके अंश व हर मूल भिन्न से छोटे हों। फिर कक्षा में घूमकर आप उनके जवाबों की जांच कर सकते हैं। बीच-बीच में उनसे कागज मोड़कर अपने उत्तर की जांच करने को भी कह सकते हैं।
- E8) यह काम कागज मोड़कर या रंगकर किया जा सकता है। बच्चों से बराबर माप के दो कागज लेने को कहें। एक को 6 बराबर हिस्सों व दूसरे को 4 बराबर हिस्सों में मोड़ें। उनसे पहले कागज में से 5 हिस्सों में हरा रंग भरने को और दूसरे कागज में 4 में से 3 भाग लाल रंगने को कहें। अब उनसे कहें कि रंगे हुए भाग की तुलना करके बताएं कि $\frac{5}{6}$ और $\frac{3}{4}$ बराबर हैं या नहीं। यही गतिविधि 12-12 कंचों के दो समूह लेकर भी की जा सकती है। पहले समूह को 2-2 कंचों के 6 समूह में बांट दें। अब देखें कि ऐसे 5 समूहों में कुल मिलाकर कितने कंचे हैं। दूसरे समूह को 3-3 कंचों के 4 समूहों में बांट दें और देखें कि ऐसे तीन समूहों में कुल कितने कंचे हैं। अब आप आसानी से दिखा सकते हैं कि $\frac{5}{6}$ और $\frac{3}{4}$ बराबर नहीं है।

E9) $\frac{5}{4}$ दिखाने के लिए कागज मोड़ने की आसान-सी गतिविधि की जा सकती है। विभिन्न चरण निम्नानुसार होंगे :

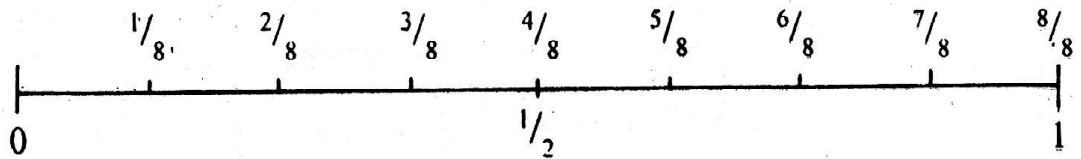
चरण 1 : एक कागज को चार भागों में मोड़ दें।

चरण 2 : एक हिस्सा बताएं जो पूरे का एक-चौथाई हो। क्या आप 5 एक-चौथाई हिस्सों को रंग सकते हैं? नहीं ! 5 एक-चौथाई हिस्से दिखाने के लिए हमें एक और कागज की जरूरत होगी।

चरण 3 : एक और कागज को मोड़ें। इसके 4 हिस्सों में एक हिस्सा काट लें और इसे पहले कागज के साथ चिपका दें। अब आप $\frac{5}{4}$ दिखा सकते हैं।

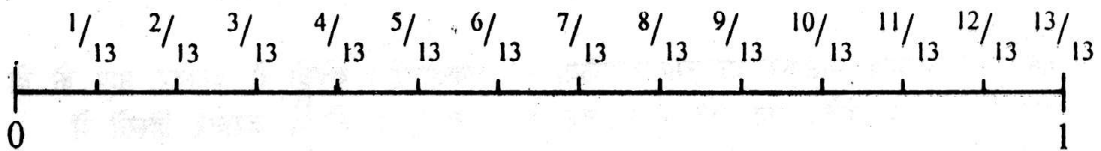
E10) संख्या रेखा पर $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{10}$ दिखाते वक्त यह ध्यान रखें कि हर बार जब आप संख्या रेखा बनाएं, और इस पर एक इकाई दूरी लें, तो यह दूरी हर बार एक ही हो। बाद में भी जब इस इकाई दूरी को छोटे-छोटे हिस्सों में बांटें तो हर हिस्से की लम्बाई बराबर हो ताकि बच्चे यह देख सकें कि $\frac{1}{8} < \frac{1}{7}$ हैं या $\frac{1}{7} < \frac{1}{6}$ है। यह शिक्षकों का मत है कि संख्या रेखा के प्रयोग से भिन्न की संकल्पना को संख्या की संकल्पना से जोड़ने में मदद मिलती है।

E11) $\frac{12}{13}, \frac{7}{8}$ से बड़ा है, इस बात को संख्या रेखा से भी दिखाया जा सकता है चित्र-20 के अनुसार आप दिखा सकते हैं कि $\frac{8}{8}$ एक पूर्ण है



चित्र-20

जबकि $\frac{7}{8}$ उससे 1 भाग यानी $\frac{1}{8}$ कम है। इसी प्रकार से $\frac{13}{13}$ एक पूर्ण है और $\frac{12}{13}$ उससे एक भाग यानी $\frac{1}{13}$ कम है (देखें चित्र-21)



चित्र-21

$\frac{1}{13}$ छोटा है या $\frac{1}{8}$? इसका उत्तर बच्चों को निकालने दीजिए और उसके बाद तय करने दीजिए

कि $\frac{12}{13}$ और $\frac{7}{8}$ में से कौन-सा बड़ा है। यदि किसी बच्चे को कठिनाई हो, तो कुछ और सवाल पूछ कर उसकी मदद करें।

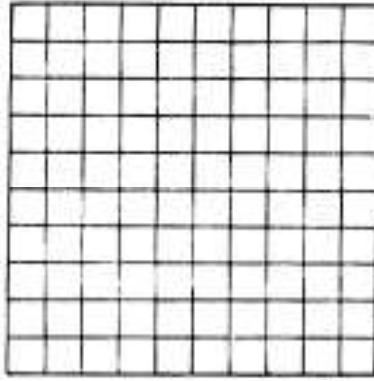
E12 ऐसा लगता है कि मिनी को प्रत्यक्ष चीजों या कागज मोड़ने/रंगने की गतिविधियों के जरिये यह समझने का मौका कभी न मिला था कि $\frac{7}{4}$ होता क्या है। वह $\frac{7}{4}$ या $\frac{11}{6}$ जैसी संख्याओं को मात्र विषम भिन्न के रूप में जानती थी, जिन्हें मिश्रित भिन्न में तब्दील करना होता है। वह तो इतना जानती थी कि शिक्षक ने उसे यह काम करने का एक तरीका भी बताया था।

E13 मिनी की गलती सुधारने के लिए जरूरी था कि वह यह समझे कि $\frac{7}{4}$ का मतलब होता है – 4 भागों में से 7 भाग। जिसके लिए हमें एक समूचा पूर्ण लेना होगा तथा एक और पूर्ण के 4 हिस्सों में से तीन हिस्से लेने होंगे। उसे यह समझाया जाना चाहिए कि $\frac{7}{4} = 1$ पूर्ण तथा $\frac{3}{4}$ और। यही काम हम कागज मोड़ने की गतिविधि की मदद से भी कर सकते हैं। हम दिखा सकते हैं कि $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4} =$

भागफल $\frac{\text{शेषफल}}{\text{भाजक}}$

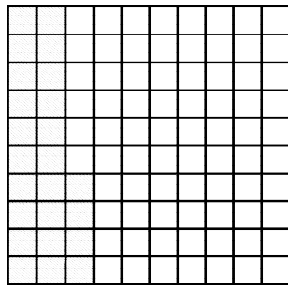
पाठ—10

- E1) सबसे पहले यह पता करें कि क्या वह 0.6 और 0.06 में अन्तर समझती है। अब उससे पूछ सकते हैं कि यदि वह 0.06 को शून्य दशमलव छः बोलेगी तो 0.6 को क्या कहेगी? यह सवाल शायद उसे सोचने को उकसाए।
- E2) गौर करें कि उदाहरण 1 में शिक्षक तथ्य पर तथ्य बताती जा रही हैं और उनके पीछे जो तर्क है वह नहीं बता रही हैं। इस तरीके का फायदा है कि यह शिक्षक के लिए आसान और सीधा है। इन शिक्षक तथा कई और शिक्षकों ने पाया है कि इस उम्र के बच्चे नियमों के पीछे का तर्क समझने में समर्थ नहीं होते। इसलिए बेहतर यही है कि उन्हें इस नियम का बारम्बार अभ्यास करने दिया जाए। आगे चलकर वे इसके पीछे का तर्क भी समझ जाएंगे। परन्तु सवाल यह है कि क्या यह तरीका बच्चों में गणितीय ढंग से सोचने की क्षमता विकसित करने में मददगार होता है?
- E4) एक गतिविधि 'वर्ग को 100 भागों में बांटने' की हो सकती है। बोर्ड पर एक बड़ा वर्ग बनाएं। एक बच्चे से कहें कि वह इसे 10 छोटे वर्गों की दस कतारों में बांट दें। (चित्र 6 देखिए)

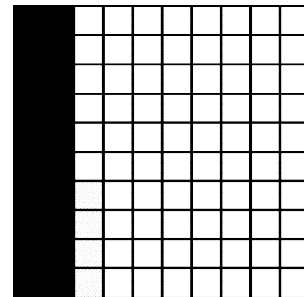


चित्र 6

लम्बे, पतले आयत को चिह्नित कर दें। यह बड़े वर्ग का दसवां हिस्सा है। इससे बच्चों को यह देखने में मदद मिलती है कि वर्ग के दस सौवें भाग एक दसवें भाग के बराबर होते हैं। बच्चों को वर्ग के दसवें तथा सौवें भाग कही जाने वाली आकृतियों को पहचानने के लिए काफी समय दिया जाना चाहिए। एक मर्तबा वे ये आकृतियां पहचान ले तो उनसे पूछा जा सकता है कि वर्ग के कितने सौवें भाग मिलकर एक दसवां भाग बनता है, दो दसवें भाग कितने सौवें भाग से बनेंगे आदि। इसके बाद वर्ग का कुछ हिस्सा रंगा जा सकता है मसलन उनसे 24 सौवें भाग के बराबर हिस्सा रंगने को कह सकते हैं। अब उनसे पूछिए कि इसमें कितने दसवें भाग हैं। इन दसवें भागों को काला रंगने को कहिए।



(क)



(ख)

चित्र 7

अब कुल रंगे हुए भाग को 2 दसवें और 4 सौवें के रूप में पहचान सकते हैं। अब तक वे यह तो जान ही चुके होंगे कि 2 दसवें और चार सौवें को .24 लिख सकते हैं। अब हम बच्चों से विभिन्न भाग रंगने को कहें तथा उनसे संबंधित संख्या को दशमलव रूप में लिखने को कहें। इसके बाद कोई संख्या देकर उसके अनुसार दसवें व सौवें भाग रंगने को कह सकते हैं। इस गतिविधि को आजमाकर इसका असर देखिए। निम्नलिखित अभ्यासों के जरिये आप यह आकलन भी कर सकते हैं कि यह गतिविधि बच्चे की दशमलव की समझ बेहतर बनाने में कितनी उपयोगी रही है :

1. ग्यारह दसवें भाग, नौ सौवें भाग जैसी संख्याओं को दशमलव के रूप में कैसे लिखोगे?
2. खाली स्थान भरो

छ: दसवें भाग = ... सौवें भाग।

3. निम्नलिखित संख्याओं को छोटी से बड़ी के क्रम में जमाओ

1.32, 0.89, 3.04, 2.09

E6) गलत। बच्ची नियम को समझे बगैर भी सही-सही लागू कर सकती है। ऐसी स्थिति में यदि उसे थोड़ा अलग किस्म का सवाल दिया जाए, जिसकी वह आदी न हो, तो हो सकता है कि वह नियम लागू न कर पाए।

E7) यह इस धारणा से हो सकता है कि शिक्षक ने उन्हें दशमलव संख्याओं को सैकड़े, दहाई, इकाई, दसवें आदि के रूप में लिखने को पर्याप्त अभ्यास न कराया हो। क्या नीचे दिए गए तरीके से इसमें कुछ सुधार हो सकता है?

चरण 1 : पहले यह ठीक कर लें कि बच्चे एक दशमलव संख्या को दहाई, इकाई, दसवें आदि के multiple के रूप में लिख सकते हैं।

चरण 2 : फिर उन्हें पूर्णांकों को जोड़ने का तरीका याद दिलाएं जैसे कि $219 + 73$ । वे यह 3 को 9 के नीचे लिखकर कर सकते हैं यानी 'इकाई' को 'इकाई' के नीचे, दहाई को दहाई के नीचे आदि। यानी दशमलव संख्याओं को भी इसी तरह जोड़ा जाता है – सौवें हिस्से को सौवें के नीचे लिखकर दसवें को दसवें के नीचे लिखकर आदि। उदाहरण के लिए माना कि हमें 18.7 और 20.65 को जोड़ना है। तो हम 2 को 1 के नीचे दहाई वाले स्तंभ में रखेंगे आदि। विद्यार्थी सोच सकते हैं कि 20.65 में 5 का क्या करें – क्योंकि 18.7 में उसके संगत कोई अंक नहीं है। तब हम उन्हें बता सकते हैं कि 18.7 में कोई सौवां हिस्सा नहीं है और यह इस स्तंभ में शून्य लिखने के बराबर है। अब सौवें स्तंभ में बच्चे 5 को 0 के नीचे रख सकते हैं।

E8) विभिन्न चीजें खरीदते वक्त हिसाब रखना एक ऐसी स्थिति हो सकती है जहां उन्हें दशमलव संख्याओं का परोक्ष इस्तेमाल करना पड़ता हो। परन्तु यह ध्यान रखें कि पैसे से परिचित होने के कारण वे ये जोड़ आसानी से कर लेते हैं। हो सकता है कि इसमें वे दशमलव पद्धति का उपयोग ही न करते हों।

क्या किसी बच्चे ने निम्नलिखित स्थिति सोची? जैसे, उसे अपने लिए एक स्कर्ट और एक ब्लाउज चाहिए। यदि स्कर्ट में 3 मीटर 50 सेमी. कपड़ा लगता है और ब्लाउज में 1 मीटर 70 सेमी. कपड़ा लगता है तो उसे यह पता करना होगा कि कुल कितना कपड़ा खरीदे। क्या वह दशमलव पद्धति की जानकारी का इस्तेमाल कर रही है? मुद्दा यह है कि स्थिति ऐसी हो कि उन्हें उस कार्य में दशमलव पद्धति की जानकारी का वास्तव में इस्तेमाल करना पड़े।

- E9) हम अभ्यास 4 में बता ही चुके हैं कि वर्ग को 100 भागों में बांटकर किस तरह दशमलव संख्या दर्शाई जा सकती है। शुरू में मात्र उन संख्याओं पर गौर कीजिए जिनका जोड़ 1 से कम होता हो। हम $0.31 + 0.25$ जैसे जोड़ सिखाने के लिए तो उसी वर्ग का इस्तेमाल कर सकते हैं। पहले उनसे कहें कि वर्ग पर 0.31 चिह्नित कर दें। उसके बाद दसवें भाग को काले से तथा सौवें भागों को लाल से रंग दें। अब इसी प्रकार से 0.25 दर्शाने को कहें। इसमें भी दसवें भाग तथा सौवें भाग को रंग दें। अब हम उनसे कह सकते हैं कि कुल दसवें भाग तथा सौवें भाग गिन लें। उन्हें यह दिख जाएगा कि 6 सौवें भाग तथा 5 दसवें भाग इन संख्याओं का जोड़ है।

अगले चरण में आप उन्हें $0.18 + 0.23$ जैसा सवाल दे सकते हैं। इसमें उनमें 10 सौवें भाग = एक दसवां भाग का समीकरण लगाना पड़ेगा। इसके बाद हम उन्हें $0.06 + 0.25$ और $0.7 + 0.04$ जैसे सवाल दे सकते हैं।

जब उन्हें वर्ग का उपयोग करके जोड़ने का काफी अभ्यास हो जाए, तब हम वर्ग के साथ-साथ सामान्य जोड़ भी शुरू करवा सकते हैं। यह याद रखें कि हम ऐसी संख्याओं का ही उपयोग कर रहे हैं जिनमें पूर्णांक शून्य है। आगे चलकर हम $18.7 + 20.65$ जैसे जोड़ के सवाल भी दे सकते हैं।

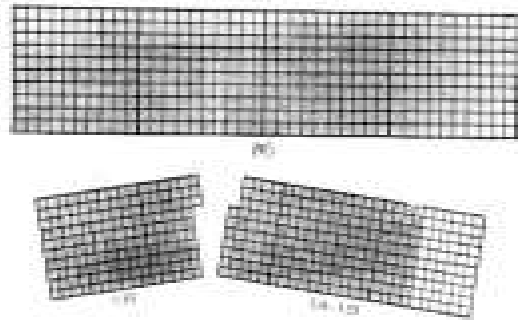
क्या आपको नहीं लगता कि जिन बच्चों को 100 भागों में बंटे वर्ग पर दशमलव संख्याएं दर्शाने का अभ्यास मिला है, उनको यह तरीका आसान लगेगा? इस तरीके का एक फायदा यह है कि इसमें हमें यह प्रत्यक्ष अहसास मिलता है कि हम दसवें भाग, सौवें भाग, दहाई, इकाई आदि को जोड़ रहे हैं। हो सकता है कि शुरू में बच्चों को दसवें तथा सौवें भाग के परस्पर संबंध को लेकर थोड़ा भ्रम रहे। एक बार वह साफ हो जाए तो यह तरीका बेहतर होता है।

- E10) प्रत्येक गलती का संबंध इस बात से है कि बच्ची 3.4 में सौवें भाग के स्थान पर अंक न होने के मसले से जूझ रही है।

(क) में बच्ची ने यह गलती शायद इस वजह से की होगी : वह यह तो जानती है कि पहली पंक्ति में 3.4 और दूसरी पंक्ति में 1.53 होगा मगर वह भ्रमित इस बात से हो रही है कि 1.53 के अंक 3 के ऊपर कोई अंक नहीं है। भ्रमित होकर वह अंकों की अदला-बदली कर देती है।

इसे दुरुस्त करने के लिए मैं पहले यह करती कि उसे 3.4 और 11.9 जोड़ने को कहती और देखती कि क्या उसका उत्तर 1.53 आता है। इससे उसे यह समझने में मदद मिलती कि उसने गलती की है। इसके बाद मैं कोशिश करती कि वह दशमलव पद्धति में स्थानीय मान का तरीका समझ पाए। इससे उसे पता चलता कि 3.4 में सौवें भाग के स्थान पर अंक नदारद होने पर क्या किया जाए। (ख) और (ग) को भी आप इसी तरह देख सकते हैं। इस संदर्भ में आप कई शिक्षण विधियां लिख सकते हैं।

- E11) यहां हम संक्षेप बताएंगे कि घटाना सिखाने में वर्ग चार्ट का उपयोग कैसे किया जा सकता है। मान लीजिए कि $3.14 - 1.53$ करना है। एक बड़े चार्ट पर 100 भागों में बंटे 4 वर्ग बनाइए (चित्र 8 क देखें)।



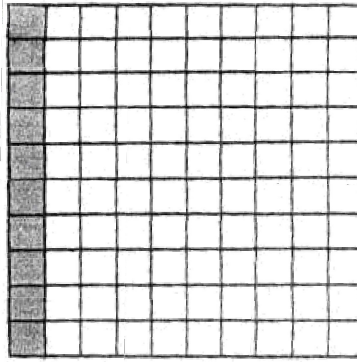
चित्र 8 (क) लाल रंग भाग 3.4 दर्शाता है। (ख) $3.4 - 1.53$ दिखाता है।

अब 3.4 दर्शाते भाग में से 1.53 भाग मिटा दीजिए (चित्र ख)। इन वर्गों का उपयोग करके आप बच्चों को घटाने का काफी अभ्यास करवा सकते हैं। इसके बाद आप इन संख्याओं को एक के ऊपर एक लिखवाकर घटाकर दिखा सकते हैं जैसे कि 3.4–1.53 साथ ही वर्ग के द्वारा उत्तर की जांच हो सकती है। फायदा यह होगा कि यदि उन्हें सीधे तरीके में दिक्कत आती है तो वे वर्ग वाली गतिविधि पर लौटकर उसी सवाल को हल कर सकते हैं। इससे उन्हें नियम लागू करने में आत्मविश्वास आएगा। इस गतिविधि को अपने आसपास के बच्चों के साथ आजमाकर आप देख सकते हैं कि क्या वाकई इससे मदद मिलती है।

E12) शुरुआत आप इन्हें $0.1 \times 0.1 = 0.01$ समझाकर कर सकते हैं। सबसे पहले उनसे कहें कि वे दशमलव

दशमलव $.1 \times .1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ अब $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ का मतलब है पूरे $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$ यह

निकालने के लिए 100 भागों में बंटे वर्ग को लीजिए। सबसे पहले दर्शाने वाले हिस्से को चिन्हित कर दें। उसके लिए आपको चित्र 9 में दिखाए अनुसार एक पट्टी को लाल रंगना होगा।



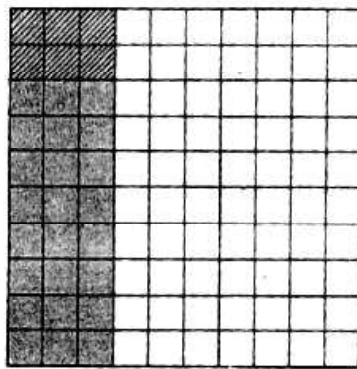
चित्र 9

इस लाल रंग के हिस्से (यानि $\frac{1}{10}$) के $\frac{1}{10}$ भाग को काले से दोहरा रंग दीजिए। यह दोहरा रंगा हिस्सा $\frac{1}{100}$

होगा। अतः $.1 \times .1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 0.01$ । इसके बाद आप गुणा के ऐसे सरल उदाहरण बता सकते हैं जिनका

गुणनफल 1 से कम हो। जैसे $.2 \times .3 = \frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ आदि। ऊपर के उदाहरण की तरह इन्हें भी भिन्न में बदल लें।

ऐसा करने पर मिलेगा। सबसे पहले 100 भागों में बंटे वर्ग में $\frac{3}{10}$ को लाल रंग कर लें (देखें चित्र 10)।

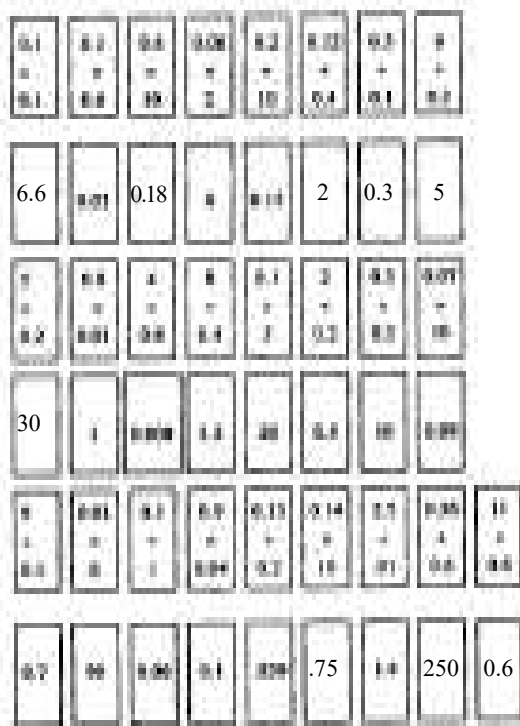


चित्र 10

अब लाल रंगे हुए हिस्से का पता लगाइए। इसके लिए हमें उस हिस्से को 10 भागों में बांटकर उसके 2 भाग लेने होंगे। चित्र 9 में हमने रंगीन हिस्से के दस भाग करके उसमें से 2 हिस्सों को स्लेटी कर दिया है। अब स्लेटी रंग का भाग दर्शाता है। अब देखिए कि उस हिस्से में 6 छोटे वर्ग हैं 0.06 संख्या दर्शाता है।

E13) यदि 4 बच्चे हों, तो निम्नानुसार एक खेल बन सकता है।

आप पच्चीस कार्ड बना ले जिनके एक तरफ भाग या गुणा के सवाल लिखे हों और दूसरी तरफ उत्तर हों। एक कार्ड के सवाल का उत्तर अगले सवाल वाले कार्ड के पीछे लिखा हो। आखिरी कार्ड के सवाल का उत्तर सेट के पहले कार्ड के पीछे होगा। उत्तरों में कोई उत्तर दोबारा न आए (चित्र 11 देखें)।



चित्र 11

इन कार्डों को अच्छे से फेंटकर चारों बच्चों में बराबर-बराबर बांट दें। शेष बचे कार्ड को मेज के बीचों बीच ऐसे रखें कि सवाल ऊपर की ओर हो। अब मान लीजिए सवाल 0.3×0.6 हो, तो आप उनसे पूछिए कि इसका उत्तर किसके पास है। जिसके पास 0.18 का कार्ड हो वह उसे सवाल वाले कार्ड के पास रख दें। यदि सब इस उत्तर से राजी हों, तो कार्ड को उलट दें ताकि पीछे लिखा प्रश्न ऊपर आ जाये यह सवाल 0.4×10 हो। जिसके पास इसका जवाबी कार्ड हो वह उसे मेज पर रख दे। खेल तब तक चल सकता है जब तक कि सारे कार्ड खत्म न हो जाएं।

इसे अपने आसपास के बच्चों के साथ करके देखें कि यह कितना असरदार है।

E14) संख्या की क्रियाओं को लेकर बच्चों की समझ परखने का एक तरीका यह है कि उनसे इबारती सवाल पूछे जाएं।

क. निम्नलिखित प्रश्नों में पहले तो यह पहचानना है कि आपको कौन सी क्रिया करनी होगी और फिर वास्तव में गणना करके उत्तर निकालना है।

उदाहरणार्थ मान लीजिए कि सवाल इस प्रकार का है : राजू अखबार बांटकर रु. 1.45 प्रति घण्टा कमाता है। वह पांच घण्टे में कितना कमा सकता है?

(i) $1.45 + 5$

(ii) $5 - 1.45$

(iii) 1.45×5

(iv) $\frac{1.45}{5}$

अब, $1.45 \times 5 = 7.25$

अतः उत्तर है 7.25.

इसी प्रकार आप बच्चों से ऐसे सवाल पूछ सकते हैं:

क. एक कार एक लीटर पेट्रोल से 15.80 किलोमीटर चलती है। 70.50 लीटर पेट्रोल से वह कितने किलोमीटर जा सकती है?

1. $15.80 + 70.50$

2. $15.80 - 70.50$

3. 15.80×70.50

4. $70.50 \div 15.80$

ख. 3.4 मीटर कपड़े की कीमत 40 रुपए है। 1 मीटर कपड़े की कीमत क्या होगी?

1. $40 - 3.4$

2. $3.4 - 40$

3. 40×3.4

4. $40 \div 3.4$

ग. नीचे हर सवाल में बड़ी संख्या को गोले में घेर दो :

1. $5 \times 0.4, 5 \div 0.4$

2. $0.4 \times 0.8, 0.8 \div 0.4$

3. $0.6 \times 3, 3 \div 0.6$

4. $0.7 \times 0.5, 0.7 \div 0.5$

जगह की समझ

इस अध्ययन के विषयवस्तु

पाठ — 11 जगह की समझ

परिचय — उद्देश्य — बन्द आकृतियाँ — समतल सतह — सम आकृतियाँ — सममित आकृतियाँ — सारांश।

पाठ — 12 कोण मापना

परिचय — उद्देश्य — कोण क्या होता है? — कोण मापना — सारांश।

पाठ — 13 मापन की शुरुआत

परिचय — उद्देश्य — लम्बाई मापना— गैर मानक और मानक इकाइयाँ — मानक इकाइयाँ — उप-इकाइयाँ और मिश्रित इकाइयाँ — क्षेत्रफल का अर्थ क्या है — क्षेत्रफल मापना — सारांश।

पाठ-11, 12 व 13 के अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

यह बात दोहों के बारे में कही जाती है। क्या छोटा है, क्या बड़ा है, यह सवाल जीने-मरने के सवाल से जुड़ा है। खेत कितना बड़ा है — इस पर तय होता है कितनी जुताई करनी होगी, और कितनी उपज होगी। दवा की खुराक कितनी लेनी है— इस पर तय होता है रोग का इलाज। सड़क पर बस कितनी दूरी पर है — इस पर निर्भर है कि भागकर सड़क पार की जा सकती है या नहीं!

तो बड़े-छोटे, लम्बे-नाटे का माप कैसे किया जाये? मापने का एक पैमाना होना चाहिए जो सबको मालूम हो, नहीं तो झगड़े होंगे। ऐसा ही है। लम्बाई का माप पुराने दिनों में “अंगुल” और “हाथ” से किया जाता था। ‘तीन अंगुल जगह छोड़कर आरी चलाओ’— बड़ई कहता था। ‘छः हाथ कपड़ा काफी होगा’—किसान सोचता था। अंगुल, हाथ, इंसानी माप के पैमाने हैं। इन्हीं से काम चलता था, और आज भी चलता है। अंग्रेजी में ‘एक फुट’ लम्बाई एक अंग्रेज राजा के पैरों का माप है — अंग्रेजी में पैर को फुट कहा जाता है। इसी तरह दूरी मापी जाती थी बैलों के एक दिन के सफर की दूरी से — यहाँ से आया ‘एक कोस’। यूरोप में ‘एक मील’ आया घोड़े की एक दिन की यात्रा से। देखिये, फिर वही व्यापार से संबंध! रास्तों में पड़ाव या सराय बैलों/घोड़ों के एक दिन के सफर के अंत में शाम होते होते पहुँचने की जगह बनाये जाते थे। कहीं और बनाये गये होते तो बैल/यात्री रात में कहीं रास्ते में अटक जाते।

यही बात हर किसी तरह के मापतोल के पैमाने में देखी जा सकती है। जब व्यापार पूरी दुनिया में फैल गया, साधन बैलों/घोड़ों से हटकर गाड़ी/जहाज हो गये तो नये पैमाने बने जो दुनिया में हर जगह माने जाएँ— मीटर, किलोग्राम आदि। ये पूरी दुनिया के मानक मानदंड हैं।

जब आप महासागर में जहाज से चलते हैं, या हवाई जहाज में उड़े चले जा रहे हैं, तब आप कैसे तय करेंगे कि दुश्मन जहाज, या तूफानी बादल कहाँ पर मौजूद हैं। सोचकर देखने से पाएँगे कि आप सूरज की मदद लेंगे। कहेंगे उत्तर में, दक्षिण में, पूरब में, या पश्चिम में। लेकिन यह काफी नहीं होगा। और तो और कभी सूरज बादलों से ढका होगा। तब आप कम्पास इस्तेमाल कर सकते हैं जिसमें चुंबक की सूई उत्तर की ओर इशारा करती रहती है।

मजे की बात है कि कम्पास भी गोल है, और धरती भी! यहीं से सुराग मिलता है कोण को। पूरी धरती गोल है, घड़ी की तरह आप कह सकते हैं कि पाँच बजे की सूई की दिशा में तूफानी बादल है। या 10 बजे की सूई की दिशा से दुश्मन जहाज आ रहा है। इसी घड़ी को लकीरें खींचकर —कम्पास में — 360 में बाँट दिया जाता है जो ज्यादा सही दिशा बताता है। और लीजिए, इन्हीं डिग्रियों की रेखाओं के बीच के फांसले को कहा जाता है, कोण। 360 डिग्रियाँ, 360 कोण। मकान, मशीन, सामान बनाने में कोणों का इस्तेमाल जरूरी है। पृथ्वी के कोने-कोने में कोण ही है!

पाठ — 11

जगह की समझ

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - बन्द आकृतियाँ
 - समतल सतह
 - सम आकृतियाँ
 - सममित आकृतियाँ
- सारांश

परिचय

हम जानते हैं कि बिन्दु, रेखा, अर्ध रेखा, रेखाखण्ड जैसी ज्यामितीय अवधारणाओं से बच्चों का परिचय प्रायः कक्षा 4 में कराया जाता है। परन्तु ऐसा माना जाता है कि छोटे बच्चों का अपने आस – पास के वातावरण से सर्वप्रथम सम्पर्क स्थान सम्बंधी अनुभवों के ज़रिए ही होता है। इसमें दृष्टि व स्पर्श की संवेदना का विशेष योगदान होता है। आगे चलकर भाषा का विकास होता है तथा भौतिक पर्यावरण के संदर्भ में ही यह भाषा अर्थ ग्रहण करती है। धीरे – धीरे बच्चे स्थान सम्बंधी कुछ सहज विचार विकसित करने लगते हैं, जैसे दूर, पास, लम्बा, छोटा, दूरी आदि। चाहे वे यह न बता सकें कि इनके ठीक – ठीक मायने क्या हैं। इन्हीं सहज विचारों पर हम ज्यामिती के पाठों की बुनियाद रखते हैं। हममें से अधिकांश लोग इन विचारों और अवधारणाओं को सिखाने के लिए औपचारिक परिभाषाओं या मौखिक वर्णन का सहारा लेते हैं। नतीजा यह होता है कि बच्चे सिखाई गई अवधारणाओं का मानसिक चित्र निर्मित नहीं कर पाते। हो सकता है कि कोई बच्ची वर्ग या किसी अन्य बन्द आकृति की परिभाषा तो आसानी से बता दे मगर जब उससे कहा जाए कि कई सारी आकृतियों में से वह आकृति विशेष पहचाने तो वह न बता पाए। जिस बच्ची ने कक्षा में वर्ग और सम चतुर्भुज के बारे में सब कुछ सीखा है वह यह नहीं बता पाती कि वर्ग किस किस्म का सम चतुर्भुज है। आपको क्या लगता है कि बच्ची को एक ऐसी आकृति की कल्पना नहीं है। क्या इसका कारण यह नहीं है कि जो चीज़ उसे समझाई गई उसे 'देखने' का मौका कभी नहीं मिला? वह अपने दिमाग में इस आकृति की छवि नहीं बना पाती। किसी बच्ची को कक्षा में दो बेलनाकृतियों के आकार की तुलना करने में कठिनाई क्यों होती है जबकि घर पर वह बड़ी आसानी से 1 किलोग्राम शक्कर रखने के लिए बड़ा बर्तन ढूँढ निकालती है? क्या आपको ऐसा नहीं लगता कि हम लोग बच्चों को अवधारणाएं सिखाने में इतनी जल्दबाजी करते

हैं कि उन्हें किसी चीज़ की आकृति व आकार का प्रत्यक्ष अनुभव देना भूल जाते हैं ? यदि हम बच्चों से नोट बुक में वर्ग खिंचवाने के बजाय, चार तीलियों से वर्गाकार बनाने को कहें, तो क्या इससे कुछ फर्क पड़ेगा?

कहने की जरूरत नहीं कि बच्चों को गतिविधियों में मजा आता है। उन्हें कुछ करना अच्छा लगता है। उन्हें खेलकूद में आनन्द आता है। तो क्यों न हम उनके इस स्वभाव का लाभ उठाते हुए ज्यामिती की कुछ अवधारणाएं सिखाने का प्रयत्न करें?

इस पाठ में हमने ऐसा ही प्रयास किया है। हम बच्चे को ज्यामितीय चीज़ें बारीकी से देखने में मदद करते हैं ताकि वह विभिन्न आकृतियों व चित्रों के गुणधर्म खुद ही पहचानने लगे। यहाँ हमने कोशिश की है कि हर अवधारणा को गतिविधियों के द्वारा समझाया जाए और इन गतिविधियों में प्रयोग की जाने वाली चीज़ें आसानी से उपलब्ध हों। **इस पाठ का मूल सिद्धांत 'करके सीखो' है।** सम, समतल, असमतल, बन्द, खुली, सममिति आदि अवधारणाओं पर चर्चा की गई है। तिकोन, वर्ग, आयत, तथा अन्य किस्म की चौकोर आकृतियों व वृत्त को समझने के लिए बच्चों को इन आकारों की चीज़ों को देखने और प्रयोग करने का अवसर दिया गया है।

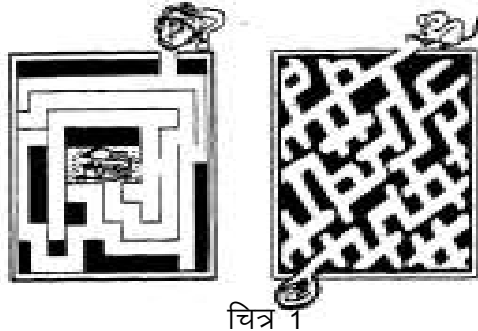
यह पाठ अन्य ज्यामितीय अवधारणाओं के विकास की बुनियाद है। अतः यह अत्याधिक महत्वपूर्ण है। इस पाठ के अध्ययन से हमारे विद्यार्थियों को ज्यामिती के मूल तत्व प्रस्तुत करने के लिए गतिविधियों पर आधारित शिक्षण के नये तरीके खोजने में मदद मिलेगी ताकि गणित बच्चों के लिए एक दिलचस्प विषय बन सके।

उद्देश्य

- ज्यामितीय अवधारणाओं में बच्चों की दक्षता, हासिल कराने के लिए उनके रोजमर्रा के अनुभवों का इस्तेमाल कर पाएं।
- ज्यामितीय अवधारणाएं समझाने के लिए विभिन्न खेल व गतिविधि का निर्माण कर पाएं।
- बच्चों को ज्यामिती के विचारों से अवगत कराने हेतु ज्यादा कारगर विधियां विकसित कर पाएं।
- अपनी विधियों की उपयोगिता का आकलन कर पाएं।

बन्द आकृतियां

उदाहरण 1 : हर रविवार की तरह उस दिन जब मैं अपनी सहेली के घर पहुंची तो देखा कि उसका 9 वर्षीय पुत्र राम एक किताब में खोया हुआ है। वह कक्षा 4 का छात्र है। किताब दरअसल एक बाल पत्रिका थी। वह एक भूलभुलैया पहेली में एक नाविका को गुप्त खजाने तक पहुंचाने में व्यस्त था। (देखें चित्र 1)।



चित्र 1

वह इस पहेली में इस कदर खोया हुआ था कि उसने मुझे देखा ही नहीं। अन्ततः वह नाविक को उसका रास्ता दिखाने में सफल हो गया। उसकी मां रेणु की शिकायत थी कि राम हमेशा पहेलियां सुलझाने में वक्त बर्बाद करता है और पाठ्यपुस्तक का एक शब्द भी नहीं पढ़ता। कई माता-पिता इस तरह की शिकायत करते हैं।

मुझे रेणु को समझाना पड़ा कि बाल पत्रिकाओं की अधिकतर पहेलियां बच्चों की बहुत मददगार होती हैं। ये पहेलियां एकाग्रता की कसौटी होने के अलावा गणित की कई बातें सीखने में भी उनकी मदद करती हैं। परन्तु रेणु को विश्वास नहीं हुआ। मैंने राम से बातचीत करने की ठानी।

मैंने राम से पूछा कि क्या उसने कक्षा में बन्द व खुली आकृतियों के बारे में सीखा है। उसने जवाब दिया; "हां, मगर इस पहेली से मुझे वह सब सीखने में कैसे मदद मिलती है?" मैंने उसकी नोटबुक मंगवाई जिसमें उसने लिखा था, "बंद आकृति वह होती है जो अपने प्रारम्भिक बिन्दु पर समाप्त होती है जबकि खुली आकृति प्रारम्भिक बिन्दु पर समाप्त नहीं होती।" उसने बन्द आकृति दर्शाने के लिए  और खुली आकृति

दर्शाने के लिए  चित्र बनाया था। जब मैंने उससे एक बन्द आकृति बनाने को कहा तो उसने नोटबुक

वाली आकृति की हूबहू नकल कर दी। जब मैंने  सा चित्र बनाकर पूछा कि क्या यह बन्द है, तो वह जवाब न दे सका।

E1) क्या आपको लगता है कि राम 'बन्द आकृति' की अवधारणा समझ चुका था? एक शिक्षक के नाते आप अपने छात्रों को यह अवधारणा कैसे सिखाएंगे? क्या इस संबंध में कोई खेल या गतिविधि बेहतर साबित होगी? यदि हां, तो किसी गतिविधि का उदाहरण दीजिए।

इस समय तक पड़ोस के घर में काफी शोरगुल शुरू हो गया। वहां बच्चे 'लोमड़ी और खरगोश' का खेल खेल रहे थे। मैंने राम से खेल देखने को कहा। बच्चों ने एक दूसरे का हाथ पकड़कर एक बड़ा सा गोला बना लिया था। यह गोला एक पिंजरा था। एक बच्चा लोमड़ी बनकर पिंजरे के इर्द-गिर्द दौड़ रहा था और एक अन्य बच्चा खरगोश बना था। वह पिंजरे के अन्दर सुरक्षित था (चित्र 2 देखें)



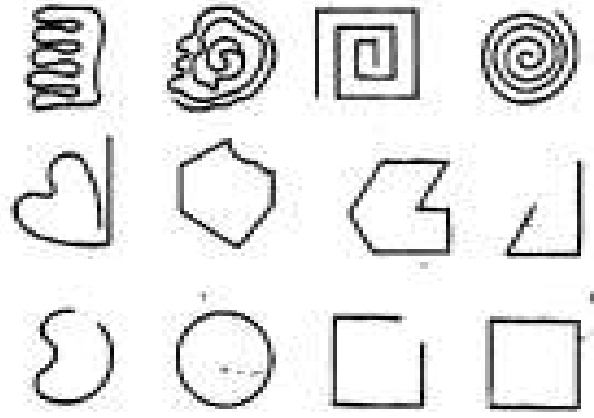
चित्र 2 : लोमड़ी और खरगोश का खेल

लोमड़ी अन्दर घुसने का रास्ता ढूँढ़ रही थी मगर घुस नहीं पा रही थी। राम से पूछा कि लोमड़ी खरगोश को क्यों नहीं पकड़ पा रही है। उसने कहा कि लोमड़ी को 'अन्दर' जाने के लिए 'रास्ता' नहीं मिल रहा है क्योंकि पिंजरा कहीं से भी खुला नहीं है।

मैं : तो लोमड़ी अन्दर कैसे जा सकती है?

राम : जब उसमें अन्दर जाने का कोई रास्ता हो।

मैंने उससे कहा कि पिंजरा हर जगह से बन्द है और फर्श पर पिंजरे की कई आकृतियों के चित्र बनाकर (चित्र 3) उससे यह पता लगाने को कहा कि उनमें कौन से पिंजरे बन्द हैं और कौन से खुले हैं।



चित्र 3

उसने 'अन्दर' जाने के रास्ते को ध्यान में रखते हुए आसानी से बन्द व खुली आकृतियां सही-सही बता दीं।

मैं : अब तुम्हारी 'नाविका और खजाने' वाली पहेली के बारे में बताओं। भुलभुलैया वाली पहेली! क्या वह एक खुली आकृति हैं?

राम : देखकर बताता हूं। बाहर से खजाने तक पहुंचने का एक रास्ता तो है। आप अन्दर जाने का रास्ता खोज सकते हैं। तो, यह खुली है। ठीक है न ?

मैं : हां, यह एक खुली आकृति है। यानि तुम जो पहेली कर रहे थे वह खुली, बंद आकृति के ही समान है, जो तुमने कक्षा में सीखी थी।

राम : अब मुझे समझ में आया कि मैंने नोट बुक में क्या लिखा था। यह भी समझ में आया कि क्यों बंद आकृति का आरम्भ बिन्दु और अंतिम बिन्दु एक ही होता है।

E2) क्या आप बन्द व खुली आकृतियां ऊपर बताए अनुसार समझाते रहे हैं? आप भी अपने घर या पड़ोस के किसी 9 वर्षीय बच्चे के साथ इस तरीके को आजमाकर इसके परिणाम को देखें?

जाहिर है कि यह काफी नहीं है कि बन्द आकृति को परिभाषित कर दिया जाए और फिर बच्चे की समझ का मूल्यांकन कर लिया जाए। उसे इस अवधारणा का उपयोग अलग-अलग संदर्भ में करना भी आना चाहिए। इसके लिए विभिन्न स्थितियों में अभ्यास जरूरी है। इसके लिए बढ़िया तरीका यह हो सकता है कि दिलचस्प और चुनौतीपूर्ण पहेलियाँ का इस्तेमाल किया जाए। इस काम के लिए तीलियों, तार, धागे जैसी कुछ साकार चीजों का इस्तेमाल किया जा सकता है। ये गतिविधियाँ कक्षा में की जा सकती हैं। यहां हम आपके लिए एक ऐसी ही गतिविधियों दे रहे हैं।

उदाहरण 2 : शिक्षिका बीस तीलियां और धागे की एक गड़ड़ी लेकर कक्षा में पहुंची। उन्होंने कक्षा को चार टोलियों में बांट दिया। हर टोली को 5-5 तीलियां देकर कहा कि वे उनसे जितनी बन्द आकृतियां बना सकें, बनाएं। हर टोली ने यह काम खुशी-खुशी किया। उन्होंने अपनी पाँच तीलियों को तरह-तरह से जोड़कर अलग-अलग डिज़ाइन बनाए।

शिक्षिका : देखो, तुमने जो डिज़ाइन बनाए हैं, वे सब के सब सीधे कोर वाली बन्द आकृतियां हैं। क्या तुम ऐसी आकृति बना सकते हो जिसके कोर सीधे न हो।

एक विद्यार्थी : (थोड़ा हिचकते हुए) मैडम, यदि आप मुझे थोड़ा धागा दें, तो मैं कोशिश कर सकता हूँ।

शिक्षिका : ठीक है! यहाँ आओ। ये धागा लो और कोशिश करो।

लड़के ने तीली के सिरों पर धागा बांधकर ऐसी आकृति बनाई जिसके कोर सीधे नहीं थे।

शिक्षिका : शाबाश! (उन्होंने यह आकृति कक्षा के सभी बच्चों को दिखाई।) यदि सिर्फ दो तीलियाँ हों और इसके अलावा कुछ न हो, तो क्या बन्द आकृति बनाना सम्भव है?

बच्चों ने तीलियों को कई तरह से जमा-जमाकर देखा मगर सफल नहीं हुए। सब एक साथ चिल्ला पड़े।

बच्चे : नहीं, मैडम।

शिक्षिका : क्या इसका मतलब यह हुआ कि बन्द आकृति के लिए हमें कम से कम तीन तीलियाँ चाहिए?

बच्चे : जी हाँ, मैडम।

बच्चे प्रसन्न और उत्साहित नज़र आ रहे थे। वे सब धागे से और आकृतियाँ बनाना चाहते थे। शिक्षिका ने हर टोली को धागे का टुकड़ा दे दिया और आकृतियाँ बनाने के लिए छोड़ दिया।

बच्चों को तिकोन, चतुर्भुज, पंचभुज, षट्कोण, अष्टभुज आदि से सभी परिचित कराया जाना चाहिए जब वे सीधे कोर वाली बन्द आकृतियों की अवधारणा से भली-भाँति परिचित हो जाएं। कहने की जरूरत नहीं कि उक्त आकृतियों से परिचित कराते वक्त उनके नामों का बोझ उन पर नहीं डाला जाना चाहिए। यह काम साकार चीज़ों के माध्यम से ही करना चाहिए। जरूरी नहीं कि उन्हें हर आकृति सिखाई जाए। हम उन्हें अलग-अलग या एक समान लम्बाई की तीलियाँ, रंग-बिरंगी स्ट्रॉ, माचिस की तीलियाँ, तार के सीधे टुकड़े आदि देकर कह सकते हैं कि वे उनसे मनचाही बन्द आकृतियाँ बनाएं। इनके सिरों को गोद से जोड़ा जा सकता है। तीलियों को तो वे एक कार्डबोर्ड पर भी चिपका सकते हैं।

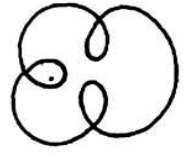
E3) आप निम्नलिखित को दिखाने के लिए किस प्रकार की गतिविधियाँ सोच सकते हैं :

- i) किसी खुली आकृति/बन्द आकृति के सीधे कोर भी हो सकते हैं, गैर सीधे भी या फिर दोनों भी।
- ii) सीधे कोर वाली खुली आकृति के कितने भी कोर हो सकते हैं।
- iii) सीधे कोर वाली आकृति तभी बन्द आकृति बन सकती है जब उसके कम से कम तीन कोर हों।
- iv) किसी भी बन्द आकृति का एक अन्दर का भाग और एक बाहर का भाग होता है जिन्हें क्रमशः अन्तर्भाग व बहिर्भाग कहते हैं।

कई बच्चे और वयस्क भी यह निश्चित रूप से तय नहीं कर पाते कि  जैसी आकृति बन्द है या खुली। उनका मत होता है कि आकृति का एक हिस्सा बन्द है हालांकि आकृति बन्द नज़र नहीं आती। यही

स्थिति  आकृति के साथ भी होती है।

- E4) आपके ख्याल से इस गलतफहमी को दूर करने के लिए क्या करना चाहिए ? आइए देखें कि कक्षा 4 की एक शिक्षिका ने इसे कैसे समझाया।

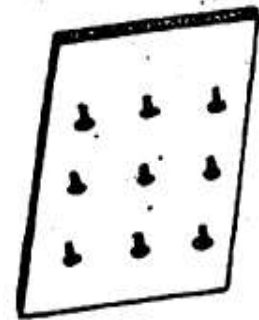


चित्र 4 : एक बन्द आकृति

शिक्षिका ने कागज़ पर एक बन्द आकृति बनाई। उन्होंने दिखाया कि इस आकृति के किसी भी बिन्दु से, किसी भी दिशा में पेंसिल चलाना शुरू करें तो हम आकृति के किसी भी हिस्से पर दोबारा चले बगैर वापिस शुरूआती बिन्दु पर पहुंच जाते हैं। यदि किसी भी आकृति के किसी भी बिन्दु से किसी भी दिशा में चलते हुए यह सम्भव हो कि हम आकृति के किसी भी हिस्से पर एक से अधिक बार चले बगैर वापिस मूल बिन्दु पर पहुंच सकें, तो वह बन्द आकृति है। यह समझाने के बाद उन्होंने  यह आकृति बनाई। बच्चों ने देखा कि वे वापिस शुरूआती बिन्दु पर नहीं पहुंच सकते। यानी यह बन्द आकृति नहीं है। फिर उन्होंने एक आकृति बनाई (चित्र 4) जिसकी रेखा एक-दूसरे को काटती थीं। अब उन्होंने बच्चों से पूछा? कि क्या यह एक बन्द आकृति है? उन्होंने बच्चों से एक पेंसिल की मदद से यह पता करने को कहा कि क्या वे पेंसिल को आकृति पर फेरते हुए शुरूआती बिन्दु पर पहुंच सकते हैं। बच्चों ने करके देखा कि यह सम्भव है। यानी यह एक बन्द आकृति है। इसी तरह उन्होंने 2-3 अन्य आकृतियां बनाकर बच्चों से कहा कि वे इनमें खुली/बन्द आकृतियां पहचानें। अन्ततः जब शिक्षिका संतुष्ट हो गई, तब उन्होंने बच्चों को घर पर करने के लिए कुछ और सवाल दिए।

- E5) जियो बोर्ड लकड़ी का एक आयाताकार चौखटा होता है। जिस पर बराबर दूरी पर कीलें लगी होती हैं (चित्र 5)। जियो बोर्ड, रबर बैंड या धागे का इस्तेमाल करके बच्चों को खुली व बन्द आकृति सिखाने के लिए आप किस तरह की गतिविधियाँ आयोजित कर सकते हैं?

जियो बोर्ड बहुत ही उपयोगी उपकरण है। इसका उपयोग बच्चों को त्रिकोण, वर्ग, आयत जैसी ज्यामितीय आकृतियां दिखाने के लिए भी किया जा सकता है। वर्ग और आयत के बीच का अन्तर, भी जियो बोर्ड की मदद से दर्शाया जा सकता है। जियो बोर्ड तो ज़मीन पर भी आसानी से बनाया जा सकता है। इसके लिए चित्र 5 में दिखाए अनुसार ज़मीन पर एक आयताकार क्षेत्र चिह्नित करके उसमें 9 या 16 या उससे भी ज्यादा बराबर आकार की टहनियां/तीलियां लगाई जा सकती हैं।



चित्र 5 : जियो बोर्ड

राम के साथ सम्पर्क के दौरान मुझे यह समझ आया कि पारम्परिक कक्षा पद्धति से पढ़ाए जाने पर छोटे बच्चे ज्यामिती की मूलभूत अवधारणाएं आम तौर पर नहीं समझ पाते हैं। इसके कई कारण हो सकते हैं कि इन अवधारणाओं के लिए जरूरी पूर्व जानकारी बच्चों के पास नहीं होती। हो सकता है कि उन्हें जाने-पहचाने प्रयोगों के ज़रिए नई अवधारणाओं को समझने का मौका ही नहीं मिलता। हो सकता है कि शिक्षक मानकर चलते हों कि ये अवधारणाएं बहुत ही आसान हैं तथा समझाने की जरूरत ही नहीं है क्योंकि बच्चों के दिमाग में इनके बारे में सहज विचार तो हैं ही। कभी-कभी ऐसा भी होता है कि कोई अवधारणा बच्चों के लिए बहुत अमूर्त होती है। और शिक्षक इसे सिखाने के लिए कोई उचित विधि का प्रयोग नहीं कर पाते। समतल व असमतल सतह की अवधारणा ऐसी ही एक अवधारणा है। अब हम इसी पर बात करेंगे।

समतल सतह

मैं यह पता लगाना चाहती थी कि कक्षा में पारंपरिक ढंग से ऐसी अवधारणाएं कैसे पढ़ाई जाती हैं। अगले दिन मुझे प्राथमिक स्कूल के शिक्षकों के एक समूह से बातचीत का मौका मिला। ये लोग गणित के एक प्रशिक्षण कार्यक्रम में भाग ले रहे थे। मैंने सोचा कि इनके साथ ज्यामिती की मूलभूत अवधारणाएं सिखाने के तरीकों पर

चर्चा की जाए। प्रशिक्षण कार्यक्रम में भाग ले रहे अधिकतर शिक्षक काफी अनुभवी थे और सक्रिय दिखते थे।

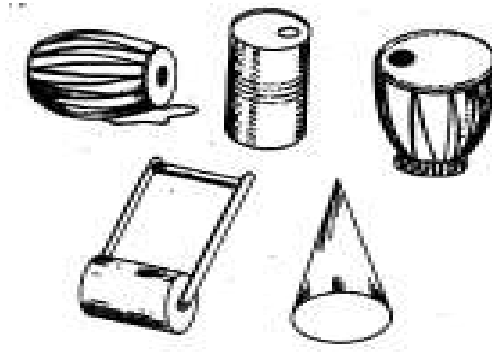
शिक्षकों को दो टोलियों में बांट दिया गया और उनसे समतल व असमतल सतहों की अवधारणा पढ़ाने की विधियों पर विचार-विमर्श करने को कहा गया। हर टोली के नेता को टोली द्वारा चर्चित विधियों का प्रस्तुतीकरण करना था। कमरा तर्क-वितर्क के शोरगुल और जोश से भर गया। मैं उन्हें गम्भीरता से विचार-विमर्श में डूबा देख रही थी। एक घण्टे बाद वे फिर से इकट्ठे हुए, अपने निष्कर्षों का प्रस्तुतीकरण करने को।

पहली टोली को पहले अपना परचा प्रस्तुत करने को आमंत्रित किया गया। इस टोली के अनुसार, छोटे बच्चे सोचते हैं कि हर चिकनी सतह समतल सतह होती है। उनके लिए तो अण्डे की सतह, गेंद की सतह या किसी बेलनाकार पात्र की सतह, सब सपाट सतहें हैं। कई बच्चों के लिए तो समतल और असमतल सतह का मतलब चिकनी व खुरदरी सतह से होता है। टोली का मत था कि इस समस्या से निपटने के लिए यह किया जा सकता है कि बच्चों की आंखों पर पट्टी बांधकर उन्हें हाथों से कुछ चिकनी व कुछ खुरदरी चीज़ें महसूस करने को दी जाए ताकि वे यह समझ सकें कि समतल व असमतल सतह की अवधारणा इनसे अलग है। उन्हें एक अण्डे और एक संतरा की सतह को छूकर अन्तर महसूस करने दें। उनसे इस बात पर भी चर्चा की जा सकती है कि क्यों लकड़ी का बेलनाकार टुकड़ा (गिट्टा) कांच पर तो दूर तक लुढ़कता है मगर सीमेंट के फर्श पर कम दूर लुढ़कता है।

समतल व असमतल सतहों के बीच भेद समझाने के लिए बच्चों को किसी मेज, ब्लैक बोर्ड, फर्श या दीवार का निरीक्षण करने को कहा जा सकता है। इसके बाद शिक्षक उन्हें बता सकते हैं कि ये सभी सपाट सतहें हैं और इन पर कोई मोड़ या घुमाव नहीं है। इन सतहों को समतल सतह कहा जाता है। फिर उन्हें गेंद, अण्डे या किसी बेलनाकार पात्र की सतह में यह दिखाया जा सकता है कि ये मुड़ी हुई या वक्रता लिए हुए हैं। अतः ये असमतल सतहें हैं।

E6) क्या आपने कभी यह जांचने की कोशिश की है कि कक्षा 4 के बच्चे समतल तथा असमतल सतहों के बीच भेद कर पाते हैं या नहीं? इस गतिविधि को 9 या 10 वर्षीय बच्चे के साथ आजमाकर इसकी सार्थकता की जांच कीजिए।

दूसरे दल का सुझाव था कि शिक्षक बच्चों से माचिस, कंचे, पांसे, पोस्टकार्ड, ग्लोब, गेंद जैसी कई चीज़ें लाने को कह सकते हैं। शिक्षक कक्षा में आसानी से उपलब्ध कुछ चीज़ें भी जुटा सकते हैं, जैसे पैन, पेंसिल किताब, पेंसिल बॉक्स वगैरह। बेहतर यह होगा कि छोटी-बड़ी चिकनी-खुरदरी, समतल-असमतल हर तरह की चीज़ें बच्चों के सामने हों। अब शिक्षक बच्चों के सामने इन चीज़ों को दो समूहों में बांटना शुरू करें। जैसे शिक्षक पोस्ट कार्ड हाथ में लेकर जाहिर रूप से उसकी सतह को महसूस करे, जबकि बच्चे उन्हें ऐसा करते देख सकें। शिक्षक थोड़ी देर सोचने का बहाना करके पोस्टकार्ड को दाईं ओर रख दें। इस तरह से वे एकाध समतल चीज़ें और उठाए और उन्हें दाईं ओर रख दें। फिर वे गेंद को उठाकर उसकी सतह को दोनों हाथों से महसूस करें ताकि बच्चों को यह नज़र आ जाए कि उसकी सतह गोल है और फिर उसे बाईं ओर रख दें। इसके बाद शिक्षक बच्चों से कहें कि वे चीज़ों को उठाएं और उन्हें समतल व असमतल (या गोलीय) चीज़ों के रूप में अलग-अलग करें। अब वे बच्चों से यह बताने को कह सकते हैं कि उन्होंने किसी चीज़ को किसी खास समूह में क्यों रखा है। वे उन्हें यह भी दिखा सकते हैं कि दोनों ही समूहों में बड़ी व छोटी, चिकनी व खुरदरी चीज़ें हैं। समूहीकरण का एकमात्र आधार समतल और असमतल सतह है। इस तरह की चर्चा से बच्चों को यह समझने में मदद मिलेगी कि समतल सतह क्या होती है तथा गोलाई वाली सतह क्या होती है। बच्चों को ऐसी चीज़ों का निरीक्षण करने को कहा जा सकता है जिनमें समतल व गोलाईदार दोनों तरह की सतह होती है। ढोलक, तबला, तेल का डिब्बा आदि चीज़ों में समतल व असमतल दोनों तरह की सतहें होती हैं। (देखें चित्र 6)।



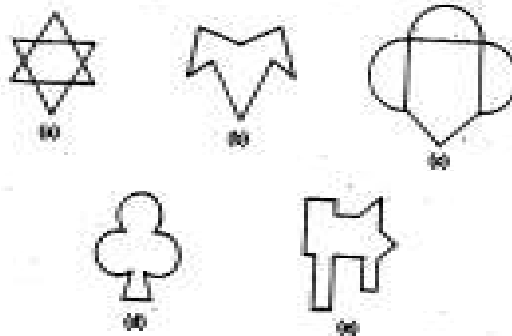
चित्र 6

- E7) क) 'समतल सतह' पढ़ाने की जिन दो विधियों पर हमने ऊपर चर्चा की, उनकी क्या खामियां हैं?
- ख) समतल सतह की अवधारणा को सीखने के लिए एक और ऐसी गतिविधि सुझाइए जिसे 50 बच्चों की एक कक्षा में किया जा सके।

'सम आकृति' और असम आकृति एक और ऐसा विषय है जिसके बारे में अधिकांश बच्चों तथा कुछ शिक्षकों में भी गलतफहमी होती है। आइए, इस अवधारणा को स्पष्ट करने के कुछ तरीकों पर विचार करें।

सम आकृतियां

कुछ शिक्षकों का मत है कि मात्र बहुभुज तथा वृत्त ही सम आकृतियां होती हैं। कुछ अन्य शिक्षक मानते हैं कि इन आकृतियों के मेल से बनी आकृतियां भी सम होती हैं। वास्तव में 10-11 वर्षीय बच्चों को सम व असमाकृतियों में भेद करने में कठिनाई होती है। इस बात को लेकर आम तौर पर दुविधा व्यक्त की जाती है कि निम्नलिखित आकृतियां सम हैं या नहीं (देखें चित्र 7)।



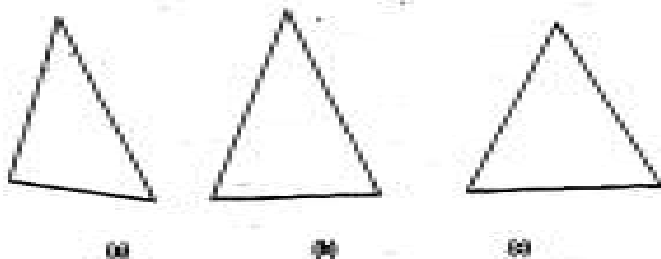
चित्र 7

- E8) आपका इन चित्रों के बारे में क्या विचार है?

इन अवधारणाओं में दक्षता हासिल करना बच्चों के लिए सचमुच मुश्किल होता है। बच्चों को सम और असमाकृतियों के बीच अंतर समझाने के लिए आप अपने पड़ोस के 10 वर्षीय बच्चों या अपने स्कूल की चौथी कक्षा के बच्चों के साथ एक गतिविधि कर सकते हैं। गतिविधि शुरू करने से पहले यह सुनिश्चित कर लें कि बच्चे तिकोन, चतुर्भुज तथा वृत्त पहचानते हों। वे उनको पहचानकर उनका नाम भी बता सकते हों। शुरूआत आप समतल बन्द आकृतियों से कर सकते हैं। कुछ तीलियां तथा कागज के कटे तिकोन, चतुर्भुज, वृत्त तथा अर्ध वृत्त इकट्ठे कर लीजिए। बच्चों को उनको पहचानने दें तथा उनके कोनों तथा कोनों की संख्या गिन लेने दें। उन्हें

यह बताया जा सकता है कि ये सम आकृतियां हैं। शुरुआत आप सीधे कोरों वाली बन्द आकृतियों से कर सकते हैं। बातचीत की शुरुआत तिकोन से हो सकती है। बच्चों को विभिन्न तिकोनों (चित्र 8) का निरीक्षण करने को कहें। उन्हें देखकर वे कह सकें कि ये सभी सम आकृतियां हैं।

एक बार वे सम आकृतियों से परिचित हो जाएं, तो उन्हें विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज और तिकोन दिखाए जा सकते हैं। इसके लिए अलग-अलग लम्बाई की तीलियां जुटा सकते हैं। बच्चों से कहें कि वे निम्नानुसार तीलियों के तिकोन बनाएं,

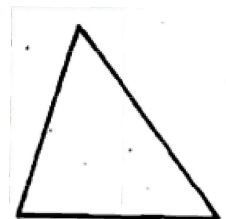


चित्र 8

- 1) जिसमें सारी तीलियां एक लम्बाई की हों
- 2) दो तीलियां एक ही लम्बाई की हों
- 3) तीनों तीलियां अलग – अलग लम्बाई की हों।

आप उन्हें यह सुझा सकते हैं कि वैसे तो ये सारे तिकोन ही हैं मगर आकारों की लम्बाई के आधार पर इनके बीच भेद करने के लिए इन्हें अलग-अलग नाम देना जरूरी है। अब आप उनका परिचय समबाहु, समद्विबाहु और विषमबाहु तिकोन से करा सकते हैं।

अक्सर देखा गया है कि बच्चों के मन में कई शब्दों के अर्थ को लेकर गलतफहमी होती है। मसलन कई बच्चों के लिए तिकोन केवल वही आकृति है जो समबाहु हो। इसके अलावा कई बार बच्चे आकृति की स्थिति को लेकर भी भ्रमित हो जाते हैं। मसलन यदि किसी तिकोन की एक भुजा उस कागज जिस पर वो काम कर रहे हैं के निचले किनारे के समान्तर न हो, तो कई बार वे उसे तिकोन के रूप में पहचान ही नहीं पाते (चित्र 9)।



चित्र 9

बच्चों को ये अवधारणाएं समझाने के लिए उन्हें काफी अभ्यास का मौका दिया जाना चाहिए। शिक्षक विभिन्न आकार की तीलियों का इस्तेमाल करके कई तरह के तिकोन बनाकर बच्चों से उन्हें पहचानने को कह सकते हैं।

इसके अलावा बच्चों को यह मौका भी मिलना चाहिए कि वे शिक्षक द्वारा सुझाए गए तिकोन को बनाने के लिए सही तीलियां चुन सकें। उन्हें ऐसे तिकोनों को नाम देने में भी समर्थ हो जाना चाहिए जो ज्ञात लम्बाई की तीलियां लेकर बच्चों से पूछें कि "इनसे मैं किस किस का तिकोन बना सकती हूँ? या क्या मैं इनसे एक समबाहु तिकोन बना सकती हूँ? या क्या मैं इनसे एक समकोण तिकोन बना पाऊंगी?" वगैरह। बच्चों को विभिन्न तिकोनों से परिचित कराते वक्त एक महत्वपूर्ण बात सुनिश्चित करना जरूरी है। बच्चों को यह अवश्य पता होना चाहिए कि किसी भी लम्बाई की तीन तीलियों से तिकोन बने यह जरूरी नहीं होता। यह आवश्यक है कि किन्हीं भी दो तीलियों की लम्बाई का जोड़ तीसरी तीली की लम्बाई से ज्यादा होना चाहिए। यह आवश्यकता पूरी होगी तभी तिकोन बनेगा।

E9) 'किसी भी लम्बाई की तीन तीलियों से तिकोन नहीं बनाया जा सकता।' बच्चों को यह अवधारणा समझाने के लिए एक गतिविधि बताइए।

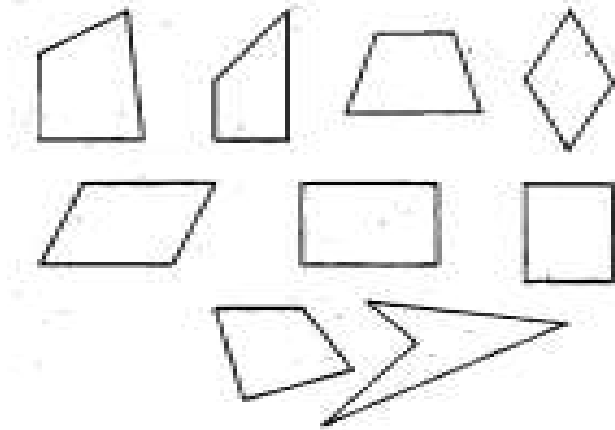
तिकोन से परिचित कराने के बाद आप इसी तरह बच्चों का परिचय चतुर्भुज से करा सकते हैं। बच्चों को विभिन्न किस्म के चतुर्भुजों का अवलोकन व विश्लेषण करने का अवसर देने के लिए टोलियों में या फिर पूरी कक्षा के साथ इकट्ठे गतिविधियां की जा सकती हैं। परन्तु ज्यामिती में बच्चों की सोच के स्तर अलग-अलग होते हैं। जरूरत इस बात की है कि बच्चों को बच्चों के स्तर पर सम्बोधित किया जाए। जरा कल्पना कीजिए वह स्थिति जबकि बच्चे तो n स्तर के हैं और शिक्षक इन्हें $n+2$ स्तर पर पढ़ा रहे हैं। स्तर के इस अंतर की वजह से होगा यह कि शिक्षक की अपेक्षाओं और वह स्तर जिस पर बच्चे सीखने को तैयार हैं कि बीच खाई रहेगी। नतीजा होगा कि बच्चे भ्रमित होंगे और शिक्षक उनके घटिया प्रदर्शन से हताश हो जाएंगे। अतः शिक्षण गतिविधियां बच्चों के स्तर पर होनी जरूरी है। यहाँ हम कक्षा 4 के बच्चों के लिए एक गतिविधि सुझा रहे हैं।

E10) अपनी कक्षा में सम-असम आकृतियों पर थोड़ी चर्चा करवाने के बाद कुछ आकृतियां बोर्ड पर बनायें और बच्चों को उन्हें अलग-अलग करने को कहें व चर्चा करें।

उदाहरण 3 : 4 अलग-अलग लम्बाइयों की 50 तीलियां इकट्ठी कर लें। इन्हें 4 ढेरियों में रख दें। हर ढेरी में एक ही लम्बाई की तीलियां हों। बच्चे आपके निर्देश के अनुसार अपनी पसन्द की चार तीलियां उठा लें।

- 1) एक ही ढेरी में से एक ही लम्बाई की चार तीलियां।
- 2) एक ढेरी में से 2 तथा दूसरी ढेरी में से 2 तीलियां।
- 3) एक ढेरी में से 3 तथा दूसरी में से 1 तीली।
- 4) प्रत्येक ढेरी में से 1 – 1 तीली।

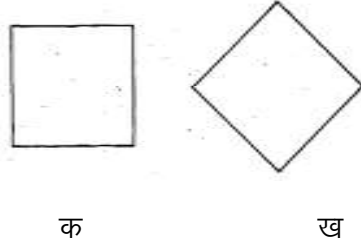
अब उनसे कहिए कि वे अपनी खपच्चियों को फर्श पर सजाकर चौकोर आकृति बनाएं। उनके द्वारा बनाई गई आकृति चित्र 10 की किसी आकृति के समान हो सकती है।



चित्र 10

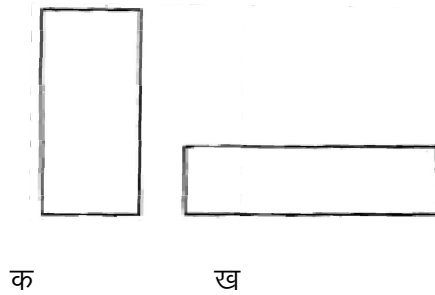
बच्चों को पहले इन आकृतियों को अच्छी तरह से देखने दीजिए। फिर उनसे यह पूछ सकते हैं कि वे आकृतियों के कोरों के आधार पर उनके अन्तरों को स्पष्ट करें। यदि वे न कर पाएं तो आप कुछ प्रश्न पूछ कर उनकी मदद कर सकते हैं। जैसे कि प्रत्येक आकृति में कितने किनारे हैं, कितने छोर हैं, वगैरह। जैसे तिकोन में किया था उसी प्रकार चतुर्भुज के भी विभिन्न नाम बताए जा सकते हैं, मसलन आयत, वर्ग, समान्तर समलम्ब

चतुर्भुज वगैरह। इस बिन्दु पर चर्चा को कोरों की लम्बाई के आधार तक सीमित रखा जा सकता है। समान्तर रेखा या कोणों की बराबरी के आधार को इस वक्त छोड़ा जा सकता है। परन्तु एक सावधानी जरूर बरतनी होगी। कई बार बच्चे किसी आकृति को सिर्फ इसलिए वर्ग कह देते हैं क्योंकि वह वर्ग सी दिखती है। (चित्र 11 क)। इसी प्रकार से कई बार वे (चित्र 11 ख) जैसी आकृति को सिर्फ इसलिए वर्ग नहीं कहते क्योंकि यह वर्ग जैसी दिखती नहीं।



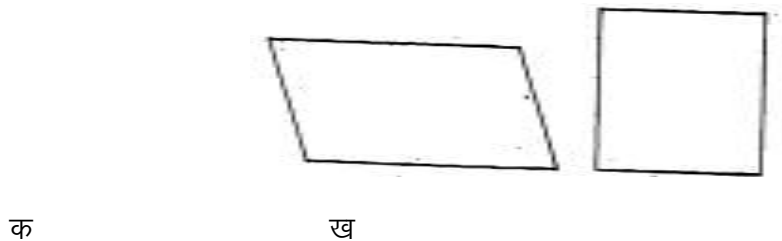
चित्र 11

इसी प्रकार कई बच्चे चित्र 12 (क) जैसी आकृति को आयत नहीं मानते क्योंकि उनके विचार में आयत चपटा, लम्बा होता है मगर बहुत चौड़ा नहीं होता। वे चित्र 12 (ख) को आयत मानने से इन्कार कर देते हैं क्योंकि यह 'बहुत पतला' है या क्योंकि वे आयत को वर्ग से लगभग दुगुने आकार का मानते हैं।



चित्र 12

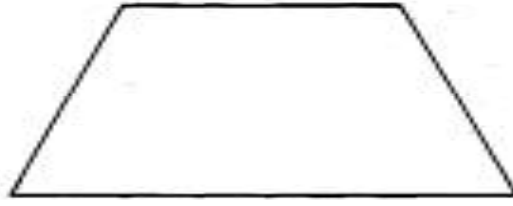
इसी प्रकार से कई बच्चे गैर-समकोण समान्तर चतुर्भुज (चित्र 13 क) को आयत मानते हैं और वर्ग (चित्र 13 ख) को आयत नहीं मानते।



चित्र 13.

आप यह दर्शा सकते हैं कि कैसे उन्ही चार खपच्चियों को अलग-अलग स्थितियों में रखकर विभिन्न चतुर्भुज आकृतियां बनाई जा सकती है। बच्चों को काफी अनुभव प्राप्त करने दें ताकि वे नए विचारों से भली भांति परिचित हो जाएं किसी आकृति को दिखाकर उसका नाम बताना या किसी आकृति की नकल उतार कर उसे नाम देने से बच्चों का शब्द भण्डार विकसित होगा और उन्हें आकृतियों के विभिन्न हिस्सों के बीच परस्पर देखने में मदद मिलेगी। मसलन समान्तर चतुर्भुज की आमने सामने की भुजाओं की लम्बाई बराबर होती हैं। इसी प्रकार

से समलम्ब बनाने के लिए दो तीलियों को एक-दूसरे के सामने इस प्रकार रखें कि हर बिन्दु पर उनके आपस की दूरी एक समान हो। बच्चों को यह पता करने दें कि चतुर्भुज के ये परस्पर समदूरस्थ कोर हैं। अब पहली दो तीलियों के सिरों को जोड़ती हुई दो और तीलियां इस तरह रखें कि चतुर्भुज बन जाए (देखें चित्र 14)।



चित्र 14 : समलम्ब चतुर्भुज

अब समदूरस्थ तीलियों में से किसी एक ही स्थिति बदल दें और बच्चों को देखने दें कि अब यह आकृति समलम्ब नहीं रही। इसी प्रकार से सभी आकृतियों की विशेषताओं का परिचय दीजिए ताकि बच्चे हर आकृति और उसके खास गुण को पहचान सकें जैसे कि :

1. चार किनारे वाली सभी आकृतियां चतुर्भुज हैं।
2. चतुर्भुज की चारों भुजाएँ अलग-अलग लम्बाई की भी हो सकती है और समान लम्बाई की भी हो सकती हैं।
3. समलम्ब में एक जोड़ी भुजाएं समदूरस्थ होती हैं।
4. समान्तर चतुर्भुज में आमने-सामने की भुजाएं बराबर लम्बाई की होती हैं।
5. हर समान्तर चतुर्भुज समलम्ब चतुर्भुज होता है।
6. हर आयत समान्तर चतुर्भुज भी होता है।
7. हर वर्ग एक समान्तर चतुर्भुज भी होता है और आयत भी होता है।

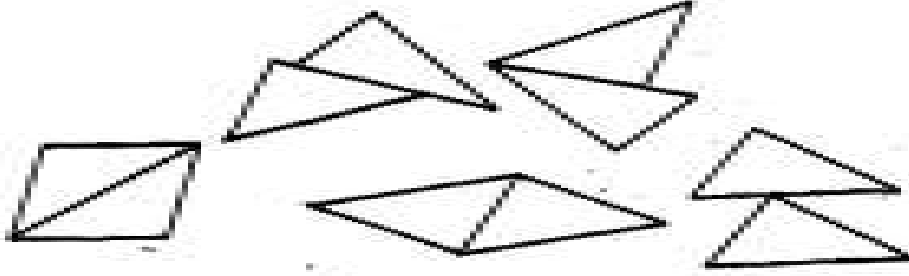
E11) वर्ग आयत भी होता है यह आप बच्चों को कैसे समझाएंगे?

कक्षा में कुछ आसान गतिविधियां भी आयोजित की जा सकती हैं। बच्चों को 4-5 टोलियों में बांट दीजिए। हर टोली को तीलियों से बना समान्तर चतुर्भुज दे दीजिए। बच्चों से कहिए कि वे सिर्फ कोनों को हिला डुलाकर समान्तर चतुर्भुज को आयत में बदलें। फिर उनसे पूछिए कि क्या समान्तर चतुर्भुज को वर्ग में बदला जा सकता है? क्या वर्ग आयत भी होता है? आदि। इससे उन्हें दोनों के बीच का अन्तर पहचानने में मदद मिलेगी।

E12) कक्षा में की जाने वाली एक ऐसी गतिविधि सुझाइए जिसमें हर टोली को यह पता करना हो कि उन्हें दिए गए चतुर्भुज के समान दिखने वाली कौन-कौन सी चीजे कक्षा में या उनके आस-पास उपलब्ध हैं।

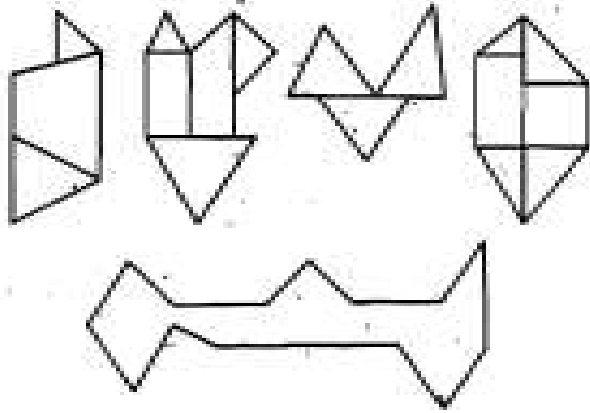
जब एक बार बच्चे वर्ग, आयत, त्रिकोण वगैरह जैसी आधारीय आकृतियों से भलीभांति परिचित हो जाएँ और यह समझ जाएँ कि ये सभी सीधे कोरों वाली सम आकृतियाँ हैं, तब उन्हें इन आकृतियों को जोड़कर नई आकृतियाँ बनाने को कहा जा सकता है। उनकी मदद के लिए निम्नलिखित गतिविधि की जा सकती है।

उदाहरण 4 : गत्ते, चमकीले या साधारण कागज के कुछ त्रिकोण इकट्ठे कर लें। बच्चों से कहिए कि वे दो त्रिकानों को जोड़कर, नई-नई डिज़ाइन बनाएं, पर ध्यान रहे कि त्रिकोण एक – दूसरे को ढँकें नहीं। उनकी डिज़ाइन निम्नानुसार दिख सकती हैं। (चित्र 15)।



चित्र 15

सम आकृतियों के मेल से बनी इन आकृतियों को नाम देने में बच्चों को कठिनाई होती है क्योंकि ये डिज़ाइन उनकी जानी-पहचानी नहीं होती। आप उन्हें यह बता सकते हैं कि सारी आकृतियाँ भी सम हैं। इसके बाद उन्हें मौका दीजिए कि कई सारे त्रिकोण या चतुर्भुजों को जोड़-जोड़ कर नई-नई डिज़ाइन बनाएं जिसमें हर डिज़ाइन एक सम आकृति हो। आप खुद भी कई सारे त्रिकोण-चतुर्भुज जोड़कर एक सम आकृति बनाएं, जैसी चित्र-16 में दिखाई गई हैं।

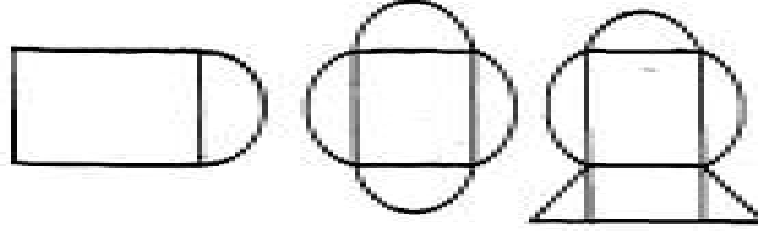


चित्र 16

बच्चों से कहें कि वे तीलियों की मदद से विभाजन रेखाएं खींचकर इन आकृतियों को परिचित आकृतियों में बांटे। वे गिनें कि हर आकृति में से कितने त्रिकोण, कितने चतुर्भुज निकलते हैं। ऐसी कई अन्य आकृतियाँ बनाकर बच्चों से उन्हें परिचित आकृतियों में बांटने और काटने को कहा जा सकता है। कटे हुए टुकड़े को वे फिर से नए ढंग से जोड़कर नई आकृतियाँ बना सकते हैं। ऐसी गतिविधियों से बच्चों को समकोण तथा समांतरता की धारणा विकसित करने में मदद मिलती है। ये गतिविधियाँ बच्चों की स्थान सोच के विकास में भी अहम भूमिका अदा करती हैं।

E13) आप किसी 10–11 वर्षीय बच्चे को सम आकृति की अवधारणा से कैसे परिचित कराएंगे? इसके लिए आप क्या गतिविधि करेंगे?

सीधे कोरों वाली सम आकृतियों से परिचय के बाद बच्चों से तिकोन–चतुर्भुज के साथ–साथ वृत्त या वृत्त के हिस्सों को भी जोड़कर डिज़ाइन बनाने को कहा जा सकता है। इनको आपस में जोड़कर वे चित्र 17 में दिखाए अनुसार आकृतियां भी बना सकते हैं। बच्चों को यह बताया जा सकता है कि ये सभी सम आकृतियां हैं।



चित्र 17

अब तक बच्चे शायद सोचने लगेंगे कि फिर असमाकृतियां कौन सी होती हैं। कुछ सवाल पूछकर आप उन्हें खुद ही यह समझने में मदद कर सकते हैं। उनसे यह पूछा जा सकता है कि क्या हर डिज़ाइन को तिकोन, चतुर्भुज और वृत्त के हिस्सों जैसी परिचित आकृतियों में बांटा जा सकता है?

E14) आपके अन्दाज से उनका उत्तर क्या होगा? यदि वे हां कह देते हैं, तो आप कैसे उन्हें समझाएंगे कि उनका जवाब गलत है? कोई गतिविधि सोचिए।

गतिविधि जिससे बच्चों को यह समझने में मदद मिलेगी कि सारी आकृतियां सम नहीं होती।

उदाहरण 5 : एक बर्तन में पानी लीजिए और पानी को फर्श या दीवार पर जोर से फेंकिए। बच्चों को पानी से बनी डिज़ाइन देखने दीजिए। उन्हें पता करने दीजिए कि क्या वे इस डिज़ाइन को तीलियों की मदद से परिचित आकृतियों में बांट सकते हैं जैसा कि वे पहले करते आए हैं। आकृति शायद चित्र 18 जैसी दिखे।



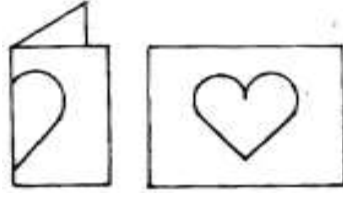
चित्र 18

बच्चे देखेंगे कि इन आकृति के कोर न तो सीधे ही हैं ओर न ही वृत्त के हिस्से हैं। आप कागज पर स्याही छिड़ककर भी डिज़ाइन बनाकर उन्हें दिखा सकते हैं उन्हें यह समझने का अवसर दें कि ऐसी आकृतियों को तिकोन, चतुर्भुज, वृत्त के हिस्सों जैसी परिचित आकृतियों में नहीं बांटा जा सकता। ऐसी आकृतियाँ सम नहीं होती इसलिए इन्हें असमाकृति कहा जाता है। आप बच्चों को आकाश में बादलों से बनी डिज़ाइन दिखाकर भी पूछ सकते हैं कि वे सम हैं या असम। इन आसान गतिविधियों से बच्चों को सम व असमाकृतियों में फर्क करने में मदद मिलेगी।

E15) 50 बच्चों की कक्षा के लिए उपयुक्त एक ऐसी गतिविधि सुझाइए जिससे यह पता लग सके कि बच्चे सम–असमाकृति का अन्तर समझे हैं या नहीं।

एक कागज को इस तरह मोड़िए कि उसके आमने–सामने के सिरे आपस में मिल जाएं। मोड़ को अच्छे से दबा दीजिए। इस मुड़े हुए कागज में से एक टुकड़ा इस तरह काटिए कि मोड़ की रेखा का कुछ हिस्सा उसमें शामिल रहे। (चित्र 19) काटी गई आकृति सममित होगी। मोड़ की रेखा इस आकृति को दो बराबर भागों में बांटेगी है तथा इसे उस आकृति की सममिति अक्ष कहते हैं। सममित अक्ष किसी भी समतल आकृति को दो सर्वांगसम भागों

में बांटता है। हम इन्हे सर्वांगसम इसलिए कहते हैं क्योंकि ये पूरी तरह एकरूप नहीं होते। ये एक दूसरे के प्रतिबिम्ब होते हैं। एक भाग की बाईं रूपरेखा दूसरे भाग की दाईं रूपरेखा से मेल खाती है।



चित्र 19



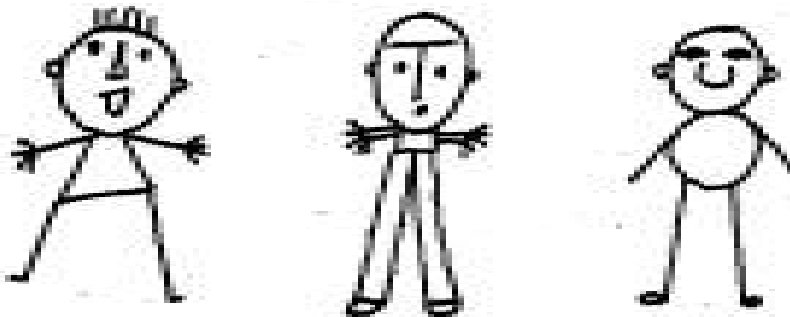
क ख ग घ

चित्र 20

बच्चे यह मानने में शायद थोड़ा झिझकेंगे कि (क) और (ख) या (ग) और (घ) परस्पर सर्वांगसम हैं। अक्षर d और b एक-दूसरे के प्रतिबिम्ब हैं मगर बच्चों को तो शुरू से सावधानी—पूर्वक इन्हे अलग-अलग देखना सिखाया जाता है। तो प्रतिबिम्ब को कैसे यकीन दिलाएं? अगले भाग में सममित चीजों के बारे में चर्चा करते हुए इस सवाल का जबाब देने की कोशिश करेंगे।

सममित आकृतियां

सममित चीजें बचपन से ही नन्हें दिमागों को आकर्षित करती हैं। यदि चीज रंगीन हो, तो बड़ों को भी मोहित करती है। बच्चे बहुत कम उम्र में ही सममिति की अवधारणा विकसित कर लेते हैं और उनके चित्रों में इसकी झलक देखी जा सकती है। किसी बच्चे द्वारा बनाई गई मानव आकृति सममिति प्रदर्शित करती हैं (चित्र 21)।



चित्र 21

किसी चित्र में सममिति है यह तब कहा जा सकता है जब चित्र को, उसी के तल में खींची गई कोई रेखा दो बराबर हिस्सों में बांट दे और जब चित्र को इस रेखा से मोड़ा जाए तो चित्र के दो अर्धांश हर प्रकार से एक-दूसरे से मेल खाएं। इस रेखा को चित्र का सममिती-अक्ष कहा जाता है।

बच्चों के लिए सममिति का अध्ययन बहुत आसान और दिलचस्प होता है क्योंकि प्रकृति में इसके कई उदाहरण मिलते हैं। सममित आकृतियों का अध्ययन करने में उन्हें सबसे ज्यादा दिक्कत वह रेखा पता लगाने में आती है जिसके सापेक्ष वह आकृति सममित है। प्राइमरी कक्षा के 6-7 वर्षीय बच्चे को भी सममित चित्र बनाने में मज़ा आता है, हालांकि उसे इनके गुण पता नहीं होते। यहां मैं एक गतिविधि बता रही हूँ जो राम तब कर रहा था, जब मैं उसके घर गई थी।

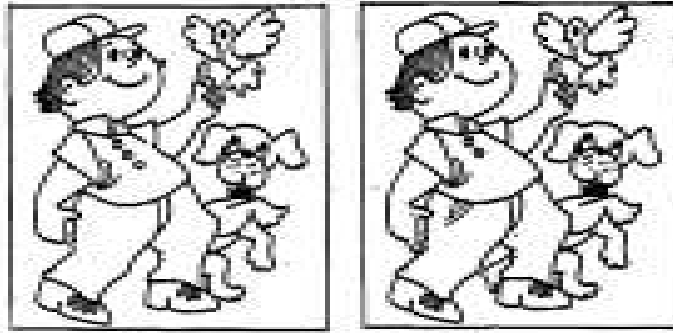
उदाहरण 6 : राम के पास एक स्याही की बोतल और एक धागा था। उसने धागे को स्याही में डुबोकर उसे अपनी नोट बुक में रख दिया। फिर उसने नोट बुक को बन्द करके दबा दिया। अब उसने नोट बुक खोली और धागे को धीरे-धीरे उठा लिया। उसने मुझे नोटबुक में बना वह डिज़ाइन दिखाया।

राम : देखो, दोनों पन्नों पर कैसा अच्छा डिज़ाइन बन गया है। ऐसा डिज़ाइन हाथ से बनाना कितना मुश्किल होगा ना ? उस दिन आपने कहा था कि मैं यहां जो कुछ करता हूँ वह सब स्कूल का ही पाठ होता है। अब बताओ इससे मुझे कक्षा में सीखे पाठ में क्या मदद मिलेगी?

उसे उम्मीद थी कि मैं नकारात्मक जवाब दूंगी। यह तो जाहिर था कि उसने सममित डिज़ाइनों के बारे में कुछ नहीं पढ़ा था।

मैं : जवाब देने से पहले मैं तुमसे एक सवाल पूछूंगी। परन्तु मेरे कुछ कहने से पहले ही राम बोल पड़ा।

उसने वह पत्रिका मेरी ओर बढ़ा दी। पृष्ठ खोलने पर मुझे उसी पन्ने पर एक ओर पहेली दिख गई। पास-पास दो चित्र दिए गए थे (देखें चित्र 22)।



चित्र 22

पहेली यह थी कि इन दो चित्रों में आठ अन्तर ढूँढने थे। मैंने राम का ध्यान इस पहेली पर दिलाया।

राम : मैंने पहले ही सारे अन्तर ढूँढ लिए हैं।

मैं : बढ़िया! अब ज़रा अपनी नोटबुक में बने दो डिज़ाइनों को देखो। जरा देखो कि क्या उनमें तुम कोई अन्तर ढूँढ सकते हो।

उसने दोनों चित्रों को बारीकी से देखना शुरू किया। थोड़ी देर बाद उसने कहा कि वह कोई अन्तर नहीं ढूँढ पाया।

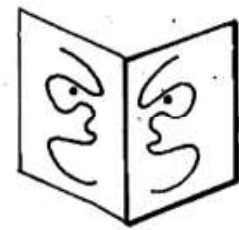
मैं : तुम्हारा मतलब है कि दोनों डिज़ाइनें हूबहू एक सी हैं ?

राम : हां! परन्तु पत्रिका के उन दोनों चित्रों जैसी समान नहीं है। मैं बता नहीं सकता कि ऐसा क्यों है।

मैंने उससे एक आइना लाने को कहा। वह भागकर ले आया।

मैं : अब दोनों पन्नों के बीच आइने को खड़ा करके पकड़ो (यानी कागज के तल से लम्बवत्)। आइने का मुँह डिज़ाइन की तरफ रखो और बाएं पेज को आइने में देखो। क्या यह प्रतिबिम्ब दाएं पन्ने की डिज़ाइन जैसा है?

उसने प्रतिबिम्ब का अध्ययन किया (देखें चित्र 23)। फिर आइना हटाकर दाएं पन्ने के डिज़ाइन को देखा।



चित्र 23

राम : (मुस्कराते हुए) : मजेदार बात है। आइने में दाएं तरफ का डिज़ाइन बाई तरफ के डिज़ाइन जैसा दिखता है। है ना, आण्टी?

इसके बाद मैंने उसे एक आदमी की शक्ल को पूरा करने को कहा। मैंने आधी शक्ल बना दी (चित्र 24)। उसने इसे, पूरा करने की कोशिश की मगर एकदम सही – सही न बना सका। मैंने उससे कहा कि लाइन पर आइना रखकर देखे कि क्या होता है। उसने देखा कि बायां भाग और उसका प्रतिबिम्ब मिलकर पूरा चेहरा बन गया।

मैं : अब तुम समझ सकते हो कि यदि हम इन्सान के चेहरे के बीचों बीच एक लाइन खींचे तो बायां भाग और दायां भाग समरूप होते हैं वे एक, दूसरे का प्रतिबिम्ब हैं। यही बात तुम्हारी नोट बुक के डिज़ाइन में भी है। दाएं पन्ने का डिज़ाइन, बाएं पन्ने के डिज़ाइन का प्रतिबिम्ब है और वे समरूप हैं।



चित्र 24

मैंने उससे बाहर चलने को कहा। मैं उसे पेड़-पौधे दिखाना चाहती थी।

मैंने उससे एक पत्ती तोड़कर उसका निरीक्षण करने को कहा (चित्र 25)।

मैं : क्या तुम पत्ती के बीचों बीच एक नस देख रहे हो? क्या नस के दोनों ओर पत्ती का बायां भाग और दायां भाग समरूप हैं? कैसे पता लगाओगे?

उसने बारीकी से पत्ती को देखा मगर यह न बता सका कि दोनों भाग समरूप हैं या नहीं। मैंने उससे पत्ती को नस पर से मोड़ने को कहा। उसने वैसा ही किया। मैंने पूछा कि "क्या दोनों भाग मेल खाते हैं?"

राम : अच्छा! ऐसे पता करते हैं? हां, दोनों भाग पूरी तरह मेल खाते हैं। अब मैं समझ गया।



चित्र 25

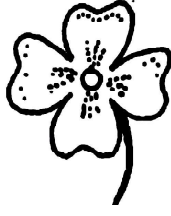
मैं : हम कहते हैं कि पत्ती में बीच की नस के दोनों ओर के भाग सममित हैं। तुम और पत्तियां लेकर भी आजमा सकते हो कि क्या उनमें भी बीच की नस के दोनों ओर के भाग सममित हैं या नहीं।

राम ने कई पत्तियां तोड़कर बीच से मोड़कर देखा। अधिकतर पत्तियाँ सममित थीं। कुछ नहीं भी थीं।

राम : परन्तु आण्टी यदि नस बीचों-बीच न हो, तो हम कैसे पता करेंगे कि पत्ती सममित है या नहीं?

मैं : इस फूल को देखो (चित्र 26 देखें)। क्या तुम कोई ऐसी रेखा खोज सकते हो, जिसके इर्द-गिर्द

यह फूल सममित हो? एक धागा लेकर उसे फूल के ऊपर रखो पता लगाओ।



चित्र 26

शुरू में वह थोड़ा घबराया मगर फिर उसने मुझे ऐसी रेखाएं बताईं जिनके इर्द-गिर्द फूल सममित था।

मैं : तुम्हारा मतलब है कि किसी सममित आकृति में एक से अधिक सममिति अक्ष हो सकते हैं?

राम : हां! मुझे पक्का विश्वास है।

मैं : शाबाश।

इसके बाद मैंने एक पत्ती को उसके सममिति-अक्ष यानी मध्य नस पर मोड़कर उसे दिखाया कि जब किसी सममित आकृति को सममिति-अक्ष पर से मोड़ा जाता है तो हमें उसके दोनों भागों के बजाय एक ही भाग नज़र आता है।

राम की दिलचस्पी इतनी बढ़ गई कि वह हर फूल-पत्ती पर धागा रखकर देखने लगा। अचानक एक तितली देखकर वह उछल पड़ा और चिल्लाया 'आण्टी'। उसे सममित चीज़ का एक बढ़िया उदहारण मिल गया था। परन्तु राम को सबसे ज्यादा हैरानी तब हुई जब मैंने उसे बताया कि जो समोसा हम खा रहे हैं वह भी सममित है। यह सुनकर वह थोड़ा चकरा गया। उसने तीन अलग-अलग स्थितियों में धागे को रखा, मन की मन दोनों हिस्सों का अध्ययन किया। वह खुश था और अब उसका संदेह भी दूर हो गया था।

E16) क्या आपको लगता है कि ऐसी गतिविधियों से बच्चों को सममित आकृतियों की अवधारणा को समझने में आसानी होती है? क्या सिखाने का यह तरीका उस पारम्परिक तरीके से ज्यादा कारगर है जिसमें शिक्षक ब्लैक बोर्ड पर चन्द सममित आकृतियाँ बनाकर विद्यार्थियों को, बगैर किसी प्रत्यक्ष अनुभव के, सममिति के बारे में सब कुछ बता देते हैं?

E17) कम से कम दो ऐसी गतिविधियाँ सुझाइए जो आप कक्षा में सममित आकृति की अवधारणा पढ़ाने के लिए करेंगे।

आपने भी ध्यान दिया होगा कि हमारे आसपास की कई चीज़ें व संरचनाएँ सममित होती हैं। एक बार बच्चा सममिति की अवधारणा को समझ ले तो उसे अपने आस पास सममिति खोजने के अवसर दिए जाने चाहिए। बच्चे, पत्तियों, फूलों, घर के दरवाजों, रंगोली, साड़ी व चादर के डिज़ाइनों में सममिति देख सकते हैं। इस तरह से वे अपने आसपास की तमाम चीज़ों में सममिति खोज सकते हैं। विभिन्न सम व असमाकृतियों की सममिति का प्रयोग करके तिकोन, वर्ग, आयत, वृत्त आदि जैसी परिचित ज्यामितीय आकृतियों में सममिति दिखाई जा सकती है। बच्चे कागज़ की आकृति काटकर और उसे मोड़कर पता लगा सकते हैं कि क्या कोई ऐसी लाइन है जिस पर से आकृति को मोड़ने पर एक हिस्सा दूसरे से मेल खाता है। एक और मज़ेदार प्रयोग यह हो सकता है कि किसी आकृति को ट्रेसिंग पेपर पर उतारें और इस कागज़ के पीछे की तरफ दिखाई पड़ने वाली आकृति की तुलना मूल आकृति से करें। हम उनको बता सकते हैं कि समभुज तिकोन के तीन सममिति-अक्ष तिकोन

को छः बराबर भागों में बांट देते हैं। बच्चे यह भी देख सकते हैं कि वृत्त में तो अनगिनत सममिति—अक्ष होते हैं।

E18) निम्नलिखित अवधारणाएं सिखाने के लिए आप क्या गतिविधि सुझाएंगे?

- (क) किसी आकृति में हर रेखा सममिति—अक्ष नहीं होती।
- (ख) सममिति—अक्ष के दोनों ओर के संगत बिन्दु अक्ष से बराबर दूरी पर होते हैं।
- (ग) वर्ग में 4 सममिति—अक्ष होते हैं जबकि आयत में सिर्फ दो होते हैं।
- (घ) ताश के पत्तों पर बने चित्र बीच में खींची गई रेखा पर सममित होते हैं।

सारांश

इस पाठ में हमने निम्नलिखित बिन्दुओं पर चर्चा की :

- 1) जब तक नई अवधारणाओं का विकास जाने पहचाने अनुभवों के आधार पर न किया जाए, तब तक नन्हें दिमाग ज्यामिती की मूलभूत अवधारणाओं को अच्छी तरह समझ नहीं पाते। बच्चों को खेलकूद में मजा आता है। उनकी इस प्रकृति का लाभ उठाते हुए हमने बन्द व खुली आकृतियों की अवधारणा सिखाने के लिए खेलकूद के तरीकों का उपयोग किया है। तीलियां, रबड़ बैंड, धागे आदि जैसी साधारण चीजों से हो सकने वाली आसान गतिविधियां सुझाई हैं जिनसे बच्चों को खुली व बन्द आकृति के बीच अंतर समझने में मदद मिल सकती है।
- 2) कई मर्तबा बच्चे समतल/असमतल सतहों को चिकनी/खुरदरी सतह मानने की भूल कर बैठते हैं। उनके लिए अण्डे, गेंद या बेलनाकार बर्तन की सतह समतल होती है। इस समस्या को सुलझाने के लिए उन्हें कुछ चिकनी व खुरदरी सतह हाथों से महसूस करने को दी जा सकती हैं। समतल व असमतल सतहों के बीच के अंतर को समझने के लिए उन्हें माचिस की डिब्बी, कंचे, पासे, पोस्टकार्ड, गेंदें, ग्लोब, किताबें, पेंसिल बॉक्स आदि का निरीक्षण करने को कहा जा सकता है।
- 3) सम आकृतियों की अवधारणा विकसित करने के लिए बच्चों को पहले सीधे कोरों वाली बन्द आकृतियों से परिचित कराएं। जैसे— वर्ग, आयत। उन्हें तीलियां, धागे, रबर बैंड आदि के साथ गतिविधियां करने दें और विभिन्न आकृतियां बनाने दें। इस प्रक्रिया के दौरान उन्हें अलग—अलग प्रकार के तिकानों व चतुर्भुजों के नामों से परिचित कराया जा सकता है। उन्हें समान्तर चतुर्भुज, वर्ग और आयत के बीच का सम्बंध खोजने दें। गोलाईदार, कोरों वाली सम आकृतियों तथा असमाकृतियों से भी बच्चों का परिचय गतिविधियों के माध्यम से कराया जा सकता है।
- 4) बच्चे सममिति की अवधारणा काफी छोटी उम्र में ही हासिल कर लेते हैं। यह बात उनके द्वारा बनाए गए चित्रों में देखी जा सकती है। परन्तु कई मर्तबा उन्हें सममित ज्यामितीय आकृतियों में सममिति—अक्ष पता करने में दिक्कत होती है। इस मामले में उनकी मदद के लिए हम उन्हें आसपास की सममित चीजों का अनुभव दे सकते हैं। इन चीजों में वे आकृति के तल में ऐसी रेखा ढूँढें जिस पर से मोड़ने पर दो आधे हिस्से एक—दूसरे से मेल खाएँ और दो की बजाय एक ही हिस्सा नज़र आए। उन्हें अपने आसपास प्रकृति में सममिति खोजने दीजिए। आसान सी गतिविधियों के जरिए उन्हें सममित चीजों की सभी विशेषताओं से परिचित कराया जा सकता है।

पाठ — 12

कोण मापना

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - कोण क्या होता है?
 - कोण मापना
- सारांश

परिचय

कई बच्चों को कोण की ज्यामितीय अवधारणा समझने में काफी दिक्कत होती है। जब 10–15 साल के बच्चों से पूछा जाता है कि कोण क्या होता है, तो उनके जवाब कुछ इस तरह के होते हैं : दो लाइनों के बीच का अन्तर, 'जहां लाइनें मिलती हैं वहां का अन्तर', 'दो सरल रेखाओं के बीच का नाप' वगैरह। अगर आप किसी मानक पाठ्यपुस्तक में कोण की परिभाषा देखें, तो वहां वह इस तरह दी होगी: 'समान अंतिम बिन्दु वाली दो किरणें कोण बनाती हैं, या 'जब किसी रेखा को उसकी मूल स्थिति से घुमाया जाता है तो मूल रेखा के सापेक्ष कोण बनते हैं'। ज़ाहिर है कि इन परिभाषाओं से बच्चे कोण का मतलब नहीं समझ सकते और अपने दिमाग में उसकी तस्वीर नहीं बना सकते।

इस पाठ में हमने सबसे पहले इसी बात पर चर्चा की है कि बच्चों को यह कैसे अच्छी तरह से समझाया जाए कि कोण क्या होता है? बच्चे इस अवधारणा को ठीक से समझे हैं या नहीं, यह परखने के अलग-अलग तरीके हो सकते हैं। इनमें से कुछ की चर्चा हमने भी की है। दरअसल, बच्चों को कोण नापना सिखाने से पहले यह बहुत ज़रूरी है कि वह कोण की अवधारणा को साफ तौर पर समझ लें।

इस पाठ में हमने उन दिक्कतों के बारे में भी बताया है जो बच्चों को कोण नापते वक्त आती है। जब बच्चे मापन उपकरण का इस्तेमाल करते हैं तो वे कोण के मापे गए मान और उनके चित्र के बीच कोई सम्बंध नहीं देख पाते। वे मापन का काम मशीनी ढंग से करते हैं। परिणाम यह होता है कि वे मापन में ढेरों ग़लतियां करते हैं। कोण मापन सीखने के लिए, बच्चों को मापन उपकरण का सही इस्तेमाल भी सिखाया जाना ज़रूरी है। इस पाठ में यह हुनर सिखाने के तरीकों पर भी चर्चा की गयी है।

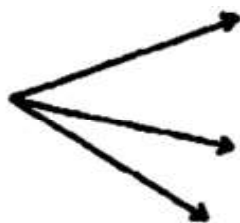
उद्देश्य

- बच्चों को कोण का मतलब समझाने के लिए गतिविधियां तैयार कर पाएं।
- बच्चों को विभिन्न कोणों की साइज़ की तुलना करने और उन्हें क्रम में जमाना सीखने में मदद कर पाएं।
- कोण नापने में बच्चों को आने वाली दिक्कतें पहचानना। खास तौर से चांदे के उपयोग की दिक्कतों को पहचान पाएं,
- बच्चे को कोण सही-सही व सटीकता से नापना सीखने में मदद करने हेतु उपयुक्त शिक्षण रणनीति विकसित कर पाएं,
- अपनी शिक्षण रणनीतियों का मूल्यांकन कर पाएं।

कोण क्या होता है?

सबसे पहले आइए हम बच्चों में 'कोण' का अहसास विकसित करने के कुछ तरीकों पर गौर करें। एक बार कक्षा 5 के एक शिक्षक ने ब्लैक बोर्ड पर एक कोण बनाया और कहा कि यह कोण का चित्र है। तत्काल एक बच्चे ने सवाल किया, 'कोण कौन सा है सर? सफेद वाला या काला वाला?' काले बोर्ड पर सफेद चॉक से बने इस चित्र ने बच्चे को चक्कर में डाल दिया था कि चॉक से बना सफेद निशान कोण है या इस सफेद निशान के अन्दर वाला हिस्सा कोण है। पारम्परिक कक्षा विधि से पढ़ाए जाने वाले अधिकांश बच्चों के मन में यह सवाल पैदा हो सकता है। लोगों को यह समझने में दिक्कत क्यों होती है कि कोण क्या होता है? न सिर्फ बच्चे बल्कि कई वयस्क भी पक्के तौर पर नहीं कह सकते कि कोण क्या होता है। जब प्राइमरी स्कूल के कुछ शिक्षकों से पूछा गया कि चित्र 1 में कितने कोण बने हैं तो उनके जवाब काफी दिलचस्प रहे (चित्र 1)।

चित्र 1 में कुछ शिक्षकों को 2 कोण दिखे, कुछ को 3 तथा कुछ को 4 कोण नजर आए।



चित्र 1

आइए इस बात का विश्लेषण करें कि यह गलतफहमी क्यों पैदा होती है। इसके लिए आइए पहले देखें कि मेरा चचेरा भाई, जो प्राइमरी कक्षा में पढ़ाता है अपनी कक्षा में 'कोण' की अवधारणा कैसे बताता है।

उदाहरण 1 : उसके स्कूल में पहली बार कोण से बच्चों का सामना कक्षा 5 में होता है। शिक्षक सबसे पहले बच्चों को एक 'किरण' के बारे में बताते हैं। आम तौर पर शिक्षक करते यह हैं कि ब्लैक बोर्ड पर स्केल की मदद से एक रेखाखण्ड खींच देते हैं, इसके दाहिने सिरे पर एक तीर का निशान बना देते हैं और फिर बाएं सिरे को A तथा दाएं सिरे को B से अंकित कर देते हैं। इसके बाद वे बच्चों को बताते हैं कि इस चित्र को 'किरण' कहते हैं।

मेरे चचेरे भाई के मन में यह सवाल आया कि जिन बच्चों का किरण से परिचय इस तरीके से कराया जाता है क्या वे इस तरह के सवालों के जवाब दे पाएंगे?

1. कोई किरण बाईं से दाईं ओर ही क्यों खींची जाती है?
2. तीर का निशान क्यों लगाते हैं?
3. यदि बाईं तरफ तीर का निशान लगा दें, तो क्या हो जाएगा?
4. क्या हम किरण को खड़े रूप में नहीं बना सकते?
5. कितनी लम्बाई बनाने के बाद तीर का निशान लगाना चाहिए।

यानी इन अवधारणाओं को पढ़ाते वक्त हमें यह ध्यान रखना होगा कि बच्चा इन्हें किस तरह ग्रहण करेगा। अतः मेरे चचेरे भाई ने सोचा कि हो सकता है कि एक कल्पनाशील कहानी से बच्चों को यह अवधारणा सीखने में मदद मिले। तो अवधारणाओं से परिचित कराने से पहले, शुरुआत में वे अक्सर बच्चों को निम्न प्रकार की कुछ कहानियां सुनाते हैं।

एक बहुत लालची और मतलबी आदमी था। वह देश का सबसे अमीर आदमी बनना चाहता था। वह हर दिन भगवान से प्रार्थना करता कि भगवान उसे सोने और हीरे जवाहरात का खजाना दिखा दे। भगवान ने उसे सबक सिखाने की ठानी। एक दिन भगवान उसके सामने प्रकट होकर कहने लगे, 'मैं तुमसे प्रसन्न हुआ। मैं तुम्हें धागे की एक जादुई रील दूंगा। तुम धागे का एक सिरा अपने घर में किसी जगह बांध देना और रील हाथ में लेकर किसी भी दिशा में सीधे चल पड़ना। धागे को तानकर रखना। अगर धागा ढीला रहा तो तुम्हें कोई खजाना नहीं मिलेगा। एक ही दिशा में सीधे चलना, मुड़ना नहीं। तुम दीवारों, पेड़ों, समन्दर, आग, हर चीज को पार कर सकोगे। कोई चीज तुम्हें रोक न सकेगी। जब तुम धागे के दूसरे छोर पर पहुंचोगे, तो खजाना तुम्हारे कदमों में होगा।' लालची आदमी ने वैसा ही किया। वह बरसों दिन-रात चलता रहा। धागे को ताने रखा। परन्तु वह धागे के दूसरे छोर तक न पहुंच सका। यही उस धागे का जादू था। अभी भी वह उसी दिशा में सीधा चल रहा है। न तो धागे को छोर आता है, न खजाना।

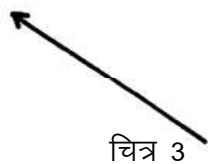
फिर वह कहानी का उपयोग यह समझने के लिए करता है कि किरण क्या होती है। उसने चित्र 2 की तरह उस आदमी का रास्ता दिखाया। इस चित्र से उसने समझाया कि जहां आरम्भ बिन्दु (Starting point)



चित्र 2

लिखा है वहां से आदमी ने चलना शुरू किया था और वह चित्र में दर्शाई गई दिशा में चला। उसने बच्चों को याद दिलाया कि वह आदमी शुरू में किसी भी दिशा को चुन सकता था। लेकिन शर्त यह थी कि एक बार दिशा चुन लेने के बाद उसे लगातार उसी दिशा में चलना पड़ेगा। एक सिर पर बने तीर से इसी दिशा का पता चलता है और यह भी पता चलता है कि उस आदमी की यात्रा खत्म नहीं हुई है, वह अभी भी चल रहा है।

एक बार जब बच्चे इस विचार के आदी हो गए, तब मेरे चचेरे भाई ने किरण की औपचारिक परिभाषा दी और चित्र 3 में दिखाए अनुसार किरण का ज्यामितीय चित्र बना दिया।



चित्र 3

रेखा की अवधारणा से परिचित कराने के लिए भी उसने बच्चों को इसी तरह का अनुभव दिया। उसने बच्चों से एक ऐसे जादुई सीधे तने हुए धागे की कल्पना करने को कहा जो हवा में तैर सके। जब हम कहें कि 'बढ़ो' तो दोनों दिशाओं में बढ़ना शुरू कर दे और रुकने का नाम न लें। फिर उसने चित्र 4 में दिखाए अनुसार चित्र बनाया।



चित्र 4

फिर उसने सुझाव दिया कि इस चित्र के गुणों को जानने के लिए कक्षा में बातचीत करें। हम दोनों तरफ एक-एक तीर का निशान क्यों लगाते हैं? इसकी शुरुआत कहां है? अंत कहां है? यह कितनी लम्बी हो सकती है? इस तरह के कई सवाल पूछे जा सकते हैं। इसके बाद हम कह सकते हैं कि चित्र 4 में दिखाई गई आकृति रेखा है। उसने रेखा व किरणों को लेकर बच्चों के साथ काफी समय बिताया और उन्हें ब्लैकबोर्ड पर काफी अभ्यास दिए।

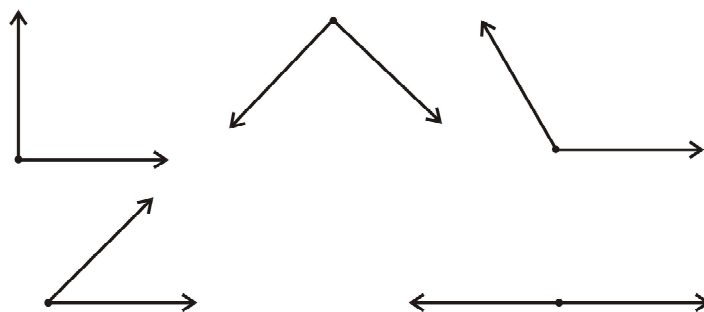
किरण और रेखा को परिभाषित करने के बाद उसने कोण की अवधारणा शुरू की। इसके लिए उसने बच्चों को किरणों का एक मॉडल दिया। उसने जिस मॉडल का इस्तेमाल किया वह नारियल की पत्तियों से बना था। उसने यह भी बता दिया कि हम तार या रंग बिरंगी स्ट्रॉ (प्लास्टिक की पाइप) का उपयोग भी कर सकते हैं।

पत्ती को किरण के रूप में उपयोग करने के लिए उसके डंठल को काट लेंगे और एक सिरे पर पत्ती का थोड़ा सा भाग रहने देंगे। इसे एक तीर की शकल दे देंगे। डंठल और पत्ती कुछ इस तरह दिखेंगे (उसने चित्र 5 जैसी आकृति बनाई)।



चित्र 5

हम प्रत्येक बच्चे से ऐसी दो किरणें बनाने को कहें। फिर हर बच्चा दोनों किरणों को एक साथ इस तरह पकड़े कि उनके वे सिरे एक दूसरे को छुएं जिन पर की तीर नहीं है। बच्चों द्वारा बनाई गई आकृतियां ऐसी दिखेंगी।



चित्र 6

फिर उसने बच्चों को बताया कि उन्होंने दो किरणों की मदद से जो आकृतियाँ बनाई हैं, वही कोण हैं। इसके बाद उसने बच्चों से बातचीत करके कोण की अवधारणा उनके मन में बैठा दी। उसने बच्चों के सामने इस तरह के सवाल रखे :

1. एक कोण बनाने के लिए कितने तीर लगे?
2. किरणों को कैसे रखा है तुमने?
3. किरणें एक-दूसरे को कहां छू रही हैं?
4. अगर किरणों को एक-दूसरे के विपरीत दिशा में रख दें तो क्या होगा?

इस जगह पर उसने कोण की एक औपचारिक परिभाषा इस प्रकार देने की कोशिश की कि 'जब दो किरणों का एक साझा अंतिम बिन्दु होता है, तब वे कोण बनाती हैं।'

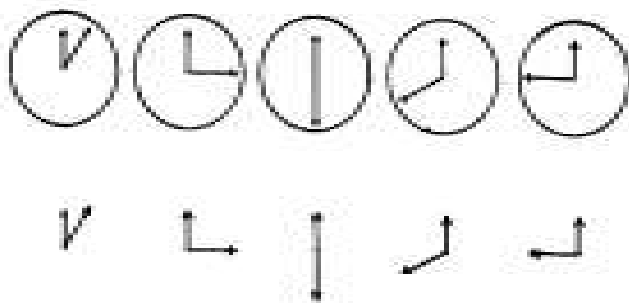
E 1) उदाहरण 1 में बताई गई शिक्षण रणनीति के बारे में आपकी क्या राय है? क्या इससे बच्चों को कोण की अवधारणा की स्पष्ट समझ हासिल करने में मदद मिलती है? अपने उत्तर को कारण सहित समझाइए।

मेरी अपने चचेरे भाई से जो बातचीत हुई उसी को जारी रखते हैं। उसकी बात धैर्यपूर्वक सुनने के बाद मैंने उससे कुछ सवाल किए, 'क्या कोण का मतलब समझने के लिए जरूरी है कि हम किरण, रेखा आदि की परिभाषा से शुरुआत करें? क्या तुम्हारे इस तरीके से बच्चों को वाकई अपना यह संदेह दूर करने में मदद मिलेगी कि कोण किरणों द्वारा बनाई गई आकृति का सफेद वाला हिस्सा है या काला वाला? क्या इससे बच्चे को यह समझने में मदद मिलेगी कि कोण दरअसल दो रेखाओं के बीच झुकाव का माप है या ज्यादा स्पष्ट रूप में कहें तो वह घूर्णन (घुमाव) का माप है? हम इस माप का कुछ अहसास गतिविधि आधारित तरीके से क्यों नहीं दे सकते?' उसने माना कि बच्चों को वे दिक्कतें आती हैं, जो मैंने बताईं। उसका कहना था कि ऐसी दिक्कतें जब जब उन्हें तब तब ठीक की जा सकती हैं। उसका मत था कि उसके द्वारा अपनाया गया तरीका मानक तरीका है और उसने कभी और किसी तरीके के बारे में सोचा ही नहीं।

मैंने जब एक अन्य शिक्षक से इस बारे में चर्चा की तो वे भी सहमत थी कि कोण का पाठ रूढ़िगत ढंग से नहीं पढ़ाया जाना चाहिए। यह ढंग बच्चों को बहुत बनावटी लगता है और वे इससे जुड़ नहीं पाते। उन्होंने मुझे बताया कि हमें बच्चों को यह सिखाना चाहिए कि कोण एक दिशा और दूसरी दिशा के बीच परिवर्तन का माप है। परन्तु अपने अनुभव से उन्हें लगता है कि यह परिभाषा बच्चों के लिए शुरुआत में थोड़ी ज्यादा ही मुश्किल हो जाएगी। लिहाजा उनका सुझाव था कि सही वक्त आने तक कोई परिभाषा देनी ही नहीं चाहिए। हम उन्हें सहजता से यह बता सकते हैं कि जब दो किरणें एक बिन्दु पर मिलती हैं, तो हमें एक कोण मिलता है। आगे चलकर हम उन्हें बता सकते हैं कि इस कोण से हमें दो दिशाओं के बीच के अन्तर का पता चलता है।

आइए अब हम उनकी शिक्षण रणनीति को थोड़ा विस्तार में देखें।

उदाहरण 2 : सबसे पहले उन्होंने बच्चों को एक घड़ी का गत्ते को मॉडल दिखाया। उन्होंने बड़े कांटे को 2 के आसपास तथा छोटे कांटे को 10 के आसपास रखा ताकि घड़ी 10:10 दिखाए। अब उन्होंने अपने हाथ बड़े व छोटे कांटे पर फिराते हुए कहा कि ये दो कांटे एक कोण बनाते हैं। अब उन्होंने घड़ी के कांटों की स्थिति बदल दी, हर बार वे समझाती गई कि दो कांटों के बीच बना कोण क्या है। (देखें चित्र 7)



चित्र 7

हर बार कांटे का चित्र बनाते वक्त उन्होंने तीर का चिन्ह बनाया हालांकि उन्होंने बच्चों को यह नहीं बताया कि तीर लगाने का महत्व या मतलब क्या है।

इसके बाद शिक्षक ने दो पैसिलों को 45° के कोण पर पकड़कर पूछा कि क्या 'यहां एक कोण बना है?' इस तरह की ठोस गतिविधियों के जरिए, जो उनके साथ-साथ बच्चे भी कर रहे थे, उन्होंने बच्चों को यह बताने की कोशिश की कि 'जब दो किरणें एक बिन्दु पर मिलती हैं, तब हमें एक कोण मिलता है।'

शिक्षक ने उन्हें यह भी बताया कि कोण बनाने वाली दो किरणों को कोण की भुजाएं भी कहा जाता है।

इसके बाद शिक्षक ने एक बड़ी गत्ते वाली किताब ली। चित्र 8 (क) की तरह उसका छोटा सिरा उनकी तरफ रखकर और उसे थोड़ा सा खोलकर बच्चों से पूछा कि क्या वे किताब की दो साइड से बना कोण देख पा रहे हैं? जब बच्चे समझ गए कि



(क)

(ख)

चित्र 8

शिक्षक का इशारा किस कोण की ओर है तो उन्होंने किताब का थोड़ा और खोला (चित्र 8 ख)। इसके आधार पर उन्होंने कोशिश की कि बच्चे 'कोण' और 'किताब कितनी खुली है', इनके बीच संबंध देख पाएं। बाद में उन्होंने कमरे के कोनों, तथा तिकोन, आयत, समान्तर चतुर्भुज के कोनों से कोण की अवधारणा को जोड़ा।

इस तरह से शिक्षक ने बच्चों को कोण का एक सहज विचार दिया।

बाद में जब वे मूल्यांकन कर रही थीं कि बच्चे कितनी हद तक कोण की बात को समझ पाए हैं तो उन्होंने देखा कि अधिकतर बच्चे कोण  इस तरह बना रहे थे। इससे उन्हें थोड़ी चिन्ता हुई। उन्होंने तय किया कि वे बच्चों से पूछेंगी कि कोण और किन तरीकों से बनाये जा सकते हैं? इसके लिए उन्होंने कुछ बच्चों को ब्लैकबोर्ड पर बुलाया और कहा कि उन्होंने पहले जो कोण बनाए थे, उनसे अलग कोण बनाएं। उन्होंने बच्चों को घड़ी के कांटों की याद दिलाई। धीरे-धीरे बच्चों के दिमाग में घुसा कि  आदि भी कोण हैं।

बच्चों से बातचीत करते हुए उन्हें पता चला कि कोण की अवधारणा को लेकर कभी कभी बच्चे बिल्कुल अलग-अलग विचार रखते हैं। उन्हें लगा कि इस अवधारणा को अच्छी तरह समझाने का सबसे बढ़िया तरीका निम्न प्रकार की अवधारणाएं हो सकती हैं।

शिक्षक ने पांच विद्यार्थियों को बुलाकर ब्लैकबोर्ड के पास खड़ा कर दिया। उनमें से एक लड़की श्यामा को ब्लैकबोर्ड के ठीक सामने खड़ा कर दिया और बच्चों को चित्र 9 में दिखाई स्थिति 1, 2, 3 और 4 में खड़ा कर दिया। अब शिक्षक ने श्यामा से कहा कि वह अपने दोनों हाथों को बढ़ाकर स्थिति '1' की दिशा में करें।

शिक्षक : अब, श्यामा, अपने बाएं हाथ को स्थिर रखकर दाएं हाथ को घुमाकर '2' की ओर कर दो। (श्यामा ने ऐसा ही किया।) अच्छा, अब अपने दाएं हाथ को पहले वाली स्थिति में वापस ले आओ और घुमाकर स्थिति '3' में ले आओ।

श्यामा ने ऐसा ही किया। शिक्षक ने इसी क्रिया को स्थिति '4' के लिए दोहराने को कहा।

शिक्षक : श्यामा, अब बताओ किस स्थिति में तुम्हें अपना हाथ सबसे ज्यादा घुमाना पड़ा - '2' के लिए, '3' के लिए या फिर '4' के लिए।

श्यामा : '4' के लिए।

शिक्षक : ठीक है। और अब बताओ कि '2' और '3' में से किस स्थिति के लिए तुम्हें हाथ ज्यादा घुमाना पड़ा।

श्यामा तुरन्त जवाब न दे पाई। इसलिए उसने पहले वाली क्रिया को एक बार फिर दोहराया और जवाब दिया कि स्थिति '2' के लिए उसे अपना हाथ अधिक घुमाना पड़ा।

शिक्षक (बाकी बच्चों से पुछते हुए) : क्या आप श्यामा से सहमत हैं? स्थिति '1' पर खड़ा हुआ बच्चा : नहीं मैडम '2' के लिए नहीं, '3' के लिए।

शिक्षक : क्यों?

बच्चा : श्यामा के हाथों को घूमते देखकर मेरे को ऐसा ही लगा।

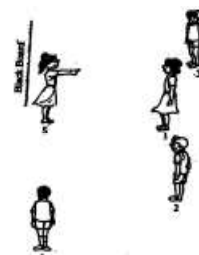
शिक्षक : चलो! हम देखते हैं कौन सही है।

इसके लिए शिक्षक ने श्यामा को एक बार फिर से वही क्रिया दोहराने को कहा। साथ ही साथ वो चॉक से जमीन पर रेखाएं खींचती रही यह दिखाने के लिए कि श्यामा का दाएं हाथ किस-किस दिशा में घूमा (चित्र 10 देखिए)।

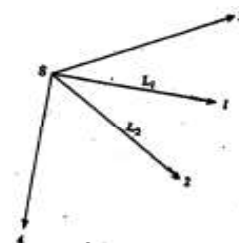
शिक्षक (चित्र 10 की ओर इशारा करते हुए) : जो रेखाएं मैंने खींची है उसमें तुम्हें क्या कोई कोण दिखता है। एक बच्चा जमील ने '1' और '3' के बीच बनते हुए कोण की ओर इशारा किया।

शिक्षक : जमील तुम्हें इस कोण का कैसे पता चला?

जमील (कुछ सोचने के बाद) : श्यामा का दायां हाथ पहले '1' की ओर मुड़ा और '3' की ओर।



चित्र 9



चित्र 10

शिक्षक (कोण की ओर इशारा करते हुए) : बिल्कुल ठीक, ये कोण तब बना जब श्यामा का हाथ '1' से '3' की ओर घूमा। जमील क्या तुम्हें कोई और कोण दिखता है।

उसने दो और कोणों की ओर इशारा किया।

शिक्षक : अब बताओ कौन सा कोण अधिक है — '1' और '2' के बीच या फिर '1' और '3' के बीच?

जया (दूसरी बच्ची) : '1' और '3' के बीच का कोण अधिक है।

शिक्षक : सही है। इसका मतलब है कि '1' और '3' के बीच के घुमाव '1' और '2' के बीच का घुमाव से ज्यादा है।

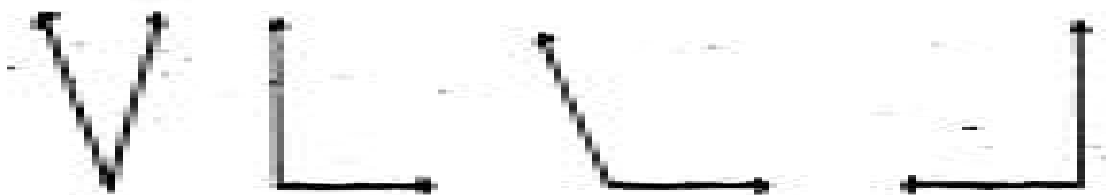
अब शिक्षक ने पूरी कक्षा को 5 टोलियों में बांट दिया। उसने सभी टोलियों से श्यामा और उसकी साथियों द्वारा की गई क्रिया को दोहराने को कहा। इस प्रकार उसने सभी बच्चों को ये एहसास करने का मौका दिया कि कोण किस प्रकार 'दिशा परिवर्तन' को दिखाता है। शिक्षक ने समय समय पर कक्षा में इसी अवधारणा को लेकर कुछ और भी गतिविधियाँ कीं — जब तक उसको यह तसल्ली नहीं हो गयी कि बच्चे ये समझ चुके हैं कि कोण 'दिशा में घुमाव' को दर्शाता है।

E 2) उदाहरण 1 व 2 में हमने बच्चों को कोण की अवधारणा का एक अहसास विकसित करने के लिए दो अलग-अलग शिक्षण रणनीतियों की चर्चा की है। आपकी राय में कौन सी रणनीति इस अवधारणा को समझाने में ज्यादा कारगर होगी?

E3) बच्चों की कोण की अवधारणा की समझ के मूल्यांकन हेतु आप कौन सी गतिविधियों/अभ्यासों का उपयोग करेंगे?

आपने देखा होगा कि उदाहरण 1 में शिक्षक ने औपचारिक परिभाषाओं पर ज्यादा जोर दिया है। शिक्षक ने अवधारणा का संबंध बच्चे के रोजमर्रा के अनुभवों से नहीं जोड़ा है, हालांकि अवधारणा समझाने के लिए उन्होंने कुछ सामग्री का उपयोग अवश्य किया है। जैसा कि हमने पिछले पाठों, में भी कहा था, जब तक हम बच्चों को किसी अवधारणा का अहसास कराने के लिए ऐसे कई अनुभव नहीं देते जिनके जरिए वे अवधारणा को दैनिक जीवन के अनुभवों से जोड़कर समझ सकें, तब तक बच्चे उस अवधारणा की पकड़ नहीं बना सकते। कई लोगों की चिन्ता यह होती है किसी अवधारणा की औपचारिक परिभाषा दिए बगैर शिक्षण में तार्किक सटीकता नहीं आती। उन्हें इस बात पर विचार करना चाहिए कि बच्चे किस स्तर पर इस तरह की अमूर्तता/तार्किक सटीकता को ग्रहण कर सकते हैं। दूसरा मुद्दा यह है कि हममें से कितने लोगों ने इस बारे में सोचा है कि क्या यह वाकई जरूरी है कि कोण की अवधारणा को पढ़ाने से पहले 'किरण' की अवधारणा को पढ़ाया जाए। शायद ऐसा नहीं है। ऐसा करने का एक कारण तो यह हो सकता है कि आप कोण को सटीकता से परिभाषित करना चाहते हैं। लेकिन क्या यही हमारा लक्ष्य है? यानी कोई भी अवधारणा पढ़ाने से पहले हमें अपने से सवाल करना चाहिए। ऐसे सवालों से सीखने वालों को किसी निर्धारित पाठ्यपुस्तक में दिए गए तरीके से कहीं ज्यादा स्वाभाविक रूप से सीखने में मदद मिलेगी।

ज्यामिति के शिक्षण में एक और खामी देखने में आती है। कई बार किसी एक रेखाचित्र को उदाहरण के तौर पर बार-बार प्रयोग करने से बच्चे उसे सभी स्थितियों के लिए सही समझ लेते हैं। मैं यहां एक शिक्षक का बहुत ही दिलचस्प अनुभव आपको बताना चाहूंगी। जब भी वे कोण की बात करतीं तो वे हर मर्तबा दो किरणें बनातीं जिनमें से एक क्षैतिज होती तथा दाईं ओर इंगित करती होती थी। एक बार उन्होंने 11 साल के छात्रों की समकोण, न्यून कोण व अधिककोण की समझ का मूल्यांकन करने के लिए इस तरह के कुछ चित्र बनाए (देखें चित्र 11)।



चित्र 11

चित्र बनाने के बाद उन्होंने बच्चों से पूछा कि हर आकृति में दिखाया गया कोण किस प्रकार का है। एक छात्र ने जवाब दिया कि पहले तीन कोण तो न्यून (acute), सम (right) व अधिक कोण हैं तथा चौथा वाला लेफ्ट (बायाँ) कोण है। यह गलतफहमी इसलिए पैदा हुई क्योंकि जब भी हम समकोण (right angle) की बात करते हैं तो इसका चित्र $\perp$ ऐसे बनाते हैं, कभी भी $_$ या $_$ नहीं बनाते। इससे पता चलता है कि जब भी हम चित्र की मदद से कोई अवधारणा समझाएं, तो हम जरूर यह भी साफ-साफ बताएं कि उस चित्र को कई तरह से बनाया जा सकता है। बच्चों में दिलचस्पी पैदा करने के लिए कल्पनाशील शिक्षक बहुत कुछ कर सकता है। वह स्कूल में गणित क्लब या गणित प्रयोगशाला शुरू कर सकता है। आप बच्चों से पेड़ों की टहनियां आदि ऐसी चीजें इकट्ठी करने को कह सकते हैं जो न्यून, सम या अधिक कोण से मेल खाते हों। इस तरह इकट्ठी की गई चीजों का एक एलबम बन सकता है। आप इसे 'प्रकृति में गणित' जैसा कोई नाम दे सकते हैं।

एक अन्य समस्या यह देखी गई है कि बच्चों के दिमाग में पढ़ाई गई अवधारणा की तस्वीर नहीं बन पाती। मसलन अगर किसी 12 साल की बच्ची से पूछा जाए कि 'न्यून कोण क्या होता है' तो वह आसानी से आपको बता देगी कि '90 अंश से कम के कोण को न्यून कोण कहते हैं।' लेकिन अगर उससे 130° का कोण खींचने को कहा जाए तो वह 50° का कोण बना देगी। तो समस्या कहां है? आइए देखते हैं। यह तो जाहिर है कि उसके दिमाग में यह तस्वीर मौजूद नहीं है कि 130° का कोण कैसा दिखता है। यानी वह यह नहीं जानती कि 130° का कोण अधिक कोण होता है और अधिक कोण कैसा दिखना चाहिए। ज्यामिति में पुख्ता आधार बनाने के लिए ज्यामितिय अवधारणाओं की मानसिक तस्वीर होना निहायत ही जरूरी है। इसे कैसे विकसित किया जाए? इसे विकसित करने का एक अच्छा तरीका यह है कि इन अवधारणाओं को गतिविधि के जरिए पढ़ाया जाए। लेकिन ध्यान रखें कि इसके लिए एक गतिविधि काफी नहीं होगी। हमें कई तरह की गतिविधियां आजमानी होंगी। तो सवाल यह है कि किस तरह की गतिविधियों से बच्चों को कोण की मानसिक तस्वीर बनाने में मदद मिलेगी? हम चाहेंगे कि अगले अभ्यास में आप इस बारे में कोशिश करें।

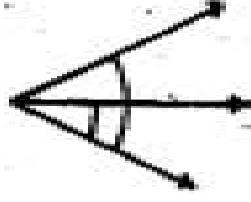
E4) बच्चों को विभिन्न किस्म के कोणों की मानसिक तस्वीर बनाने में मदद के लिए गतिविधियां सुझाइए।

कोण नापना

बच्चों के माता पिता और शिक्षकों से बातचीत के दौरान हमने देखा कि अधिकतर बच्चे कोण नापने के सवालों में गलतियां करते हैं। इस भाग में हम कोण नापने में बच्चों को आने वाली कुछ दिक्कतों की चर्चा करेंगे। इसके बाद हम कुछ ऐसे तरीकों पर विचार करेंगे जिनसे बच्चों को सही तरीके से कोण नापने में मदद मिले।

जब मैंने कुछ शिक्षकों से कोण नापने में बच्चों की दिक्कतों के बारे में बातचीत की तो उन्होंने बताया कि यह समस्याएं मुख्यतः नापने के उपकरण यानी चांदे को गलत ढंग से इस्तेमाल करने की वजह से पैदा होती है। बच्चों को दो स्थितियों में चांदे के उपयोग में दिक्कत होती है :

- i) जब एक ही शीर्ष पर एक से अधिक कोण हों (देखिए चित्र 12 क)।
- ii) जब कोई भी किरण क्षैतिज न हो (चित्र 12 ख)।



(ख)



(क)

चित्र 12

जब मैंने शिक्षकों से पूछा कि चांदे का इस्तेमाल करते हुए ऐसी गलतियां क्यों होती हैं, तो उन्होंने अलग-अलग वजहें बताईं। इनमें से कुछ इस तरह की थीं :

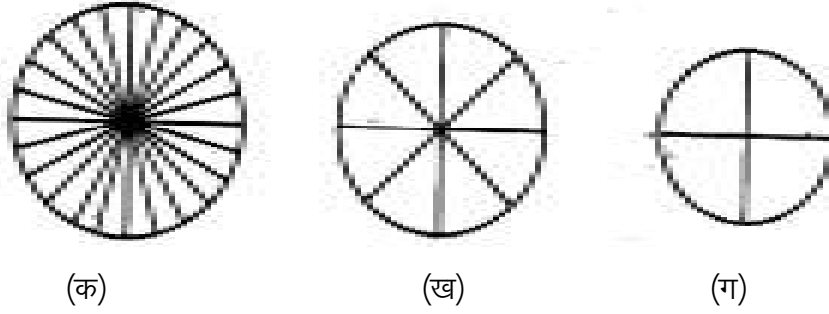
1. बच्चों को न्यून व अधिक कोण की समझ नहीं होती।
2. कोण नापते वक्त बच्चे चांदे की शून्य चिन्ह वाली आधार रेखा की बजाय चांदे के एक किनारे को देखते हैं।
3. चांदे पर एक ही कोण पर दो-दो अंक होते हैं। बच्चे गलत अंक पढ़ लेते हैं।
4. वे कोण के शीर्ष को चांदे के मध्य बिन्दु पर नहीं रखते।
5. धातु के कुछ अपारदर्शी चांदों में, वे जिस कोण को नाप रहे हैं वही छिप जाता है।

E5) आपके मुताबिक कोण नापना शुरू करने से पहले बच्चे को क्या कुछ आ जाना चाहिए?

E6) किसी 10 या 11 साल की बच्ची को चांदे से कोण नापने को कहिए। वह यह काम करते हुए किस किस्म की गलतियां करती हैं?

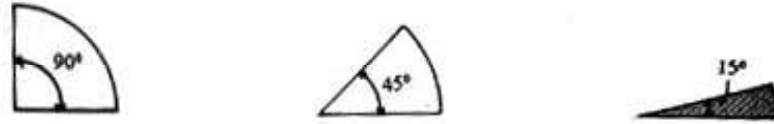
अगर आप चांदे से कोण नापने की दिक्कतों पर गौर करें तो आप मानेंगे कि इन दिक्कतों की वजह यह हो सकती है कि बच्चे वास्तव में चांदे पर लिखे अंकों का अर्थ नहीं समझते। वे यह मानते हैं कि ये अंक कागज पर निशान लगाने के लिए संकेत मात्र हैं। वे इनका संबंध किसी खास कोण के चित्र से नहीं जोड़ पाते। उन्हें यह भी पता नहीं होता कि इस अंश (degree) का मतलब क्या होता है। आमतौर पर कक्षा में होता क्या है कि हम हमेशा इस अंश के संबंध को सेंटीमीटर/मीटर की इकाई से जोड़ देते हैं, जो दरअसल दूरी नापने की इकाइयां हैं। लेकिन ऐसा करते वक्त हममें से कितने लोग यह देखने की जहमत उठाते हैं कि कोण मापन और दूरी मापन में क्या समानताएं हैं और किन मापनों में ये भिन्न हैं? यहां हम जिस बात पर जोर देना चाहते हैं वह यह है कि किसी भी मापन के लिए एक शुरुआती बिन्दु होता है और एक अंतिम बिन्दु तथा कोण मापन और दूरी मापन में यह साझा बात है। जैसे सेंटीमीटर, मीटर दूरी नापने की इकाइयां हैं, उसी तरह अंश, कोण मापने की इकाई है। शिक्षाविद् हैन्स फ्राउडेन्थल के अनुसार कोण ही एकमात्र ऐसी चीज है जिसकी एक कुदरती इकाई (एक पूरा चक्कर) है। अब, आपके पास दूरी (लम्बाई) के दो माप हों, तो आप उन्हें जोड़ सकते हैं और गुणा कर सकते हैं। कोण को लेकर क्या होता है? क्या लम्बाई के मापों की तरह हम कोण के मापों को भी जोड़-गुणा कर सकते हैं? बच्चों को ऐसे सवालों पर विचार करने का मौका दिया जाना चाहिए। परन्तु उससे पहले जरूरी होगा कि हम उन्हें कोणीय मापन की इकाई का अहसास दें। आइए कक्षा 5 की एक शिक्षक से सुनते हैं कि वे बच्चों को कोणीय मापन की इकाई समझने में मदद देने हेतु आमतौर पर क्या करती हैं?

उदाहरण 3 : मैं सबसे पहले कोणों का एक संग्रह तैयार कर लेती हूँ । इसके लिए मैं गत्ते पर अलग-अलग व्यास के गोले बना लेती हूँ और उन्हें व्यास खींच-खींचकर खंडों में बांट देती हूँ, जैसा कि चित्र 13 क, ख और ग में दिखाया है।



चित्र 13

आप देख सकते हैं कि वृत्त I को $15-15^\circ$ के खंडों में, वृत्त II को $45-45^\circ$ के खंडों में तथा वृत्त III को $90-90^\circ$ के खंडों में बांटा गया है। अब हम हर वृत्त में से कुछ खंड काट सकते हैं।



चित्र 14

अब हम बच्चों से कह सकते हैं कि वे कोण के साइज के अनुसार इन खंडों के समूह बनाएं। हम 90° वाले खंडों को समकोण (बच्चे समकोण से परिचित ही हैं), 45° वाले खंडों को लालकोण तथा 15° कोण वाले खंडों को भूराकोण कह सकते हैं। (देखें चित्र 14)।

अब हम बच्चों से कह सकते हैं कि वे खंडों को एक-दूसरे के ऊपर रखकर कोणों की परस्पर तुलना करें। वे यह बता पाएंगे कि समकोण, लालकोण से बड़ा है और लालकोण, भूराकोण से बड़ा है। अब हम भूरे कोण को कोण की इकाई मान लेते हैं। अब हम भूरे वाले कोणों को चित्र 15 क में दिखाए अनुसार लालकोण के ऊपर एक-दूसरे से सटाकर रख सकते हैं।



चित्र 15

इससे बच्चों को यह समझने में मदद मिलेगी कि तीन भूराकोण से एक लालकोण बनता है। यानी हम कह सकते हैं कि एक लालकोण तीन कोण इकाइयों से बनता है। इसी प्रकार से बच्चे यह भी देख सकते हैं कि 6 भूराकोण मिलकर 1 समकोण के बराबर होते हैं। यानी 1 समकोण 6 कोण इकाई के बराबर है। अब हम उनसे कह सकते हैं कि तिकोन जैसी कुछ परिचित आकृतियों में कोणों को नापें। वे देखेंगे कि इसका हर कोण 4 इकाई है। इस तरह की गतिविधि से बच्चों को यह समझने में मदद मिलेगी कि मापन की इकाई होती कैसी है। इसके बाद हम उन्हें कोण की सर्वमान्य इकाई यानी 1 अंश के बारे में बता सकते हैं। आप उन्हें बता सकते हैं कि 1 अंश बहुत ही छोटा खंड होता है। भूरे कोण को 15 भागों में बांटने पर 1 अंश प्राप्त होता है। इसे समझने के

लिए थोड़ी कल्पना की जरूरत होती है। आगे चलकर जब वे चांदे का उपयोग करेंगे, तो वे देख पाएंगे कि समकोण 90° का होता है क्योंकि यह 1—1 अंश दर्शाने वाले 90 खंडों के बराबर होता है।

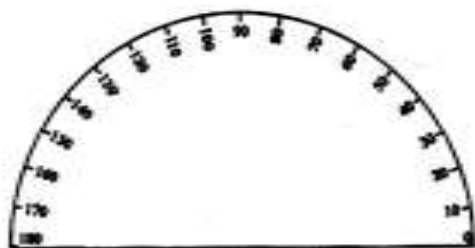
उपरोक्त उदाहरण से स्पष्ट होता है कि मापन शुरू करने से पहले जरूरी है कि बच्चों को इकाई का पता हो। लम्बाई, क्षेत्रफल और आयतन के मापन की ही तरह कोण नापने की प्रक्रिया में भी चार और मूलभूत गणितीय विचार शामिल होते हैं। ये हैं :

1. तुलना – बच्चे परिमाण के लिहाज से दो कोणों की तुलना कर पाएं।
2. संक्रामकता : यदि A, B, C तीन कोण हैं और $A > B$ व $B > C$ तो $A > C$ ।
3. संरक्षण : बच्चों को यह देख पाना चाहिए कि कोण के मापन में कौन सी चीजें प्रभावकारी नहीं हैं। जैसे $\angle$ और $\sqcap$ एक ही कोण दर्शाते हैं।
4. इकाई की समझ : इकाई का विचार पहले गैर मानक इकाइयों के माध्यम से दिया जा सकता है। इसके बाद 'अंश' बताया जा सकता है।

इसका मतलब यह है कि मापन उपकरण का उपयोग करने से पहले बच्चों को इन चार पहलुओं की समझ होनी चाहिए।

E7) कोई ऐसा खेल सुझाइए जिससे आप बच्चों को मापन की किसी इकाई के परिमाण (मात्रा) से परिचित करा सकें।

उदाहरण 4 : उसने देखा कि कोण नापते वक्त उसके अधिकतर छात्र यह तय नहीं कर पाते कि चांदे पर अंकित दो में से किस अंक को लें। कोण नापने में यह एक प्रमुख समस्या आती है। अतः उसने सोचा कि शायद ऐसा चांदा छात्रों के लिए ज्यादा आसान होगा जिस पर एक चिन्ह पर एक ही अंक लिखा हो। उसने सख्त पारदर्शी सामग्री से एक ऐसा चांदा बना लिया (यह पदार्थ वैसा ही था जैसा पैकिंग वगैरह में इस्तेमाल होता है), जैसा कि चित्र 16 में दिखाया गया है।



चित्र 16

उसने सोचा कि इसी कक्षा के अगले बैच के लिए वह इस चांदे का इस्तेमाल करेगा। इसी बीच उसके पड़ोसी का 11 साल का बच्चा कोण नापने में कोई दिक्कत लेकर उसके पास आया। उसने अपना चांदा इस लड़के पर आजमाया। शायद आपकी यह जानने में दिलचस्पी हो कि उसने चांदे का इस्तेमाल कैसे किया और इस पर छात्र ने क्या किया आइए उसी की जुबानी सुनते हैं।

'बीजू' नाम का यह लड़का मेरे पास अपनी नोटबुक और कम्पास बॉक्स (Geometry box) लेकर आया। उसे कोण नापने में मदद चाहिए थी। उसने मुझे बताया कि उसे समझ नहीं आ रहा था कि चांदे पर लिखे अंकों की दो कतारों में से किसे लेना चाहिए। पहले तो मैंने यह पता लगाया कि वह यह अच्छी तरह समझा है या नहीं कि कोण क्या होता है। पता चला कि कोण की अवधारणा को लेकर उसके मन में कई गलतफहमियां हैं।

लिहाजा मैंने पहले इन गलतफहमियों को दूर किया। इसके बाद मैंने उसे किसी रेखाखण्ड की लम्बाई नापने का तरीका याद दिलाया।

मैं : तुम कैसे पता करोगे कि मैं तुमसे कितना अधिक लम्बा हूँ?

उसने मुझे दीवार से सटाकर खड़ा किया और दीवार पर एक निशान लगाया जो मेरा कद दिखाता था। फिर वह खुद दीवार से सटकर खड़ा हो गया और मुझसे निशान लगवा लिया। दोनों निशान पास-पास थे। अब उसने दोनों निशानों से शुरू करके एक-एक सरल रेखा फर्श पर खींची और इनकी लम्बाई एक सेंटीमीटर पैमाने से नापी। फिर उसने दोनों मापों के अन्तर की गणना की।

मैं : बहुत अच्छे। यानी हम दो ऊँचाइयों का अंतर निकालकर जरूरी ऊँचाई पता कर सकते हैं। अब मान लो हमें दो कोणों की तुलना करनी है, तो वह कैसे करें? हमें उन दोनों कोणों को नापना पड़ेगा। यह एक यंत्र है जिसे मैं कोण मापने के लिए इस्तेमाल करूँगा। (मैंने उसे चांदा दिखाया। उसने देखकर शून्य अंश, 10 अंश, 20 अंश, तथा 180 अंश के निशानों पर लिखे अंक पढ़ डाले।)

मैं : अंश का मतलब क्या होता है? अंश से हमें क्या पता चलता है?

बीजू : जब भी हम कोण लिखते हैं तो हमें उसके ऊपर ° लिखना होता है। ऐसे (उसने चांदे की ओर इशारा किया)।

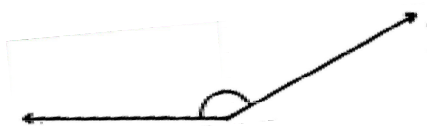
मैं : पर क्या तुम्हें पता है कि ऐसा क्यों लिखते हैं?

बीजू : नहीं।

मैं : जब हम लम्बाई का नाप लिखते हैं तो हम सेंटीमीटर या मीटर में लिखते हैं। जब हम वजन का नाप लिखते हैं तो ग्राम, किलोग्राम, वैगरह में लिखते हैं। सेंटीमीटर, मीटर, किलोग्राम वैगरह शब्दों का क्या अर्थ है? ये क्या हैं?

बीजू : ये मापन की इकाइयां हैं।

मैं : बढ़िया। इसी तरह अंश कोण नापने की इकाई है। (मैंने इस चर्चा को यहीं छोड़ दिया। ज्यादा विस्तार में नहीं गया क्योंकि मुझे लगा कि शायद वह इस वक्त इतना सब नहीं समझ पाएगा।) चलो अब देखते हैं कि इस कोण को कैसे नापें? (उसने चित्र 17 जैसा कोण नोटबुक में बनाया।)



चित्र 17

इस कोण को नापने के लिए चांदे को इस तरह रखते हैं कि चांदे का मध्य बिन्दु ठीक उस जगह रहे जहां दोनों रेखाएं मिलती हैं। इस जगह को कोण का शीर्ष कहते हैं। (उसने चांदे को वहां रखकर कहा) फिर यह देखते हैं कि चांदा दोनों किरणों को ढंक लें। अब दोनों किरणों के ऊपर पड़ने वाले अंकों को लिख लेते हैं। आसानी से करने के लिए मैं इन किरणों को R_1 और R_2 नाम दे देता हूँ।

बीजू : R_1 किरण 30° और 40° के बीच है तथा R_2 किरण 170° और 180° के बीच है।

मैं : (R_1 की ओर इशारा करके) यह किरण 30° के ज्यादा करीब है और दूसरी किरण 180° के ज्यादा करीब है। इसे हम यों लिख सकते हैं (मैंने इसे इस तरह लिखा :)

$$R_1 \text{ पर रीडिंग} = \text{लगभग } 30^\circ$$

$$R_2 \text{ पर रीडिंग} = \text{लगभग } 180^\circ$$

$$\text{दोनों रीडिंग का अंतर} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

मैं : अब क्यों न इस चांदे को इस तरफ घुमाकर देखें (उसने दिशा हाथ से बताई)। लेकिन मध्य बिन्दु अपनी जगह से नहीं हिलना चाहिए। मैंने उससे ऐसा करवाया। अब बताओ क्या रीडिंग आई?

उसने बताया कि R_1 पर रीडिंग 20 और 10 के बीच है जबकि R_2 पर रीडिंग 170 और 160 के बीच है। मैंने उसे बताया कि जब रीडिंग दो कोणों के बीच हो तो हम उन दोनों के बीच की रीडिंग लिख लेते हैं। यानी मैंने उससे लिखवाया :

$$R_1 \text{ पर रीडिंग} = \text{लगभग } 15^\circ$$

$$R_2 \text{ पर रीडिंग} = \text{लगभग } 165^\circ$$

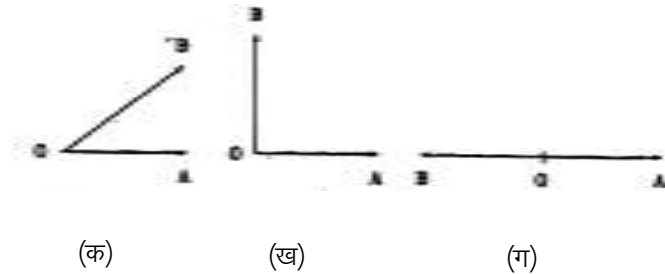
$$\text{अंतर} = 165^\circ - 15^\circ = 150^\circ$$

बीजू : उत्तर वही आया।

मैं : इससे पता चलता है कि अगर तुम चांदे के मध्य बिन्दु को शीर्ष से न हटाओ और फिर चाहे चांदे को किसी भी स्थिति में रखो, दो रीडिंग के अंतर से तुम्हें कोण का नाप मिल जाएगा।

बीजू : सचमुच? एक बार फिर करके देखता हूँ। (उसने करके देखा और उसे यकीन हो गया।)

इसके बाद मैंने उसे 60° , 30° , 40° , 90° वगैरह के कोण दिखाए और चांदे से नापने को कहा। फिर मैंने चित्र 18 (क) में दर्शाए अनुसार एक कोण OAB खींचा और कहा कि अगर OB घड़ी से वामवर्ती (anti clockwise) दिशा में घूमे और चित्र 18 (ख) की तरह हो जाए, तो यह नया कोण कितना होगा? उसने चांदे से नापा और बताया कि नया कोण 90° है। मैंने फिर कहा कि अब अगर OB घड़ी से उल्टी दिशा में और घूमकर चित्र 18 (ग) की तरह हो जाए तो तुम्हें कितने का कोण मिलेगा? उसने पाया कि यह कोण 180° है। इसके बाद मैंने 90° के आधार पर समकोण, न्यून कोण और अधिक कोण शब्दों से उसका परिचय कराया। आखिर में मैंने उसे यह बताया कि अपने कम्पास बॉक्स के चांदे का इस्तेमाल कैसे करें। मैंने ऐसी कोई शर्त नहीं लगाई कि कम से कम एक किरण निशान पर होनी ही चाहिए।



चित्र 18

मैंने उससे यह पक्का देख लेने को जरूर कहा कि चांदे का मध्य बिन्दु कोण शीर्ष पर हो।

पहले तो मैंने उसे यह समझाया कि चांदे का मध्य बिन्दु कहाँ है। मैंने उससे कहा कि इस पर O अंकित कर लें।

मेरे ख्याल में बच्चों को यह जानना चाहिए कि मध्यबिन्दु कहाँ है और इसे ढूँढना क्यों जरूरी है। ऐसा इसलिए क्योंकि मैंने ऐसे चांदे देखे हैं जिन पर O साफ-साफ अंकित नहीं होता। ऐसा होने पर भी बच्चों को चांदे का सही-सही इस्तेमाल कर पाना चाहिए।

फिर मैंने उससे चांदे के मध्य बिन्दु को ठीक कोण के शीर्ष पर जमाने को कहा और यह पक्का करने को कहा कि दोनों किरणें चांदे से ढंक जाएं। फिर मैंने उससे कहा कि अब पहले वाले चांदे की तरह ही रीडिंग ले। मैंने उसे बताया कि रीडिंग लेते वक्त अंकों की एक ही कतार को देखें। यानी या तो दोनों रीडिंग ऊपरी अंक की हों या दोनों रीडिंग निचले अंक की हों। फिर मैं उसे कोण नापते हुए देखता रहा। वह हर मर्तबा ऊपर वाले चिन्ह को देखता था। अतः मैंने उससे नीचे निशानों का उपयोग करके देखने को कहा कि क्या माप में कोई अंतर आता है। इस तरह के कुछ और अभ्यास के बाद वह बखूबी चांदे का उपयोग करने लगा।

E8) E6 के अपने उत्तर को देखिए। क्या उदाहरण 4 में बताई गई शिक्षण रणनीति से उन गलतियों को सही किया जा सकेगा जो आपने पायी थीं? अगर नहीं तो क्यों?

E9) कागज मोड़कर 45 का कोण कैसे बनाएंगे?

एक बात यह ध्यान रखनी चाहिए कि किसी बच्चे को सिर्फ इतना बताने से काम नहीं चलता कि किसी चीज को कैसे नापें। जरूरत इस बात की होती है कि आप उसे तरह-तरह की चीजें दे और उन्हें इस्तेमाल करके मापन की अपनी दिक्कतों को सुलझाने की कोशिश करने दें। शिक्षक को तो सवाल पूछने वाले की भूमिका निभानी चाहिए।

जिन पियाजे के अनुसार चार छात्रों को दिए गए इस तरह के सवाल के संदर्भ में विकास की चार अवस्थाएं होती हैं।

अवस्था 1 : मापन नहीं किया जाता, सिर्फ उसकी नकल की कोशिश होती है।

अवस्था 2 : रेखीय मापन के सवाल तो सुलझा लेते हैं मगर कोणीय मापन में शामिल कारकों का अंदाजा नहीं होता।

अवस्था 3 : रेखीय मापन से जुड़े सवाल तो हल कर पाते हैं और कोणीय मापन के सवाल हल करने के लिए कुछ अधिकचरी धारणाओं का सहारा लेते हैं, जबकि धारणाओं का सही उपयोग पता नहीं होता।

अवस्था 4 : सही तरीका इस्तेमाल करके रेखीय व कोणीय दोनों तरफ के मापन वाले सवालों को सुलझा सकते हैं। नीचे दी हुई बातों से शिक्षक को यह जानने में मदद मिलेगी कि बच्चे क्या कर रहे हैं और क्या सोच रहे हैं।

1. बच्चों को मापन की गतिविधियों में शामिल करें।

2. एक-एक बच्चे को और बच्चों के छोटे-छोटे समूहों का अवलोकन करें और उनसे बातचीत करते हुए उनकी गतिविधियों में शामिल हों।

3. दो-दो बच्चों को एकसाथ काम करने दें। अगर कोई छात्र किसी शारीरिक दिक्कत की वजह से कोई गतिविधि नहीं कर पाता तो उसका साथी उसे गतिविधि समझा सकेगा या करके दिखा सकेगा।

4. गलतफहमियों को समझिए।
5. समस्याओं को सुलझाने के लिए गतिविधियां बताइए।

अन्त में हम एक बार फिर इस बात पर जोर देना चाहेंगे कि बच्चों को कोण नापना सिखाने से पहले आप यह जांच जरूर लें कि वह कोण की अवधारणा समझते हैं या नहीं। पिछले भाग में हमने ऐसी कुछ गतिविधियां दी हैं जिनसे बच्चों को यह अवधारणा विकसित करने में मदद मिलेगी।

सारांश

इस पाठ में हमने इन बातों पर चर्चा की :

1. बच्चों को कोण का मतलब समझाने के कुछ तरीके।
2. कोणों को उनकी साइज के आधार पर वर्गीकृत करने में बच्चों की मदद कैसे करें।
3. चांदे से कोण नापने में बच्चों को आने वाली कुछ दिक्कतें और इन दिक्कतों को सुलझाने के कुछ उपाय।

पाठ — 13

मापन की शुरुआत

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - लम्बाई मापना
 - गैर मानक और मानक इकाइयाँ
 - मानक इकाइयाँ
 - उप-इकाइयाँ और मिश्रित इकाइयाँ
 - क्षेत्रफल का अर्थ क्या है
 - क्षेत्रफल मापना
 - आयतन नापना
 - धारिता बनाम आयतन
- सारांश

परिचय

मापन एक ऐसा हुनर है जो हर व्यक्ति के जीवन में जरूरी है। हममें से हर व्यक्ति को कुछ-न-कुछ नापना ही पड़ता है। हमें कुएं से पानी खींचने के लिए रस्सी के नाप की जरूरत पड़ सकती है, खिड़की-दरवाजों के लिए पर्दे के कपड़े की लम्बाई बतानी होती है, हमारे भावी मकान के बेडरूम का साइज तय करना पड़ सकता है, वगैरह। इन सभी मामलों में नापने की बात आ जाती है। दरअसल मापन का अर्थ होता है कि किसी चीज के साइज को मात्रात्मक रूप में पता/व्यक्त करना। जब मात्र गुणात्मक विवरण से काम न चले तो हम किसी चीज की लम्बाई, क्षेत्रफल या आयतन दर्शाने के लिए उसे एक संख्या दे देते हैं। बच्चों को मापन की कई प्रणालियां सीखनी पड़ती हैं। इनमें से लम्बाई, क्षेत्रफल, कोण और आयतन प्रारंभिक स्कूल के गणित में शामिल हैं।

इस पाठ में साइज की एक सहज धारणा देने के बाद साइज के मापन के विभिन्न चरणों की चर्चा की गई है। हमने खास तौर से मापन के दौरान होने वाली गलतियों पर ध्यान दिया है। इस संदर्भ में देखा गया है कि कक्षा 5 व 6 के अधिकांश बच्चे, लम्बाई, क्षेत्रफल और आयतन के बीच भेद नहीं कर पाते। बच्ची किसी रटे-रटाए सूत्र का उपयोग करके किसी ज्यामितीय आकृति का क्षेत्रफल निकाल लेगी परन्तु उसे यह पता नहीं होता कि उसने वास्तव में किस चीज का परिकलन किया है। वह यह नहीं समझा सकती है कि एक वर्ग के क्षेत्रफल या किसी डिब्बे के आयतन का अर्थ क्या है। नतीजा यह होता है कि वह अपने ज्ञान का इस्तेमाल किसी नई परिस्थिति में करने में असमर्थ रहती है। मसलन यदि उससे किसी कमरे की चारों दीवारों पर पलस्तर करने की लागत पता करने को कहा जाए, तो वह पूछेगी, “मैडम, मैं पहले क्षेत्रफल निकालूं या आयतन?” आपको क्या लगता है, इस भ्रम की वजह क्या है? क्या आपने कभी ऐसी स्थिति का सामना किया है? आप सुधार के क्या उपाय सुझाएंगे? हम इस पाठ में ऐसी ही गलतफहमियों के कारणों पर चर्चा करेंगे।

हमने ऐसी कई गतिविधियां प्रस्तुत की हैं जिनसे बच्चे लम्बाई, क्षेत्रफल व आयतन नापने के हुनर में दक्षता हासिल कर पाएंगे। इन बाल केन्द्रित तरीकों से बच्चों को दो चीजों के साइजों की रेखीय या स्थान सम्बंधी तुलना करने में मदद मिल सकेगी। यहां हमने असमाकृतियों का क्षेत्रफल तथा ऐसी चीजों का आयतन पता लगाने के तरीकों पर भी गौर किया है।

उद्देश्य

- रोजमर्रा की स्थितियों को लम्बाई, क्षेत्रफल, आयतन व धारिता जैसी ज्यामितीय अवधारणाओं से जोड़ पाएंगे।
- बच्चों को अपने आसपास के स्थान का निरीक्षण करने में सक्षम बना पाएंगे।
- बच्चों को लम्बाई, क्षेत्रफल व आयतन की अवधारणाओं से परिचित कराने के लिए उपयुक्त विधि विकसित कर पाएं।
- अपने विद्यार्थियों की समझ का आकलन कर पाएं।
- अपनी शिक्षण-विधि के प्रभाव का आकलन कर पाएं।

लम्बाई मापना

कक्षा 6 व 7 के छात्रों की गणित की क्विज़ प्रतियोगिता में एक सवाल पूछा गया था: सेंटीमीटर में एक आदमी की ऊंचाई कितनी हो सकती है? रिकॉर्ड में जो आंकड़ा था उसमें दशमलव बिन्दु साफ नहीं दिख रहा था, संख्या 1642 से.मी. नज़र आ रही थी। दशमलव बिन्दु की सही जगह कहां होगी? हमें बहुत निराशा हुई कि 30 में से मात्र एक बच्चे ने सही जवाब दिया था। बड़ी संख्या में छात्रों ने उत्तर 16.42 से.मी. लिखा था। एक अन्य मौके पर एक स्कूल में शिक्षक के चयन हेतु साक्षात्कार के दौरान उम्मीदवार से एक प्रश्न किया गया कि “क्या आप इस कमरे की” यानी जहां हम बैठे हैं, सन्निकट ऊंचाई बता सकते हैं?” उम्मीदवार ने दीवारों पर नज़र दौड़ाई, कुछ समय तक अनुमान लगाया और बोला “लगभग 20 मीटर होगी, सर।”

क्या उक्त बच्चों व शिक्षक उम्मीदवार को ऊंचाई की अवधारणा की समझ थी? आपको क्या लगता है?

मापन में अनुमान की भूमिका महत्वपूर्ण होती है। अनुमान वह प्रक्रिया है जिसके लिए, बगैर किसी उपकरण अथवा कागज-पेंसिल पर परिकलन किए, एक सन्निकट उत्तर हासिल किया जाता है। इसके जरिए नाप की त्रुटियों को पहचानकर दूर भी किया जा सकता है बशर्ते कि बच्चे के पास इतना अनुमान हुनर हो कि वह इस प्रश्न का उत्तर खोज ले कि ‘क्या मेरा उत्तर उचित लगता है?’ अनुमान एक तरह से मापन ही है जो दिमागी ढंग से किया जाता है किसी जानी-पहचानी मानक या गैर-मानक इकाई के संदर्भ में।

किसी चीज को नापने से पहले बच्चों को उसकी लम्बाई का अनुमान लगाने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। तभी तो वे मापन में प्राप्त संख्या का अर्थ देख पाएंगे। यदि कोई बच्ची गलती से मीटर स्केल को उल्टा पकड़कर डिब्बे की लम्बाई नापने लगे जो 37 सेमी. ऊंची है, तो होगा यह कि वह 60 सेमी. का अंक पढ़कर आगे गिनने लगेगी, इकसठ, बासठ, तिरसठ, वगैरह। मगर यदि उसने नापने से पहले अनुमान लगाया है कि डिब्बा लगभग 40 सेमी. ऊंचा है, तो वह शायद अपने मापन की जांच करके अपनी गलती पकड़ लेगी।

किसी भी चीज को दो तरह से नापा जा सकता है : 1. गैर-मानक इकाई, 2. मानक इकाई के उपयोग से। पहले नापने की गैर-मानक इकाइयों की बात करते हैं।

E1) क्या आप एक खम्भे या किसी कमरे की ऊंचाई का अनुमान लगा सकते हैं? दो उदाहरण दीजिए कि कैसे साइज का अनुमान लगाने की क्षमता उपयोगी होती है।

गैर-मानक इकाइयां

आपने देखा होगा कि हम हमेशा मापन की मानक इकाइयों का इस्तेमाल नहीं करते। मानक इकाइयों का उपयोग करना—न—करना इस बात पर निर्भर है कि उस कार्य—विशेष में कितनी सटीकता की जरूरत है। मसलन अपने लॉन के लिए खाद हम मुट्ठी से नापकर संतुष्ट हो जाते हैं। इसी प्रकार से घर के कई कामकाज में हम बित्ते और कदम का इस्तेमाल कर लेते हैं।

परन्तु हम 11–12 साल के बच्चों को लम्बाई नापने की गैर-मानक इकाइयों की बात कैसे समझाएं? हम उनके सामने वास्तविक जीवन की कोई ऐसी स्थिति रख सकते हैं, जहां मापन की जरूरत पड़े। मसलन किसी कुएं से पानी खींचने के लिए रस्सी की लम्बाई पता करने की बात हो सकती है। बच्चों से पूछिए कि यदि पुरानी कमजोर रस्सी की जगह नई रस्सी लानी हो तो वे क्या करेंगे? वे रस्सी का सही साइज कैसे पता करेंगे? हो सकता है कि आपको निम्नलिखित में से कोई उत्तर मिले :

1. मैं पुरानी रस्सी लेकर दुकान पर जाऊंगी और उतनी ही लम्बाई की दूसरी रस्सी ले आऊँगी।
2. मैं पुरानी रस्सी के बराबर एक धागा काट लूंगा और धागे को लेकर दुकान जाऊंगा।
3. मैं एक डण्डी से रस्सी को नाप लूंगी और पता कर लूंगी कि रस्सी 'कितनी डण्डी' लम्बाई की है फिर डण्डी लेकर दुकान पर जाऊंगी।
4. मैं रस्सी को अपने कदम से नापकर पता लगाऊंगा कि रस्सी कितने कदम लम्बी है।
5. मैं दुकानदार से एक रस्सी ले आऊंगी। यदि यह पानी तक नहीं पहुंची तो जाकर दूसरी थोड़ी लम्बी वाली ले आऊंगी।
6. पता नहीं, कैसे करेंगे।

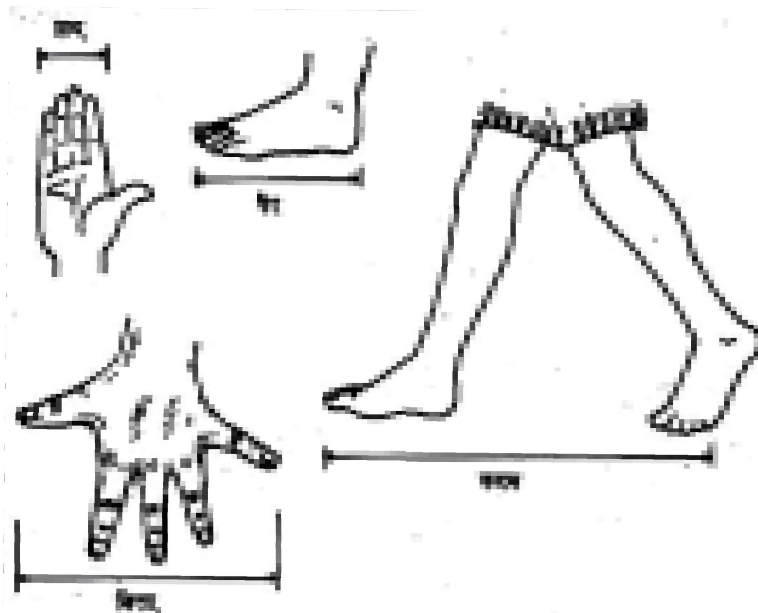
उत्तर 2, 3 व 4 से पता चलता है क्योंकि बच्चे मापन की भौतिक इकाइयों का इस्तेमाल अवश्य करते हैं मगर उन्हें पता नहीं होता है कि वे ऐसा कर रहे हैं। उन्हें विभिन्न भौतिक इकाइयों का इस्तेमाल करने का अभ्यास देने की जरूरत है। आप यह दिखा सकते हैं कि एक निश्चित साइज की डण्डी से लम्बाई कैसे नापें। हरेक से कहिए कि वह अपने आसपास की चीजों की लम्बाई निम्नानुसार लिखें :

1. बेंच — 4 डण्डी और थोड़ा सा
2. ब्लेक बोर्ड — 3 डण्डी से थोड़ा कम
2. बरामदा — 40 डण्डी ।

उपरोक्त तीनों मामलों में डण्डी एक इकाई का काम कर रही है। ऐसी इकाइयां भौतिक इकाइयां हैं क्योंकि इन्हें देखा, छुआ व गिना जा सकता है। बच्चों को विभिन्न भौतिक इकाइयों से चीजों की लम्बाई नापने का अभ्यास दिया जाना चाहिए। ये भौतिक इकाइयां माचिस की डिब्बी, पेंसिल, डण्डी, पेंसिल कलर आदि हो सकती है।

आप ऐसी गैर-मानक इकाइयां भी बता सकते हैं जो प्रत्येक बच्चे की निजी होती हैं, जैसे बित्ता, कदम वगैरह। आप उन्हें बित्ते, कदम, हाथ आदि से नापना भी सिखा सकते हैं (देखें चित्र 1)। बच्चों को इन इकाइयों के इस्तेमाल का अभ्यास दिया जाना चाहिए। आप उन्हें दिखाकर समझा सकते हैं कि बित्ते या पैर को जिस

चीज़ की लम्बाई नापनी हो, उस पर किस तरह एक-के-बाद एक सटाकर रखते हैं (एक-दूसरे पर चढ़ाए बगैर) और गिनते जाते हैं।



चित्र 1

शुरुआत में गैर मानक इकाइयों से नापने में बच्चों को किस तरह की मदद मिलती है?

इन गैर मानक इकाइयों से नापने का अभ्यास बच्चों के लिए कई तरह से मददगार होता है।

(i) इकाई में नापने की बात से बच्चों का परिचय सीधे ही रहस्यमय सेंटीमीटर जैसी चीज़ के ज़रिए न होकर, जानी-पहचानी चीज़ों के माध्यम से होता है। इस तरह से वे मापन के एक नए अनुभव के साथ-साथ एक सर्वथा नई शब्दावली के बोझ से बच जाते हैं।

(ii) छोटे बच्चों के लिए मापन के शुरुआती कार्य के लिहाज़ से गैर मानक इकाइयां ज़्यादा उपयुक्त साइज की होती हैं। सेटीमीटर बहुत छोटा है और हो सकता है कि मेज़ नापते वक्त या अपने दोस्त का कद नापते वक्त उनके लिहाज़ से सेंटीमीटरों की संख्या बहुत ज़्यादा हो जाए और इसी काम के लिए मीटर स्पष्ट रूप से बहुत बड़ी इकाई है।

(iii) गैर-मानक इकाइयों से नापने के अनुभव से बच्चों को यह गुंजाइश भी नज़र आएगी कि जब मानक पैमाना न हो या अनुपयुक्त हो, तब किसी खास काम के लिए पैमाने बनाए भी जा सकते हैं।

(iv) गैर मानक इकाई के इस्तेमाल के ज़रिए बच्चे मानक इकाई की ज़रूरत को महसूस कर पाएंगे। मसलन जब वे यह देखेंगे कि वे नापते हैं तो कमरा 20 कदम लम्बा होता है और जब शिक्षक नापते हैं तो उसी कमरे की लम्बाई 10 कदम रह जाती है।

E2) इन गैर-मानक विधियों के आधार पर आप मानक इकाइयों का विचार कैसे प्रस्तुत करेंगे? आप बच्चों को कैसे यकीन दिलाएंगे कि लम्बाई नापने में गैर मानक इकाइयां अपर्याप्त हैं?

यदि सारे बच्चे कई चीज़ों की लम्बाई बित्ते/कदम से नापें तो शायद उन्हें इस निष्कर्ष पर पहुंचने में मदद मिलेगी कि एक ही चीज़ को अलग-अलग व्यक्ति नापे तो ये इकाइयां अलग-अलग लम्बाई बताती हैं। इसको देखते हुए मापन की मानक इकाइयों का उपयोग ज़रूरी हो जाता है।

मानक इकाइयाँ

कक्षा में मानक इकाई तभी बताई जानी चाहिए जब खुद बच्चे ऐसी किसी इकाई की जरूरत महसूस करने लगे। यदि पहले झटके में ही शिक्षक ब्लैकबोर्ड पर एक रेखा खण्ड खींचकर उसकी लम्बाई स्केल से नाप दें तो बच्चे यह समझ ही नहीं पाते कि सेंटीमीटर को मानक इकाई क्यों कहते हैं। इस संदर्भ में मैं आपको वह तरीका बताना चाहूंगी जो मेरी एक दोस्त अपनी कक्षा में अपनाती है। वह प्राथमरी स्कूल शिक्षिका है।

उदाहरण 1: शिक्षिका ने कुछ बच्चों को एक-एक करके अपनी मेज के पास बुलाकर उनसे मेज की लम्बाई बित्तों से नापकर लिखने को कहा। फिर उन्होंने हर बच्चे से उसका उत्तर पूछा।

मोहन : मैडम, लंबाई 6 बित्ता है।

रानी : नहीं मैडम, लम्बाई तो 7 बित्ता है।

रवि : जी हां मैडम, 7 बिता है।

रीता : मैडम, मोहन सही कह रहा है। लम्बाई 6 बित्ता है।

इस तरह उन्होंने 2-3 और बच्चों से पूछा। उनके उत्तर भी 6-7 बित्ता थे।

शिक्षिका : ठीक है। अब मैं नापती हूँ। अरे, यह तो 5 बित्ता ही निकली।

रानी : मैडम, हमारे नाप अलग-अलग क्यों आ रहे हैं?

शिक्षिका : क्या कोई रानी के सवाल का जवाब दे सकता है।

मोहन : मैडम, नाप अलग-अलग इसलिए हो सकते हैं क्योंकि मेरा हाथ रानी से बड़ा है और आपका हाथ मुझसे बड़ा है।

शिक्षिका : सही बात है। हम सबके बित्ते की लम्बाई अलग-अलग है। इसलिए अलग-अलग उत्तर आ रहे हैं। चलो एक काम करते हैं। मेरे पास यह एक डण्डी है। इससे मेज की लम्बाई नापते हैं। फिर शिक्षिका ने कुछ अन्य बच्चों को बुलाया जिन्हें पहली बार मौका नहीं मिला था। उनसे मेज की लम्बाई डण्डी की मदद से नापने को कहा। प्रत्येक बच्चे ने लम्बाई नापकर 4 डण्डी बताई।

शिक्षिका : क्या तुम सब सहमत हो कि मेज की लम्बाई 4 डण्डी है?

सब बच्चे : जी मैडम।

शिक्षिका : इस समय क्या मैं इस डण्डी को नापने की मानक इकाई मान सकती हूँ?

सब बच्चे : जी मैडम।

शिक्षिका काफी खुश थी कि बच्चे नापने में मानक इकाई की जरूरत को समझ गए हैं। फिर उसने उनका ध्यान कपड़े के व्यापारी की ओर दिलाया जो कपड़ा नापता है। फिर उसने बच्चों से कहा कि उन्होंने देखा होगा कि कपड़ा नापने के लिए वह एक छड़ का इस्तेमाल करता है। इस छड़ को मीटर स्केल कहते हैं। इस छड़ का इस्तेमाल सब जगह लम्बाई नापने के लिए किया जाता है। इसलिए इसे दुनिया भर के सब लोग अपनाते हैं। इसलिए यह लम्बाई नापने की एक मानक लम्बाई है।

E3) क्या आप कोई ऐसी गतिविधि सोच सकते हैं जिससे बच्चा मीटर स्केल का उपयोग किए बगैर एक मीटर लम्बाई नाप सके?

E4) आप इस बात का मूल्यांकन कैसे करेंगे कि किसी बच्चे ने एक मीटर लम्बाई का अहसास हासिल कर लिया है?

उप-इकाइयां और मिश्रित इकाइयां

बच्चे के मन में यह सवाल आना स्वाभाविक है कि यदि उसके पास सिर्फ एक मीटर की स्केल हो, तो ऐसी लम्बाई को कैसे नापेंगे जो एक मीटर से कम हो या एक मीटर से थोड़ी ज्यादा हो।

इस मामले में भी बच्चों के सामने वास्तविक जीवन की कोई ऐसी स्थिति रखनी होगी जहां उन्हें ऐसी छोटी इकाई की जरूरत महसूस हो। 10–11 वर्ष की हर बच्ची से अपनी ऊंचाई नापने को कहा जा सकता है। वह देखेगी कि वह 1 मीटर से ज्यादा लम्बी है मगर 2 मीटर से कम। परन्तु कितनी ज्यादा या कितनी कम? वह तो बस इतना जानती है कि उसकी ऊंचाई 1 मीटर से थोड़ी ज्यादा है।

इस मौके पर बच्चों के सामने दर्जी का फीता रखा जा सकता है जिसे बोलचाल में इंची टेप कहते हैं। उनसे पूछिए कि क्या उन्होंने ऐसी चीज कहीं देखी है और यह किस काम आती है? उनके साथ बातचीत कीजिए ताकि वे खुद ही निम्नांकित तथ्य देख सकें :

1. टेप एक मीटर से ज्यादा लम्बी है।
2. इस पर 1, 2, 3, ..., 180 के निशान लगे हैं।
3. टेप के निशान सेंटीमीटर में हैं।
4. मीटर स्केल की लम्बाई 100 सेंटीमीटर है।
5. 100 सेंटीमीटर का 1 मीटर होता है।
6. टेप को उपयोग से किसी भी चीज की लम्बाई नापी जा सकती है, चाहे वह लम्बाई 1 मीटर से कम हो या 1 मीटर से ज्यादा हो।

ऐसी छोटी इकाइयों की जरूरत को स्पष्ट करने के लिए रुपए और पैसे का उदाहरण दिया जा सकता है। यह जांचने के लिए कि बच्चे मीटर और सेंटीमीटर का आपसी सम्बंध समझ गए हैं, उन्हें कई सारे मौखिक सवाल भी दिए जा सकते हैं। जैसे—

1. एक छड़ मीटर स्केल से 20 से.मी. छोटी है। इसकी लम्बाई कितनी है?
2. कमीज़ का एक कपड़ा मीटर स्केल से 30 से.मी. ज्यादा है। यह कितना लम्बा है?
3. 1 मीटर 10 से.मी. ज्यादा लम्बा है या 110 से.मी.?
4. निम्नलिखित चीजों में से कौनसी चीजें 1 से.मी. से कम लम्बाई की होगी?

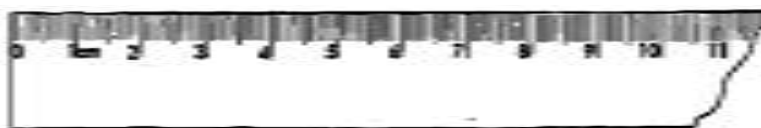
1. माचिस की तीली	2. जीरा
3. टुथ ब्रश	4. तुम्हारे बाल की मोटाई

E5) लम्बाई नापने की एक इकाई के रूप में आप मिलीमीटर से बच्चों का परिचय कैसे कराएंगे?

अपने बनाए स्केल और मीटर स्केल के साथ काफी अनुभव के बाद बच्चों को सामान्य 15 से.मी. वाली स्केल से परिचित कराया जा सकता है। इस पर निशान लगे होते हैं तथा ये निशान से.मी. के होते हैं। बच्चों को प्रायः नापते वक्त स्केल को सही रखने में दिक्कत होती है। बाजार में मिलने वाली कई स्केलों में निशान एकदम सिर से लगे होते हैं (देखें चित्र 2 क) परन्तु कुछ स्केलों में दोनों सिरों से थोड़ी जगह छोड़कर निशान लगे होते हैं (देखें चित्र 2 ख)।



चित्र 2 (क)



चित्र 2 (ख)

इन स्केलों का उपयोग करते वक्त बच्चे अक्सर जो गलतियां करते हैं, वे हैं,

- वे नपाई शून्य से शुरू करने की सावधानी नहीं बरतते।
- वे स्केल के एक सिरे को चीज़ के सिरे की सीध में रख लेते हैं। ऐसा करते हुए वे यह ध्यान नहीं रखते कि स्केल पर शून्य का निशान कहाँ है (देखें चित्र 3 क)। वे तब भी ऐसा ही करते हैं जब स्केल का सिरा टूट फूट गया हो और शून्य नज़र ही नहीं आता। इसकी वजह से जो उत्तर आता है वह वास्तविक लम्बाई से कम होता है।



चित्र 3 (क)

- कई बच्चे रेखाखण्ड के सिरे को स्केल पर लगे '1' के निशान की सीध में रखते हैं (चित्र 3 ख) परन्तु नाप लेते हुए इस बात का ध्यान नहीं रखते कि यदि वह शून्य के अलावा किसी भी निशान से नापना



चित्र 3 (ख)

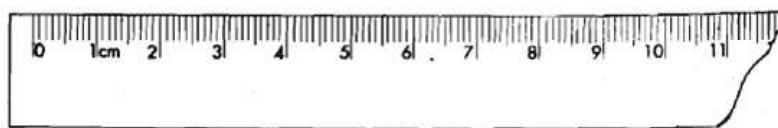
शुरू करते हैं तो इस बात का ध्यान रखते हुए ही उन्हें अपना नाप लिखना चाहिए। नतीजा यह होता है कि उनका परिणाम वास्तविक लम्बाई से 1 से.मी. या उससे भी ज्यादा आता है। स्केल को सही-सही रखने के लिए कुछ पूर्व हुनर ज़रूरी है। अपने शिक्षक या किसी और को नापते देखने से बच्चों को नापने का अनुभव नहीं मिलता। उन्हें यह अनुभव खुद करके ही हासिल करना होगा। परन्तु कुछ भी नापना शुरू करने से पहले ज़रूरी होगा कि उन्हें स्केल इस्तेमाल करने का सही तरीका सिखाया जाए। सिखाते वक्त उनके द्वारा आमतौर से की जाने वाली गलतियों को मदद नज़र रखना होगा।

E6) लम्बाई नापने के लिए किसी भी स्केल का सही उपयोग करने में आप बच्चों की मदद कैसे करेंगे?

पहले आप उन्हें यह दिखा सकते हैं कि 3 से.मी., 4 से.मी., 5 से.मी. या फिर 10 से.मी. वगैरह की चीजों/रेखाखण्डों की लम्बाई कैसे नापी जाती है। इसके लिए आप सारी उपलब्ध स्केलों का इस्तेमाल कर सकते हैं। आप उन्हें दिखा सकते हैं कि स्केल को किसी भी स्थिति में रखें, रेखाखण्ड की लम्बाई 6 से.मी. है, तो 6 से.मी. ही रहेगी। इसके बाद उन्हें अनुमान लगाने दें कि कोई चीज/रेखाखण्ड 4 से.मी. व 5 से.मी. के बीच की लम्बाई की है। तब आप उन्हें दिखाइए कि इसे कैसे नापेंगे। आप उन्हें दिखाइए कि किसी रेखाखण्ड मसलन 4.3 से.मी. लम्बाई के किसी रेखाखण्ड को नापते वक्त स्केल को कैसे पढ़ा जाता है। विभिन्न स्थितियों में स्केल रखकर यह बात स्पष्ट कीजिए (देखें चित्र 4 क, ख, ग)।



चित्र 4 (क)



चित्र 4 (ख)



चित्र 4 (ग)

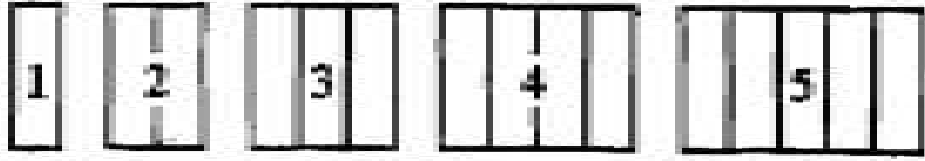
शुरुआत में बच्चों को कोई भी चीज नापने को कहा जा सकता है या एक निश्चित लम्बाई की कागज की पट्टियां या धागे के टुकड़े काटने को कहा जा सकता है। हर बच्चा अपनी पट्टी या धागे की तुलना अपने साथी की पट्टी या धागे से करके पता करे कि क्या उसने लम्बाई सही नापी थी या नहीं। आप भी उनकी पट्टियों की जांच कर सकते हैं। जब आप बच्चों के प्रदर्शन से संतुष्ट हो जाएं, तो उनसे एक निश्चित लम्बाई की रेखा बनाने या स्केल से किसी रेखाखण्ड की लम्बाई नापने को कह सकते हैं।

E7) आप अपनी कक्षा में इस बात का मूल्यांकन कैसे करेंगे कि बच्चों ने लम्बाई नापने की दक्षता हासिल कर ली है?

मापन के उपयुक्त साधन (उपकरण) का चुनाव भी एक ऐसा हुनर है जो बच्चे को हासिल करना होगा। उसे दिए गए कार्य को सम्पन्न करने के लिए उपलब्ध साधनों में से सबसे उपयुक्त साधन का चुनाव करना आना चाहिए। इस संदर्भ में निम्नलिखित गतिविधि मददगार हो सकती है।

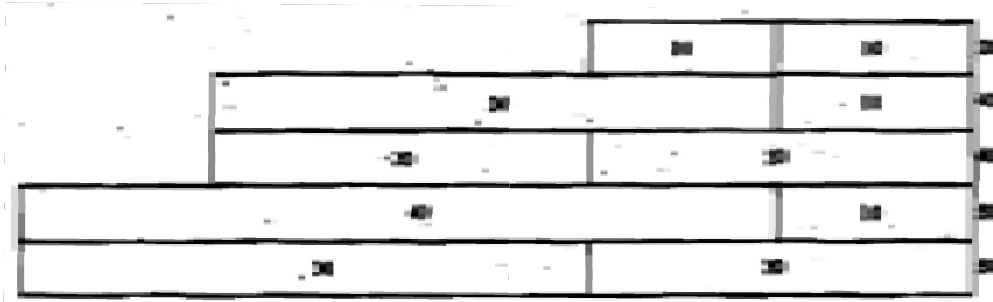
उदाहरण 2 : बच्चों को एक इंची टेप, एक मीटर स्केल, एक 30 से.मी. स्केल, और 15 सेंटीमीटर की स्केल दे दीजिए। उन्हें टोलियों में चर्चा करके पता लगाने दीजिए कि क्यों इनमें से कुछ साधन प्राप्त करने वाली कुछ लम्बाइयों को नापने के लिए उपयुक्त नहीं होते। (मसलन 15 से.मी. वाली स्केल बरामदा नापने के लिए ठीक नहीं है।) वे किसी कापी, बेंच, पेंसिल, अपनी ऊंगली, बरामदे या किसी चौकोर खम्भे के आसपास की लम्बाई नापें। बच्चों को तय करने दीजिए कि कौन सी लम्बाई नापने के लिए कौन-सी स्केल उपयुक्त रहेगी और क्यों?

उदाहरण 3 : बच्चों को समान चौड़ाई की मगर 1 से.मी. से 10 से.मी. लम्बाई की अलग-अलग कागज़ की पट्टियां बनाने को कहिए। वे हर पट्टी पर उसकी लम्बाई भी लिखें (देखिए चित्र 5)।



चित्र 5

उनसे 10 से.मी., 20 से.मी., 30 से.मी. (यानी लम्बाई 10 से.मी. की गुणज) की कागज़ की 10 पट्टियां बनवाइए। अब आप बड़ी लम्बाई वाली कुछ पट्टियों को फर्श पर बिछा दें और बच्चों से कहें कि वे इन्हें छोटी वाली पट्टियों से ढंके। ढंकने का काम इस तरह से करें ताकि छोटी पट्टियां कम से कम लगे (देखिए चि. 6)।



चित्र 6

मापन के लिए उपयुक्त साधन के चयन से एक फायदा यह भी होता है कि मापन में होने वाली त्रुटियां कम हो जाती हैं। परन्तु एक बात जो हमें याद रखनी चाहिए वह यह है कि कोई भी मापन एकदम सही नहीं होता। मापन का बेहतर उपकरण ज्यादा बेहतर सन्निकटन देगा। एक उपकरण हमें बताता है कि कोई लम्बाई 43 और 44 से.मी. के बीच है जबकि कोई अन्य उपकरण हमें बता सकता है कि वही लम्बाई 43.3 और 43.4 से.मी. के बीच है।

गलत नाप मिलने या मापन में त्रुटि होने के कई कारण हो सकते हैं। यहां हम कुछ कारण दे रहे हैं।

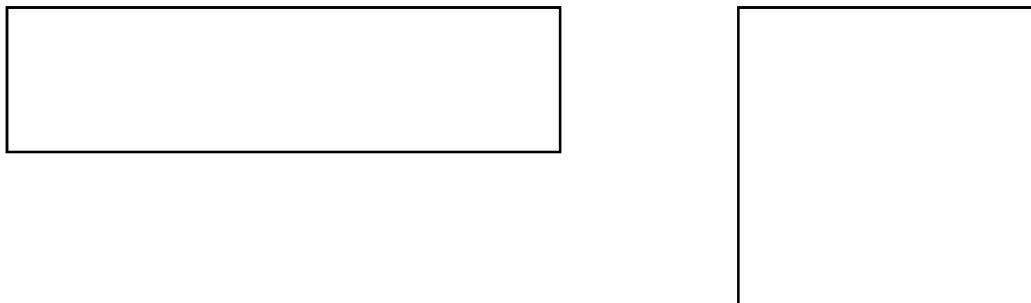
1. निर्माण के समय मापन यंत्र में रह गई को खामी।
2. चिन्हित करते समय मापन यंत्र में रह गई कोई खामी।
3. मापन यंत्र का उपयोग करने वाले व्यक्ति द्वारा नाप का सन्निकटन अपने ढंग से किया जाना।
4. नाप पढ़ने में गलती।
5. नापते वक्त यंत्र को रखने में गलती।
6. एक ही यंत्र से एक ही चीज के दो व्यक्ति नापें तो भी नाप अलग-अलग आ सकते हैं।

E8) क्या आप बता सकते हैं कि ये त्रुटियां कैसे होती हैं? इनसे निपटने के लिए आप क्या उपाय सुझाएंगे? लम्बाई नापने के लिए आप किस तरह की स्केल इस्तेमाल करना चाहोगे?

साइज के अन्य नापों के दौरान आने वाली दिक्कतें।

क्षेत्रफल का अर्थ क्या है?

एक दिन मैं अपनी बहन के घर गई थी। मेरा भान्जा रवि बरामदे में कागज के दो टुकड़े हाथ में लिए बैठा था। वह कक्षा 6 में पढ़ता है। वह थोड़ा परेशान नजर आ रहा था। पूछने पर उसने बताया कि उसकी शिक्षिका ने उसे कागज के दो टुकड़े दिए हैं – एक आयताकार है और एक वर्गाकार। उसे यह पता करना है कि इनमें से ज्यादा बड़ा कौन सा है (देखें चित्र 7)।



चित्र 7

रवि ने बताया, 'कक्षा में हमारी टीचर ने हमें ऐसी ही अलग-अलग आकृति की पट्टियां दिखाई थीं और कुछ चित्र ब्लैकबोर्ड पर भी बनाए थे। उन्होंने कोई सूत्र भी समझाया था और वह कभी आयत को बड़ा बताती थीं तो कभी वर्ग को। परन्तु मुझे कुछ समझ नहीं आया।' मैंने रवि की मदद करने की सोची और मैं निम्नानुसार आगे बढ़ी।

उदाहरण 4: मैंने उसे कागज के दो टुकड़े दिखाए। इनमें से एक स्पष्ट रूप से दूसरे से बड़ा था।

मैं : थोड़ी देर के लिए तुम अपने कागजों को भूल जाओ और बताओ कि इन दोनों कागजों में से कौन सा छोटा है।

रवि को छोटा वाला कागज पहचानने में देर नहीं लगी।

मैं : तुम कैसे कह सकते हो कि यह छोटा है?

रवि ने फौरन दोनों कागज लिए और एक के ऊपर दूसरा रख दिया।

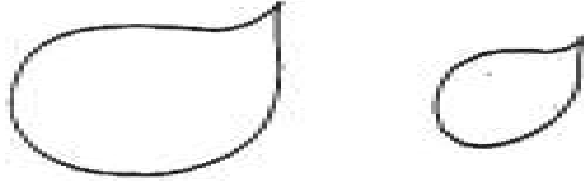
रवि : देखो यह वाला बड़े वाले कागज के ऊपर रखने पर पूरा आराम से आ जाता है। तो यह साइज में छोटा हुआ न।

मैं : साइज में छोटा! साइज से तुम्हारा क्या मतलब है?

रवि : (थोड़ा सोचने के बाद) : साइज का मतलब आं पता नहीं।

मैं : चलो मैं तुम्हें समझाती हूं।

मैंने कागज के दोनों टुकड़ों को एक कागज पर रखकर पेंसिल से उनकी रूपरेखा बना दी। (देखें चित्र 8)। मैंने थोड़ी देर उससे बातचीत की, उससे कुछ सवाल किए और उससे यह उत्तर प्राप्त कर लिया कि ये दोनों बंद समतल आकृतियां हैं।



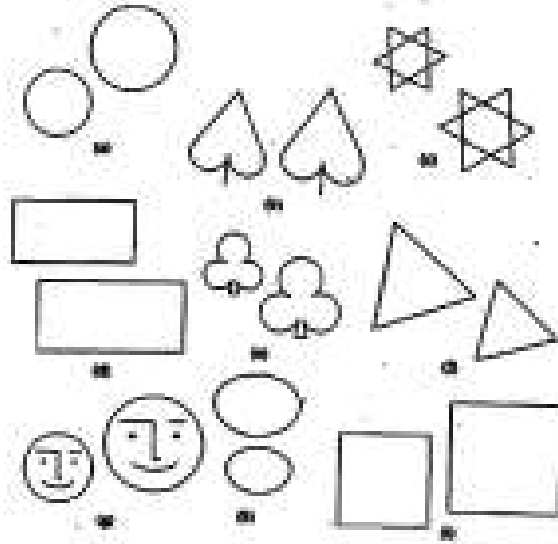
चित्र 8

मैं : देखो इन आकृतियों का फैलाव ही इनका साइज़ है। ये कागज़ पर जितनी फैली हुई हैं यानी इन आकृतियों के अन्दर जितना कागज़ या तल है वही इनका साइज़ है। क्या अब तुम बता सकते हो कि इन आकृतियों का क्षेत्रफल क्या है?

रवि : आं..... मेरे ख्याल से साइज़ और क्षेत्रफल एक ही बात है।

मैं : शाबाश! इसका क्षेत्रफल वही है जो इसका फैलाव या साइज़ है।

इसके बाद मैंने उसे इसी तरह की और आकृतियां दिखाई (देखें चित्र 9)। मगर इस बार मैंने अपनी शब्दावली बदल दी। मैंने उससे पूछा, “हरेक जोड़ी में किस आकृति का क्षेत्रफल ज्यादा है?

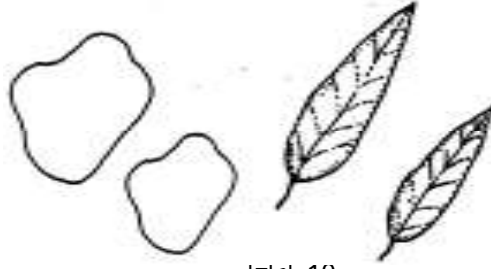


चित्र 9

इस प्रक्रिया में मैंने आकृतियों के साइज़ / क्षेत्रफल से सम्बन्धित सारी शब्दावली को दोहरा दिया। जैसे कि,

- इस जोड़ी में कौन सी आकृति बड़ी है?
- किसका साइज़ ज्यादा बड़ा है?
- कौन सी आकृति कागज के ज्यादा बड़े हिस्से को ढंके या घेरे हुए है?
- किसका फैलाव ज्यादा है?
- किसका क्षेत्रफल ज्यादा है?

रवि को हर बार सही उत्तर देने में कोई दिक्कत नहीं हुई। फिर मैंने उससे 100 रुपए के नोट और 20 रुपए के नोट के साइज़ की तुलना करने को कहा। इसी प्रकार से दो एक जैसी असमाकृतियों और दो एक जैसी दिखने वाली पत्तियों के साइज़ की तुलना भी करवाई (चित्र 10)।

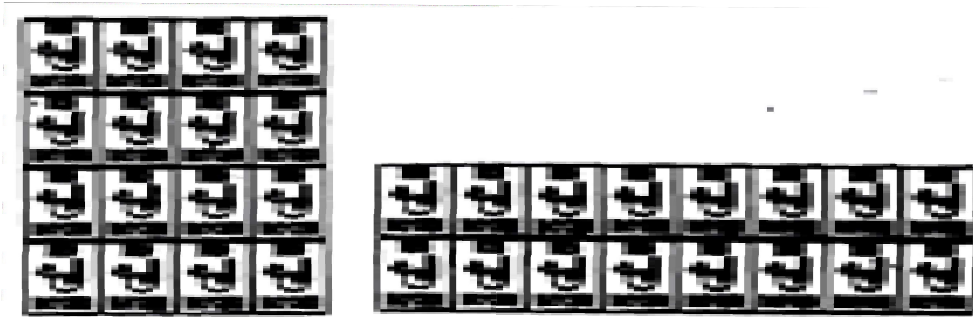


चित्र 10

मैं देखती रही कि उसने पहले दो नोटों को एक-दूसरे पर रखा, फिर दोनों आकृतियों को एक-दूसरे पर रखा और फिर दोनों पत्तियों को एक-दूसरे पर रख कर देखा। उसे यह तय करने में कोई दिक्कत नहीं हुई कि कौन सी चीज़ बड़ी है।

अब मैंने तय किया कि उसको दिए गए वर्गाकार और आयताकार कागजों पर लौटना चाहिए। जिनको लेकर वह परेशान हो रहा था (देखें चित्र 7)। रवि ने कागज के उन दोनों टुकड़ों को देखा। उसने एक को दूसरे पर रखकर देखा मगर फिर भी परेशान ही था। वह तय नहीं कर पा रहा था कि कौन सा बड़ा है। उसकी मदद करने के मकसद से मैंने सोचा कि उसके पास जो तरह-तरह के चित्रों का संग्रह है, क्यों न उनका इस्तेमाल किया जाए?

मैंने उससे कहा कि उस संग्रह में से कुछ ऐसे आयताकार या वर्गाकार चित्र ले ले, जो एक ही साइज़ के हों। रवि ने यह काम फौरन कर लिया। अब मैंने उसके दोनों कागज के टुकड़ों को फर्श पर रख दिया और उन पर ये चित्र एक-एक करके जमाना शुरू किया। मैंने सावधानी यह रखी कि दो चित्रों के बीच में कोई खाली जगह न रहे, और न ही ये एक-दूसरे पर चढ़ें हों (देखें चित्र 11)। रवि ने भी इस काम में मेरी मदद की।



चित्र 11

वह मुस्करा रहा था और काफी रोमांचित था। ऐसा लग रहा था कि वह उस बात को समझ चुका था, जो मैं उसे बताने की कोशिश कर रही थी। इससे पहले कि मैं उससे कोई सवाल पूछूं, वह चीख पड़ा।

रवि : आण्टी, ये दोनों कागज बराबर साइज़ के हैं।

मैं : तुम्हें कैसे पता चला?

रवि : मैंने दोनों कागजों पर बिछे (जमे) चित्र गिन लिए हैं। ये बराबर हैं।

मैं : शाबाश! यानी हम कह सकते हैं कि इन दोनों कागजों का क्षेत्रफल बराबर है।

इससे हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि दो बिन्दु, समतल आकृतियों के साइज/क्षेत्रफल की तुलना करने के लिए हम उन्हें एक ही साइज की छोटी इकाइयों से भर दें। ध्यान यह रखना पड़ेगा कि इनके बीच कोई जगह न छूटे और ये एक-दूसरे पर न चढ़ें। तब जिस आकृति के अन्दर ज्यादा इकाइयां भरी होंगी, वह आकृति बड़ी है। आम तौर पर हम छोटी इकाइयां वर्गाकार लेते हैं, जैसे यहां हमने तुम्हारे माचिस की डिब्बियों वाले चित्र लिए। ऐसा इसलिए करते हैं क्यों साधारण तौर पर हमारा वास्तव जिन आकृतियों से पड़ता है उनके अन्दर के तली को इन वर्गों से भरा जा सकता है। यानी वे वर्ग क्षेत्रफल नापने की इकाई बन जाते हैं। परन्तु किसी जगह को भरने के लिए हम जिस भी किसी आकृति का उपयोग करेंगे, वही मापन का साधन बन जाएगी। जैसे तुम किसी बड़े तिकोन को छोटे-छोटे तिकोनों से भर सकते हो। इस मामले में तुम्हारी मापन की इकाई ये छोटे-छोटे तिकोन बन जाएंगे। रवि खुश था। उसे यह गतिविधि करने में मज़ा आया था।

यह गतिविधि काफी आसानी से की जा सकती है और इससे बच्चे को यह समझने में मदद मिलती है कि किसी आकृति में जितने ज्यादा छोटे टुकड़े समाते हैं, उसका क्षेत्रफल उतना ही ज्यादा होता है। उन्हें यह भी समझने में मदद मिलती है कि यदि आप किसी समतल आकृति के आकार को बदल दें, तो भी उसका क्षेत्रफल वही रहता है। एक बराबर संख्या में एक ही साइज के टुकड़ों से आदमी, औरत, चिड़िया, पशु आदि की आकृतियां बनाई जा सकती हैं। इससे बच्चों को यह समझने में मदद मिलेगी कि आकृतियां अलग-अलग होने पर भी क्षेत्रफल बराबर हो सकता है।

E9) शिक्षिका द्वारा दिए गए दो कागजों में से कौन सा बड़ा है, यह पता लगाने में रवि की मदद के लिए आप क्या तरीका अपनाते?

E10) एक ऐसी गतिविधि आयोजित कीजिए जिससे बच्चों को यह समझने में मदद मिले कि अलग-अलग आकृतियों का क्षेत्रफल बराबर भी हो सकता है।

जब बच्चे यह समझ जाएंगे कि किसी भी समतल आकृति का फैलाव ही उसका क्षेत्रफल होता है और वे दो सम आकृतियों की तुलना उन पर कोई जानी-पहचानी छोटी इकाई बिछाकर करने लगेंगे तो जल्दी ही उन्हें भी समझ आ जाएगा कि समतल आकृतियों को भरने के लिए जब हम अलग-अलग छोटी इकाइयों का इस्तेमाल करते हैं तो हमें उसी हिसाब से अलग-अलग क्षेत्रफल मिलता है। तब वे स्वाभाविक रूप से यह सवाल करेंगे कि जिस तरह हम पेंसिल, मेज, कमरे आदि की लम्बाई को व्यक्त करते हैं, वैसे क्षेत्रफल को कैसे व्यक्त करें? इस वक्त उनका परिचय क्षेत्रफल नापने की इकाई से कराया जाना चाहिए। आइए देखें कि वह तरीका जो अधिकातर स्कूलों में अपनाया जाता है से इसे करने पर क्या दिक्कतें सामने आती हैं और इसमें सुधार लाने के कुछ सुझावों पर भी हम गौर करेंगे।

क्षेत्रफल नापना

अधिकांश बच्चे काफी मशीनी ढंग से सूत्र का इस्तेमाल करके क्षेत्रफल का परिकलन करते हैं। ऐसा करते हुए वे यह नहीं समझ पाते कि वे क्या कर रहे हैं। नतीजा यह होता है कि वास्तविक परिस्थिति में जहां उन्हें परिमिति निकालनी होती है, वे क्षेत्रफल निकाल बैठते हैं। यहां हम एक गतिविधि सुझा रहे हैं जिससे बच्चों को यह समझने में मदद मिलेगी कि किसी आयत का क्षेत्रफल लम्बाई $\times$ चौड़ाई क्यों होता है तथा इसे वर्ग सेंटीमीटर आदि में व्यक्त क्यों करते हैं।

E11) बच्चे को क्षेत्रफल मापन की मानक इकाई की जरूरत का अहसास कराने के लिए आप क्या गतिविधि करेंगे?

उदाहरण 5 : एक शिक्षिका 1 सेमी. साइज के रंग-बिरंगी कार्डबोर्ड के टुकड़े लेकर कक्षा में पहुंची।

उन्होंने कक्षा को चार टोलियों में बांट दिया और उन्हें बराबर-बराबर संख्या में कार्ड बोर्ड के टुकड़े दे दिए। फिर उन्होंने हर टोली से कहा कि अपनी पसन्द के टुकड़े मनचाही संख्या में लगाकर विभिन्न डिजाइन बनाएं। कुछ समय बाद उन्होंने टोलियों से उनके द्वारा बनाए गए डिजाइनों को लेकर सवाल पूछना शुरू किया।

शिक्षिका : (पहली टोली से) डिजाइन बनाने के लिए तुमने कितने वर्गों का उपयोग किया?

पहली टोली : मैडम 16

शिक्षिका : (दूसरी टोली से) तुम्हारे डिजाइन का साइज एक वर्ग का कितने गुना है?

दूसरी टोली : (थोड़ा सोचने के बाद) मैडम 12 गुना है।

शिक्षिका : (तीसरी टोली से) तुम्हारे डिजाइन का क्षेत्रफल कितने वर्ग है?

तीसरी टोली : 20 वर्ग है।

शिक्षिका : (चौथी टोली से) तुम्हारी आकृति का क्षेत्रफल कितना है?

चौथी टोली : मैडम हमारी आकृति का क्षेत्रफल 20 वर्गों के बराबर है।

शिक्षिका : ठीक है। अब हर टोली यह कागज ले ले और इस बार इस कागज का साइज सिर्फ एक वर्ग का इस्तेमाल करके नापो।

शिक्षिका ने हर टोली को बराबर-बराबर साइज का एक-एक आयताकार कागज दे दिया।

रानी : परन्तु मैडम, हम सिर्फ एक वर्ग से इसका क्षेत्रफल कैसे नापेंगे?

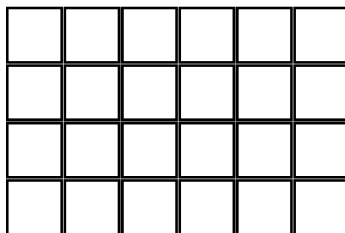
शिक्षिका : क्या कोई इस सवाल का जवाब दे सकता है?

राम : जी मैडम, मुझे याद है जिस तरह हमने पैरों से कमरे की लम्बाई नापी थी। हम हर बार फर्श पर पैर रखकर उसके साइज का निशान फर्श पर लगा देते थे। मुझे लगता है कि उसी तरह हम कागज पर वर्ग के साइज के निशान लगा सकते हैं।

शिक्षिका : सही बताया। तो क्या अब तुम यह काम कर सकते हो?

सारे बच्चे : जी मैडम।

हर टोली ने कागज पर वर्ग के साइज के निशान लगा लिए, जैसा कि चित्र 12 में दिखाया गया है।



चित्र 12

सभी टोलियों ने पूरे कागज को बराबर साइजों के वर्गों में बांटने के बाद वर्गों की संख्या गिन ली। शिक्षिका ने हर टोली से बातचीत करके पता लगा लिया कि सभी ने सही किया था। सभी टोलियों का उत्तर भी एक

ही था यानी 24 वर्ग। इसके बाद उन्होंने टोलियों से कहा कि वे कार्डबोर्ड के छोटे वर्ग की भुजाओं को नापकर उसका क्षेत्रफल पता करें। सबने पता किया कि यह वर्ग चारों किनारों पर 1 सेमी. लम्बा है। फिर शिक्षिका ने उन्हें बताया कि 'यह वर्ग एक खास साइज का है। चूंकि इसकी चारों भुजाएं 1 सेमी. लम्बाई की हैं, इसलिए इसे एक 'सेंटीमीटर वर्ग' कहते हैं। तो क्षेत्रफल को '24 वर्ग' कहने के बजाय हम कहते हैं कि यह '24 सेंटीमीटर वर्ग' है।"

क्षेत्रफल को 'सेंटीमीटर वर्ग' के रूप में व्यक्त किया जाता है। सेंटीमीटर वर्ग क्षेत्रफल नापने की इकाई है।"

उन्हें और अभ्यास करवाने के मकसद से शिक्षिका ने उन्हें एक ग्राफ पेपर दिया जिस पर एक निश्चित क्षेत्र चिह्नित किया गया था। उन्होंने बच्चों से इस बात की जांच करने को कहा कि ग्राफ का हर खाना एक सेंटीमीटर वर्ग है और फिर चिह्नित क्षेत्र का क्षेत्रफल से.मी. वर्ग में पता करने को कहा। उन्होंने बच्चों को यह भी समझाया कि खेतों, खेल के मैदानों आदि जैसी बड़ी-बड़ी समतल आकृतियों का क्षेत्रफल इसी प्रकार से मीटर वर्ग में दिखाया जाता है।

उपरोक्त गतिविधि से बच्चों को वर्ग या आयत के क्षेत्रफल के परिकलन का सूत्र खुदबखुद प्राप्त करने में भी मदद मिल सकती है। उनसे इस तरह के सवाल पूछे जा सकते हैं:

- एक कतार में कितने वर्ग हैं?
- कुल कितनी कतारें हैं?
- यदि 6-6 वर्ग वाली 4 कतारें हों, तो कुल कितने वर्ग होंगे?
- सारे वर्गों को गिने बगैर तुम कुल वर्गों की संख्या कैसे पता करोगे?
- यदि एक कतार में 5 वर्ग हों और ऐसी 4 कतारें हों, तो क्षेत्रफल कितना हुआ? वगैरह।

इससे बच्चों को यह समझने में भी मदद मिलेगी कि क्यों आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई $\times$ चौड़ाई होता है और विशेष स्थिति में वर्ग का क्षेत्रफल = (लम्बाई)² होता है।

इस तरह की चित्रात्मक प्रस्तुति से उनके दिमाग पर अमिट छाप बन जाएगी और वे समझ पाएंगे कि सूत्र का उपयोग कब व कैसे करना है।

E12) एक वृत्त का क्षेत्रफल निकालने के लिए आप क्या गतिविधि करेंगे?

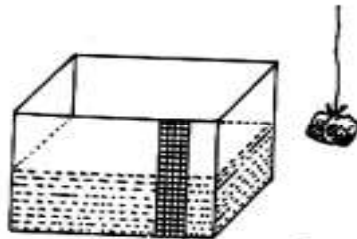
आयतन नापना

आयतन 3-विमीय फैलाव का नाप है। डिब्बे, नोटबुक, बन्द पीपा, आलमारी, ईंट, पत्थर जैसी 3-विमीय बंद चीजें जितनी घेरती हैं वह उनका आयतन होता है। आयतन यानी इन चीजों द्वारा घेरी गई जगह। बच्चों को घेरी गई जगह का अहसास देने के लिए कुछ पत्थर, ईंटें, लोहे के टुकड़े, वगैरह इकट्ठे कर लें। प्लास्टिक की एक बाल्टी में पानी भर लीजिए। हर चीज को एक धागे से बांधकर उन्हें एक-एक करके पानी में डुबाइए। देखिए कि क्या हर बार पानी का तल एक बराबर ही बढ़ता है। बच्चों से निम्न प्रश्नों पर चर्चा कीजिए।

- तल अलग-अलग क्यों बढ़ता है?
- पानी का तल सबसे ऊंचा कब उठा?
- ऐसा क्यों होता है?
- डुबाई गई चीज के साइज और पानी के तल के बीच क्या संबंध होता है? वगैरह।

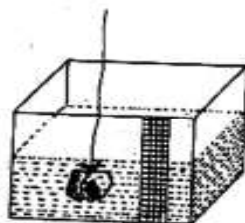
एक बार बच्चों को घेरे गए आयतन का अहसास हो जाए, तो वे दो चीजों के आयतन की तुलना कर सकते हैं। दो असम चीजों के आयतन की तुलना निम्नलिखित गतिविधि द्वारा की जा सकती है।

उदाहरण 6 : दो पत्थर लीजिए, जिनके आयतन की तुलना करनी है और कांच का एक आयताकार बर्तन ले लीजिए। कांच के बर्तन में $3/4$ पानी भर दीजिए। इस पर चित्र 13 में दिखाए अनुसार ग्राफ पेपर की एक पट्टी चिपका दीजिए।



चित्र 13

सबसे पहले ग्राफ पेपर की पट्टी के द्वारा खाने गिनकर पानी का तल पढ़ लीजिए। अब पत्थरों को एक-एक धागे से बांध लीजिए। चित्र 14 में दिखाए अनुसार एक पत्थर को पानी में डुबाइए और पानी के तल में हुए परिवर्तन को नोट कीजिए। इसी प्रकार से दूसरे पत्थर को पानी डुबाकर पानी के तल को पढ़ लें।



चित्र 14

चर्चा कीजिए कि पानी का तल कब ज्यादा चढ़ा? क्यों? कौन सा पत्थर ज्यादा जगह घेरता है? किसका आयतन ज्यादा है? वगैरह।

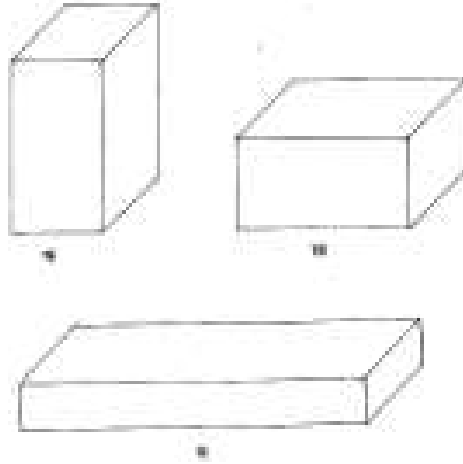
कभी-कभी दो चीजों के आयतन की तुलना देखकर भी की जा सकती है। इसके लिए दो चीजों द्वारा घेरी गई जगह की तुलना की जाती है। आप इस तरह के सवाल पूछ सकते हैं कि मेज की दर्राज में कौन सी चीज ज्यादा जगह घेरती है—माचिस या साबुन की डिबिया? कौन सी चीज बड़ी है? किसका आयतन ज्यादा है? वगैरह।

उपरोक्त गतिविधियों से बच्चों को यह समझने में मदद मिलेगी कि

1. सम-असम हर चीज का साइज होता है।
2. बड़ी चीजें ज्यादा जगह घेरती हैं।
3. बड़ी चीजें पानी की सतह को ज्यादा ऊपर उठाती हैं।
4. जिस चीज का साइज ज्यादा हो, उसका आयतन भी ज्यादा होता है।

घेरे गए आयतन की अवधारणा सीखते हुए बच्चों को पदार्थ की मात्रा के संरक्षण का भी अहसास रहना चाहिए। कोई बच्ची इस बात को कितनी हद तक समझती है, इसका आकलन करने के लिए निम्नलिखित गतिविधि पर गौर कीजिए। मैंने यह गतिविधि नजदीक के एक स्कूल में देखी थी।

उदाहरण 7 : कक्षा 6 के एक शिक्षक बच्चों को घेरे गए आयतन का अहसास पहले ही दे चुके थे। अब वे उन्हें यह समझाना चाहते थे कि अलग-अलग आकृतियों की चीजों का आयतन समान भी हो सकता है। इसके लिए उन्होंने बच्चों को लकड़ी के कुछ गुटके दिखाए।



चित्र 15

शिक्षक : क्या इन गुटकों का आयतन समान है?

किसी से कोई उत्तर नहीं मिला, तो उन्होंने अपने प्रश्न को अलग ढंग से रखा।

शिक्षक : क्या उन सभी गुटकों को बराबर जगह चाहिए?

इस बार भी चुप्पी रही।

शिक्षक : चलो, ऐसे मान लो कि ये चॉकलेट के गुटके हैं। अब बताओ कि क्या इन सबमें बराबर मात्रा में चॉकलेट है?

इस प्रश्न से बच्चों में कुछ प्रतिक्रिया हुई।

पहला बच्चा : नहीं, सबमें चॉकलेट की मात्रा अलग-अलग है।

दूसरा बच्चा : नहीं, सर, मुझे लगता है कि पहले दो गुटकों में तो मात्रा बराबर है। बस उन्हें अलग-अलग तरह से रखा गया है। परन्तु तीसरे गुटके में मात्रा अलग है।

शिक्षक : क्या तुम यहां आकर समझा सकते हो?

लड़के ने कई तरह से दूसरे गुटके की तुलना पहले गुटके के साथ की। वह यह कर ही रहा था कि अन्य बच्चे चिल्ला पड़े।

कई बच्चे : जी हां सर, पहले दो गुटके एक ही साइज के हैं।

शिक्षक : क्यों?

कक्षा में अस्पष्ट फुसफुसाहट होने लगी और एक बच्चा चिल्लाया।

एक लड़का : सर, ये बराबर जगह घेरते हैं।

शिक्षक : क्या तुम सब इससे सहमत हो?

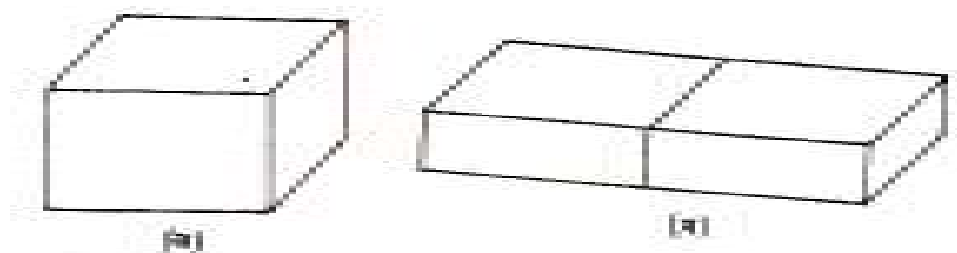
सारे बच्चे : जी सर।

शिक्षक : क्या मैं कह सकता हूँ कि इनका आयतन समान है?

बच्चे सहर्ष सहमत हुए।

शिक्षक : परन्तु तीसरे गुटके के बारे में क्या कहोगे? इसका भी आयतन उतना ही है। यदि तुम इसे ध्यान से देखोगे तो पता चलेगा कि इसकी ऊँचाई तो (ख) से आधी है मगर लम्बाई उससे दुगुनी है।

परन्तु बच्चे भ्रमित नज़र आ रहे थे। इसलिए शिक्षक ने उनके सामने (ख) और (ग) के ही समान दो और गुटके रखे। अन्तर सिर्फ इतना था कि इस बार (ग) दो भागों में बंटा हुआ था। (देखें चित्र 16)



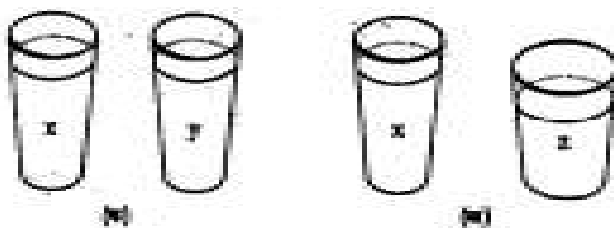
चित्र 16

शिक्षक ने दूसरे गुटके के टुकड़ों को अलग-अलग किया और उन्हें इस तरह जमाया कि नया गुटका हूबहू पहले गुटके जैसा दिखने लगा। बच्चे समझ गए कि सभी गुटकों के साइज़/आयतन समान थे।

E13) आप बच्चों को यह अवधारणा समझाने में कैसे मदद करेंगे कि अलग-अलग आकृतियों का आयतन समान भी हो सकता है?

धारिता बनाम आयतन

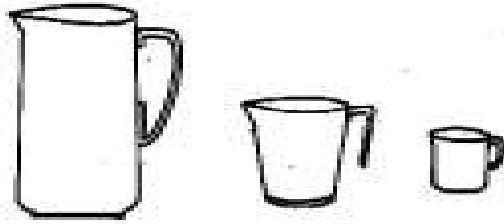
किसी पात्र की धारिता का अर्थ है कि उसमें कितना तरल पदार्थ या रेत या नमक भरा जा सकता है। चूँकि तरल पदार्थ या रेत या नमक का आकार उस पात्र के अनुसार जिसमें वे रखे गए हैं, बदलता रहता है इसलिए बच्चों को ठोस पदार्थों के संरक्षण के मुकाबले तरल पदार्थों का संरक्षण समझाने में ज्यादा दिक्कत होती है। इसका आकलन करने के लिए बच्चे को दो एक जैसे गिलास X और Y दिखाइए। दोनों में बराबर मात्रा में पानी भी भरकर दिखाइए (चित्र 17 देखिए)।



चित्र 17

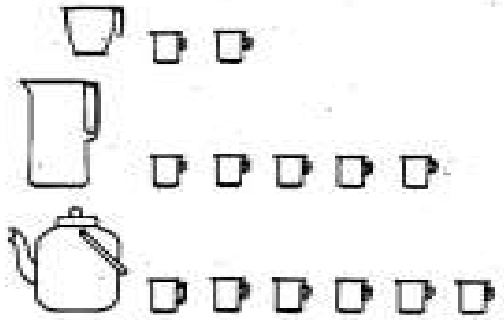
अब Y गिलास के पानी को बच्चे के सामने ही एक अन्य आकार के बर्तन Z में डाल दीजिए। अब उससे पूछिए कि क्या X और Z में बराबर पानी है। यदि वह इस सवाल का सही उत्तर नहीं दे पाता तो इसका मतलब यह है कि अभी उसने इस अवधारणा को ग्रहण नहीं किया है। ऐसे मामले में उसकी मदद करने का तरीका यह है कि पानी को (बगैर छलकाए) वापिस Y गिलास में डालकर उसे दिखाया जाए।

बच्चों को अलग-अलग आकार के बर्तनों की धारिता की तुलना करने का हुनर भी हासिल करना चाहिए। उन्हें यह बताने में दिक्कत नहीं होनी चाहिए कि एक मग में एक कप से ज्यादा पानी आता है और एक जग में मग से ज्यादा (चित्र 18 देखें)।



चित्र 18

एक कप में पानी भरकर उसे एक खाली मग में डालने से, या एक मग को पानी से भरकर उसे एक जग में उड़ेलने की क्रिया के द्वारा बच्चों को यह तय कर पाने में मदद मिलेगी। आप बच्चों से यह भी कह सकते हैं कि विभिन्न बर्तनों की धारिताओं के बारे में अपने निष्कर्षों को चित्रों के रूप में रिकार्ड करें (चित्र 19 देखें)। इस चित्र को देखकर आप बता सकते हैं कि जग में मग से ज्यादा चीज समाएगी और केतली में सबसे ज्यादा।



चित्र 19

इस मामले में कप धारिता नापने की भौतिक इकाई मानी जाएगी। तब आप धारिता की बात इस भौतिक इकाई के संदर्भ में कर सकते हैं। मसलन मग की धारिता दो कप है, जग की धारिता 5 कप है और केतली की धारिता 6 कप है।

चम्मच, जग, फ्रूटी के डिब्बे वगैरह कई चीजें ली जा सकती हैं। इनमें से किसी भी चीज को धारिता नापने की भौतिक इकाई के रूप में इस्तेमाल किया जा सकता है।

E14) आप बच्चे को यह बात समझाने के लिए क्या करेंगे कि बड़े बर्तन में ज्यादा चीज़ समा सकती है, इसलिए इसकी धारिता भी ज्यादा है?

सारांश

इस पाठ में हमने निम्नलिखित बिन्दुओं पर चर्चा की :

1. लम्बाई, क्षेत्रफल नापने की जरूरत को उभारा गया है।
2. शुरुआत में बच्चों को मापन की भौतिक इकाइयों के उपयोग का प्रशिक्षण दिया जा सकता है। बिता, कदम, हाथ, पैर वगैरह का इस्तेमाल लम्बाई नापने के लिए किया जा सकता है। क्षेत्रफल नापने के लिए कार्डबोर्ड के टुकड़ों तथा आयतन नापने के लिए लकड़ी के गुटकों या माचिस की डिब्बियों का उपयोग किया जा सकता है। इन गैर-मानक इकाइयों के इस्तेमाल के अनुभव से बच्चों को यह स्पष्ट हो जाएगा कि विभिन्न व्यक्तियों द्वारा इन इकाइयों का उपयोग किया जाए तो किसी चीज की लम्बाई/क्षेत्रफल का नाप अलग-अलग आ सकता है। नाप में गैर-मानक इकाई के बदलते साइज के अनुसार नाप में भी बदलाव आ जाता है। लिहाजा वे मापन में एक मानक इकाई की जरूरत महसूस करेंगे।
3. लम्बाई नापने के रुढ़िगत उपकरणों का उपयोग शुरू करने से पहले जरूरी है कि बच्चे नापी जाने वाली लम्बाई का अनुमान लगा पाएं ताकि मापन उपकरण के उपयोग में हुई किसी बड़ी गलती को और उसके कारण प्राप्त नाप में हुई गलती को आसानी से पकड़ा जा सके।
4. हर बच्चे को स्केल या टेप से नापने का हुनर हासिल करना चाहिए। सिर्फ दूसरों को नापता हुआ देखने से यह हुनर हासिल करने में कोई मदद नहीं मिलती।
5. बच्चों को यह समझना चाहिए कि कोई भी नाप एकदम सही नहीं होता। सारे नाप सन्निकट होते हैं। उन्हें प्राप्त नाप में गलती होने के विभिन्न कारण पता होने चाहिए ताकि वे नापते वक्त इनसे बच सकें और यथासम्भव सर्वोत्तम परिणाम प्राप्त कर सकें।
6. जैसे लम्बाई रैखीय चीज का साइज बताती है, उसी तरह क्षेत्रफल किसी समतल आकृति (दो विमीय आकृति) का साइज बताता है। किसी समतल आकृति का साइज/क्षेत्रफल उसका 'फैलाव' है। ऐसी कई गतिविधियों की चर्चा की गई है जिनसे बच्चे गैर-मानक व मानक दोनों तरह की इकाइयों में क्षेत्रफल निकाल सकते हैं। इन गतिविधियों से बच्चों को यह भी समझने में मदद मिलती है कि अलग-अलग आकृतियों का क्षेत्रफल समान भी हो सकता है और उन्हें किसी आयत अथवा वर्ग के क्षेत्रफल का सूत्र खुदबखुद प्राप्त करने में भी मदद मिलती है।

सबक-5 के पाठ 11, 12 व 13 के अभ्यासों पर टिप्पणियां—

पाठ 11,

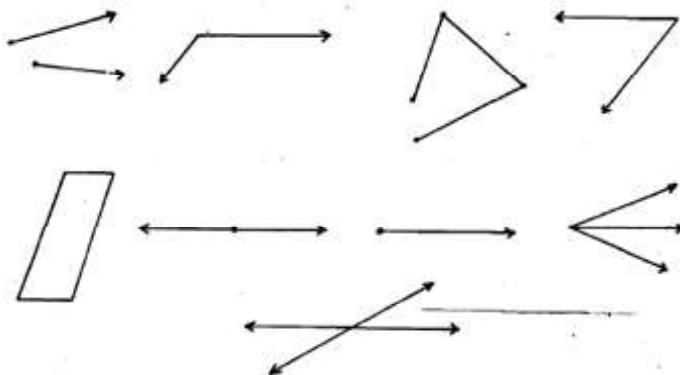
- E1) कागज़ की पट्टियां और धागा आसानी से उपलब्ध होते हैं। इनकी मदद से सीधे कोरों वाली तथा गोलाईदार कोरों वाली बन्द व खुली आकृतियां दिखाई जा सकती हैं। गतिविधियों में बच्चों को यकीनन मज़ा आता है। इन गतिविधियों के लिए जियो बोर्ड का सफलतापूर्वक इस्तेमाल किया जा सकता है।
- E3) खपच्चियों, रंग-बिरंगी स्ट्रॉ, धागे व तार के साथ कई गतिविधियां की जा सकती हैं। सीधे कोरों वाली आकृतियां तो मात्र खपच्चियों से बन जाती हैं। गोलाईदार कोर बनाने के लिए धागे तथा तार का इस्तेमाल किया जा सकता है। खुली आकृतियां बनाने के लिए चाहे जितनी खपच्चियों का इस्तेमाल किया जा सकता है। बच्चों को यह पता लगने दें कि 2 खपच्चियों से बन्द आकृति नहीं बनाई जा सकती।
- E5) ज्यामिति की कक्षा में जियोबोर्ड एक निहायत उपयोगी चीज़ साबित होता है। इसकी मदद से लगभग सभी मूलभूत अवधारणाएं पढ़ाई जा सकती हैं। धागे के एक सिर को एक कील से बांध दीजिए। अब यदि इस धागे को अन्य कीलों पर से निकालते हुए आप इसके दूसरे सिर को वापिस उसी कील पर बांध दें जहां से शुरु किया था तो बन्द आकृति मिलती है जबकि यदि दूसरे सिर को किसी अन्य कील पर बांधे तो खुली आकृति मिलती है।
- E7) समतल सतह पढ़ाने के जो दो तरीके इकाई में सुझाए गए हैं उनकी खामियां बताइये। एक अन्य गतिविधि। यह हो सकती है कि बच्चों को अपने आसपास की तमाम चीज़ों के नाम बताने को कहा जाए। जब बच्चे नाम बताएं तो शिक्षक इन्हें ब्लैक बोर्ड पर तीन कॉलम में लिख सकते हैं। पहले कॉलम में ऐसी चीज़ों के नाम जिनकी सतह समतल है, दूसरे कॉलम में सिर्फ असमतल सतह वाली चीज़ों के नाम तथा तीसरे कॉलम में ऐसी चीज़ों के जिनकी समतल व असमतल दोनों सतह हों।
अब बच्चों से पहले कॉलम की चीज़ों की समान विशेषताएं खोजने को कहिए वे यह भी पता लगाएं कि ये चीज़ें अन्य कॉलम की चीज़ों से कैसे अलग हैं।
- E9) बच्चों को 10 सें. मी., 5 सें. मी, व 4 सें मी, की तीन खपच्चियां दीजिए। उनसे कहिए कि वे इन्हें किसी भी तरह जमाकर एक तिकोन बनाएं। वे ऐसा नहीं कर पाएंगें। फिर उन्हें 8 सें. मी., 4 सें. मी., की तीन खपच्चियां दीजिए। इस बार भी वे तिकोन नहीं बना पाएंगे। इस तरह आप उन्हें कुछ और मौके दे सकते हैं। इसके बाद उनसे चर्चा कीजिए कि क्यों किसी भी लम्बाई की तीन खपच्चियों से तिकोन नहीं बनाया जा सकता।
- E10) जियोबोर्ड की गतिविधि भी की जा सकती है।
- E15) बच्चे शायद कहें कि यह सम्भव है। यदि ऐसा होता है तो आप उन्हें कोई असमाकृति देकर कहें कि वे इसे तिकानों या आयतों या वर्गों या वृत्तों में बांटें।
- E16) अवश्य! बच्चे अपने आप सममित आकृतियों के गुणधर्म सीखते हैं।
- E17) सममित आकृतियों की अवधारणा सीखने के लिए कागज़ मोड़ने व काटने की गतिविधियां बहुत उपयोगी होती हैं। इस संदर्भ में कागज़ मोड़ने की गतिविधि उपयोगी होती है।

पाठ-12

- E1) उदाहरण 1 में शिक्षक का ज्यादा जोर परिभाषाओं पर है। वे 'किरण', 'रेखा' आदि की परिभाषा से शुरू करते हैं। इनका उपयोग करते हुए ही वे कोण की अवधारणा बताते हैं। जब तक बच्ची के लिए इन परिभाषाओं का कुछ मतलब न हो, तब तक वह इन पर ज्यादा ध्यान नहीं देगी। नतीजा यह होगा कि उसे अवधारणा की साफ समझ हासिल नहीं हो पाएगी। इसकी बजाय अगर शिक्षक कोण की अवधारणा समझाने के लिए रोजमर्रा के उदाहरणों का इस्तेमाल करते तो शायद बच्चे ज्यादा आसानी से इसे पकड़ पाते। दिलचस्प बात यह है कि शिक्षक ने 'किरण' का परिचय बहुत ही रोचक कहानी के जरिए दिया है। ऐसी कहानियों से बच्चों को वाकई अवधारणा समझने में मदद मिलती है। लेकिन अगर कहानी कुछ इस तरह की होती कि बच्ची उसमें हिस्सा ले सकती, तो शायद ज्यादा असरदार होती। एक अच्छी बात यह है कि शिक्षक ने अवधारणा समझाने के लिए डंडल, पत्तियों जैसी जानी पहचानी चीजों का उपयोग किया है।
- E2) गौर कीजिए कि उदाहरण 2 में शिक्षक ने अवधारणा समझाने के लिए बच्चे के रोजमर्रा के अनुभव का सहारा लिया है। इससे सीखना आसान हो जाता है। दूसरी अहम बात यह है कि वे कोण के दोनों पहलू सिखाती हैं – कि 'जब दो रेखाएं मिलती हैं तो कोण बनाती हैं' और 'कोण से हमें दो दिशाओं के बीच अंतर का परिमाण पता चलाता है'। दूसरे पहलू को उभारने वाली गतिविधि शायद थोड़ी मुश्किल लगे। लेकिन आपने ध्यान दिया होगा कि शिक्षक ने दूसरा पहलू तभी उठाया जब पहले पहलू में बच्चों की समझ पुख्ता हो गई। कोण क्या है, इसको साफ-साफ समझने के लिए बच्चे के लिए दूसरा पहलू जानना जरूरी है।
- इन बातों से जाहिर है कि अवधारणा की साफ विकसित करने के लिहाज से उदाहरण 1 की बनिस्बत उदाहरण 2 बेहतर है।

E3) आप बच्चे से निम्नलिखित अभ्यास/गतिविधि करने को कहें।

1. ब्लैकबोर्ड पर चित्र 21 जैसी विभिन्न आकृतियां बनाकर बच्चे से कहें कि इनमें से कोण चुनें।



चित्र 21

2. बच्चों को कोई चौकोर डिब्बा या कुर्सी या ऐसी ही किसी चीज में कोण पहचानने को कहें। चित्र में दिखाए गए तरीके से अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षर लिखें :

A V T

और बच्चों से कहें कि हर अक्षर में कोण पहचानें।

E4) एक गतिविधि इस तरह की हो सकती है :

बच्चों से कहें कि अपनी उंगलियों से न्यून व अधिक कोण बनाएं। गतिविधि की शुरुआत इस तरह कर सकते हैं कि आप अपनी दो उंगलियों को फैलाकर बच्चों से पूछें कि क्या कोई कोण देख पा रहे हैं। यह कैसा कोण है – न्यून, अधिक या समकोण? इस गतिविधि को और आगे बढ़ा सकते हैं।

एक अन्य गतिविधि भी हो सकती है। कोई पेंसिल या छड़ या फुट्टा दीवाल से लगाकर रख दें। इसे ऊपर नीचे सरकाकर बच्चों से विभिन्न कोण देखने को कहें। हम बच्चों से घर के आसपास भी विभिन्न किस्म के कोण देखने को कह सकते हैं।

E5) कुछ जरूरी बातें नीचे दी गई हैं जो पहले से पता होनी चाहिए।

1. बच्चे को कोण पहचानना आना चाहिए।
2. उसे कोण को नापने की जरूरत का एक सहज अहसास होना चाहिए।
3. मापन मतलब तुलना करना है। दूरी नापने के अनुभव के आधार पर यह उसे पता होना चाहिए।
4. उसे दूरी नापना आना चाहिए।
5. उसे कोण के शीर्ष व भुजाओं आदि की पहचान होनी चाहिए।

E6) कुछ गलतियां इस तरह की होती हैं –

1. चांदे का मध्य बिन्दु पता लगाना।
2. मध्यबिन्दु को कोण के शीर्ष पर रखना।
3. कोण की एक भुजा को चांदे की शून्य रेखा पर रखना।
4. दूसरी भुजा से मेल खाते चिन्ह को देखना।
5. अंश को सही ढंग से पढ़ना (जो घड़ी से उल्टी दिशा में घट या बढ़ रहे होते हैं), खासकर जब भुजा बहुत छोटी हो।
6. चांदे को स्थिर रखना।

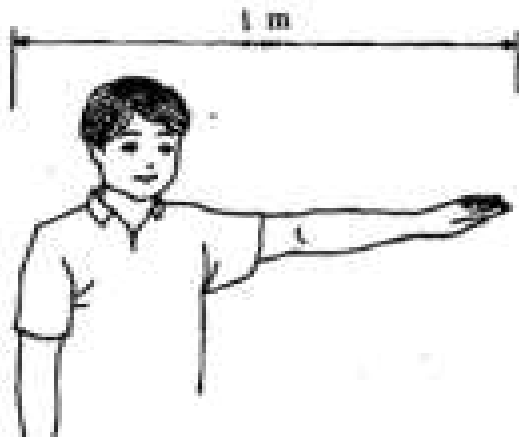
E7) खेल कुछ इस तरह का हो सकता है—

एक कागज पर मनचाही लम्बाई की एक सरल रेखा खींच दें और इसे बच्चों के एक समूह को दिखाएं। यह काम आप किसी पर्दे के पीछे छिपाकर करें ताकि समूह के सदस्य आपको यह रेखा बनाते न देख सकें। किसी किताब की आड़ में किया जा सकता है। अब रेखा समूह के हर सदस्य को दिखाई जाएगी और कहा जाएगा कि वह इसकी लम्बाई का अपना अनुमान एक चिट पर लिख लें। फिर आप किसी एक सदस्य से कहिए कि वह रेखा की लम्बाई पैमाने से नापे और बाकी सदस्यों से कहिए कि वे अपने अनुमानों की तुलना इससे करें।

E9) एक रेखा को इस तरह मोड़ें कि एक भाग ठीक दूसरे भाग पर आ जाए। आपको समकोण प्राप्त हो जाएगा। अब कागज को इस तरह मोड़ें कि समकोण बनाने वाले दो किनारे एक-दूसरे के ऊपर आ जाएं 45° का कोण मिल जाएगा।

पाठ-13

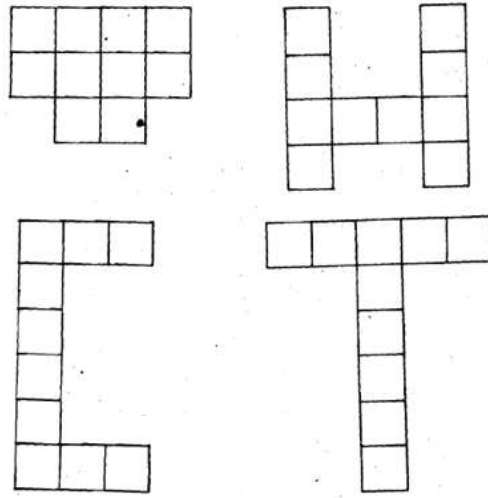
- E1) अनुमान लगाना एक निहायत मुश्किल हुनर है। इस हुनर को हासिल करने के लिए निरन्तर अभ्यास जरूरी होता है। परन्तु यदि यह हुनर हासिल हो जाए तो यह दैनिक जीवन में बहुत उपयोगी होता है। अपने अनुभव से अनुमान के दो उपयोग लिखिए।
- E2) विभिन्न उम्र समूह, जैसे 7 वर्ष, 10 वर्ष, 15 वर्ष के बच्चों के साथ एक गतिविधि आयोजित कीजिए। उनसे कहिए कि वे अपने बित्ते या कदम से किसी मेज़ या कमरे की लम्बाई नापें। बच्चे देखेंगे कि सबके बित्ते या कदम एक से नहीं हैं। उनमें अन्तर है। इससे उन्हें यह निष्कर्ष निकालने में मदद मिलेगी कि एक ही गैर-मानक इकाई से अलग-अलग व्यक्ति किसी चीज़ की लम्बाई नापें, तो नाप में अन्तर आते हैं। उससे उन्हें मापन की मानक इकाई की जरूरत का अहसास हो जाएगा।
- E3) कपड़े या कार्डबोर्ड की एक लम्बी पट्टी से एक मीटर लम्बी टेप बनाई जा सकती है, बशर्ते कि यह सही लम्बाई में काटी गई हो और इस पर सेंटीमीटर के निशान लगाए गए हों। बच्चों को रूढ़िगत स्केल या टेप की बनिस्बत अपनी बनाई इस टेप का इस्तेमाल करने में ज्यादा मजा आएगा। बच्चे इस स्केल का बार-बार उपयोग सिर्फ इसलिए भी करेंगे कि इसमें उन्हें मजा आता है। इस बहाने उन्हें चीज़ों को नापने का खूब अभ्यास हो जाएगा, जो वे अन्यथा न हासिल कर पाएं यदि उन्हें रूढ़िगत स्केल का प्रयोग करना पड़े।
- E4) मीटर स्केल या टेप से शरीर पर एक निश्चित लम्बाई को चिन्हित कर लीजिए। आम तौर से कन्धे से लेकर दूसरे हाथ की तनी हुई उंगलियों के छोर तक की लम्बाई लगभग 1 मीटर होती है (चित्र 31 देखें)। वे इस मीटर लम्बाई का उपयोग साड़ी, चादर, तौलिया वगैरह नापने में कर सकते हैं।



चित्र 31

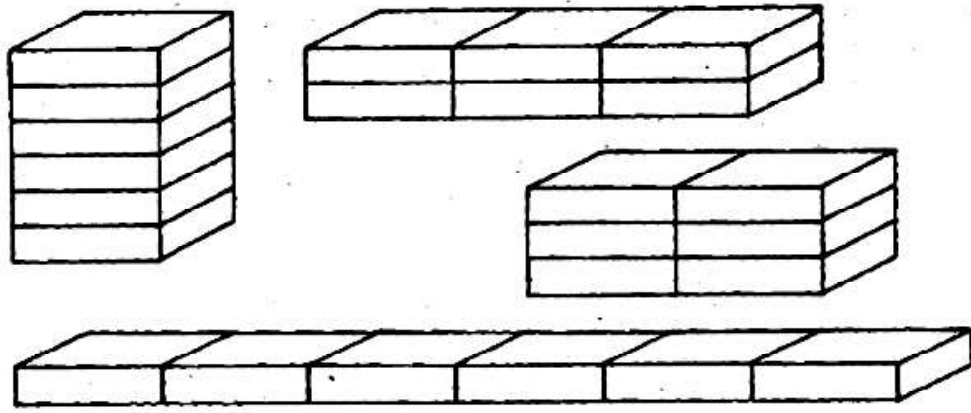
- यदि बच्चा 1 मीटर लम्बाई का अनुमान लगा सकता हो, तो हम मान सकते हैं कि वह इस अवधारणा को समझता है।
- E5) जब बच्चे किसी ऐसी स्केल से नापते हैं जिस पर सिर्फ सेंटीमीटर के निशान लगे हैं, तो वे पाते हैं कि कुछ लम्बाइयां पूर्ण सेंटीमीटर की नहीं होतीं अर्थात् इनका सिरा स्केल पर लगे दो निशानों के बीच रह जाता है। इस मौके पर उनसे मापन की छोटी इकाई की जरूरत पर चर्चा कीजिए और उन्हें मिलीमीटर की इकाई से परिचित कराइए।

- E7) कागज पर एक रेखा खींच दीजिए और बच्चों को एक ऐसी स्केल दीजिए जो दोनों सिरों से टूटी हो। यदि बच्चे इस स्केल का प्रयोग करके उस रेखा को सफलतापूर्वक नाप लेते हैं, तो आप निश्चित रूप से कह सकते हैं कि बच्चे लम्बाई नापना सीख चुके हैं।
- E8) आपने ध्यान दिया होगा कि कई मर्तबा स्केल किनारे पर बहुत मोटी होती है। लिहाजा उन्हें पढ़ते वक्त बच्चे गलतियां करते हैं। वे यह तय नहीं कर पाते कि स्केल का कौन सा निशान चीज/रेखा के सिरे से मेल खा रहा है। स्केल को पढ़ते वक्त आंख इस बिन्दु (चीज/रेखा के सिरे) के ठीक सीध में होनी चाहिए। यहां यह कहना लाज़मी है कि ऐसी स्केलों का उपयोग करना चाहिए जिनके किनारों की मोटाई कम से कम हो।
- E10) बच्चों को कागज या कार्ड बोर्ड के एक ही साइज के 10 वर्गाकार/आयताकार टुकड़े काटने को कहें। इन टुकड़ों को जोड़कर वे विभिन्न आकृतियां बनाएं (चित्र 32) और देखें कि सभी आकृतियों बराबर साइज की हैं।



चित्र 32

- E11) लम्बाई नापने की मानक इकाई का उदाहरण दिया जा सकता है। इस बात पर चर्चा की जा सकती है कि किसी दो-विमीय आकृति या डिजाइन का साइज कैसे व्यक्त करें। आकृति पर बिछाने के लिए सिक्कों, डाक-टिकटों, कार्डबोर्ड के टुकड़ों वगैरह का उपयोग करें। बच्चों को यह पता लगाने दें कि जब बिछाने का पैमाना बदल जाता है तो साइज का नाप भी बदल जाता है। इससे मानक इकाई की जरूरत महसूस करने में मदद मिलेगी।
- E12) असमाकृतियों का क्षेत्रफल निकालने के लिए ग्राफ पेपर का इस्तेमाल किया जा सकता है।
- E13) खाली माचिसों से बच्चे खम्भों जैसे ढांचे बनाएं और माचिस की संख्या के आधार पर उनके साइज की तुलना करें। इससे उन्हें यह समझने में मदद मिलेगी, कि किसी ढांचे का साइज सिर्फ ऊंचाई के आधार पर ही नहीं नापा जाता। छः माचिसों के उपयोग से निम्नांकित ढांचे बनाए जा सकते हैं।



(चित्र 33)

कार्डबोर्ड के खोके, खाली माचिसें, पत्थर, लोहे के टुकड़े, मग, जार वगैरह चीज़ों का उपयोग आयतन सिखाने के लिए किया जा सकता है।

- E14) एक बर्तन में पानी भरकर उसे दूसरे में उड़ेलना या एक खोके में रेत भरकर दूसरे में उड़ेलना जैसी क्रियाएं कक्षा 6 के बच्चों को मजेदार गतिविधियां लगेंगी और इनसे बच्चों को यह भी देखने में मदद मिलेगी कि बड़े बर्तन में ज्यादा चीज भरी जा सकती है।

बच्चे और गणित

इस अध्ययन के विषयवस्तु

पाठ – 14 बच्चों की गणित सीखने में मदद

परिचय – उद्देश्य – बच्चे की पृष्ठभूमि के आधार पर आगे बढ़िए – संबंध जोड़ना – अ-भा-चि-प्र – खेल-खेल में सीखना – सीखने में मददगार अन्य तरीकें – जरूरी नहीं कि दोहराव उबाऊ हो – बच्चे एक दूसरे से सीखते हैं – गलतियाँ उपयोगी होती हैं – सारांश।

पाठ – 15 कक्षा का कामकाज

परिचय – उद्देश्य – गणित सीखना : आइए, थोड़ा दोहराएँ – शिक्षण योजना – योजना क्यों बनाएँ? – योजना कैसे बनाएँ? – अलग-अलग स्तरों की योजना – साल की योजना – इकाई की योजना – पाठ की योजना – सीखने-सिखाने की प्रक्रिया का मूल्यांकन – सारांश।

पाठ-14 व 15 के अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

आमतौर पर यह देखा जाता है कि बच्चे गणित से डरते हैं क्योंकि वे गणित को अपने दैनिक जीवन से जुड़ा नहीं पाते साथ ही गणित की प्रकृति (अमूर्तता, संकेत, भाषा) भी एक मुख्य कारण पैदा करती है। अधिकांश शिक्षक कक्षा में गणित को इस तरीके से पढ़ाते हैं कि बच्चों को यह विषय नीरस, अमूर्त व बोझिल लगता है, और वे गणितीय अवधारणाओं नियमों प्रक्रियाओं को समझ नहीं पाते और धीरे-धीरे विषय को नापसन्द करने लगते हैं। अतः हमें बच्चों की गणित सीखने में मदद हेतु गणित का दैनिक जीवन से जुड़ाव, खेलों/गतिविधियों का उपयोग करना चाहिए, अगर बच्चे गलतियाँ करे तो आप गलती करने के पिछे के कारण को जाने तथा बच्चों को समूह में कार्य दें। इसके साथ ही हमें गणित पढ़ाने हेतु शिक्षण योजना बनानी होगी। चूंकि कक्षा में अलग-अलग स्तर के बच्चे होते हैं हमें इसका भी ध्यान रखना होगा।

अतः इस इकाई में हमने इन सभी बातों जैसे- बच्चों की गणित सीखने में मदद के तरीके जैसे उनकी क्षेत्रीय भाषा का उपयोग, खेल से अवधारणाओं को सीखाना, उनके दैनिक जीवन से गणित को जोड़ना व शिक्षण योजना (इकाई/पाठ योजना) पर चर्चा की है।

पाठ – 14

बच्चों की गणित सीखने में मदद

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - बच्चे की पृष्ठभूमि के आधार पर आगे बढ़िए
 - संबंध जोड़ना
 - अ—भा—चि—प्र
 - खेल—खेल में सीखना
 - सीखने में मददगार अन्य तरीके :-
जरूरी नहीं कि दोहराव उबाऊ हो
बच्चे एक दूसरे से सीखते हैं
गललियाँ उपयोगी होती हैं
- सारांश

परिचय

क्या आपको अपने स्कूल के दिन, खास तौर से गणित की कक्षाएं याद हैं? इन कक्षाओं में ऐसा क्या था जिससे गणित आपको पसंद या नापसंद आया? इस पाठ में हम इन्हीं प्रश्नों से संबंधित कुछ मुद्दे उठाएंगे। पिछले पाठों में हमने पूर्व व प्राइमरी स्कूली बच्चों के कुछ पहलुओं पर चर्चा की थी। वहाँ हमने देखा था कि:

- (i) बच्चों और बड़ों के सोचने के ढंग में बहुत फर्क होता है।
- (ii) बच्चों के विकास का एक निश्चित क्रम होता है और यह क्रम आम तौर पर सभी बच्चों पर लागू होता है। लेकिन हर बच्चे की विकास की गति अलग – अलग होती है।
- (iii) हर बच्ची अपने आसपास की चीजों का “अर्थ निकालने” के अपने रास्ते विकसित कर लेती है।
- (iv) बच्चे जब औपचारिक स्कूल में दाखिल होते हैं, वे कुछ गणित पहले से ही जानते हैं।
- (v) छोटे बच्चे अपने आसपास की दुनिया को समझने के तरीके बनाने के लिए खेल व अन्य गतिविधियों का इस्तेमाल करते हैं।
- (vi) बड़े बच्चे भी ठोस पदार्थों व खेलों से सीखते हैं, और सीखने के इन अनुभवों के द्वारा स्कूलों में दिए जाने वाले औपचारिक ज्ञान का भी अर्थ निकाल सकते हैं।
- (vii) अफसोस की बात है कि गणित के ज्यादातर शिक्षक समझने की बजाय रटने व ऐल्गोरिद्म पर जोर देते हैं। हो सकता है कि गणित के ये “नियम” बड़ों को समझ में आ जाएं, लेकिन यह जरूरी है कि इन्हें बच्चों को ऐसे तरीकों से ही सिखाया जाए जिनसे बच्चे इन्हें समझ सकें।

- (viii) हम जानते हैं कि किसी भी गणितीय अवधारणा या कुशलता सीखने के दौरान बच्चे किस तरह की लम्बी व कठिन प्रक्रिया से गुज़रते हैं। लेकिन औपचारिक स्कूली व्यवस्था में जो समय पाठ्यक्रम को “पूरा करने” के लिए दिया जाता है उसमें इस बात को ध्यान में नहीं रखा जाता है।

इस पाठ में इस बात पर चर्चा होगी कि गणित सिखाते वक़्त उन बातों को ध्यान में क्यों रखना चाहिए।

इस पाठ में हमने कुछ ऐसे सिद्धांतों पर ज़ोर देने का प्रयास किया है जिन्हें पूर्व स्कूली व प्राइमरी स्कूलों के बच्चों को गणित सिखाने के दौरान ध्यान में रखना जरूरी है। ऐसा करने से प्राइमरी स्कूल के किसी भी एक बच्चे के लिए एक ऐसा माहौल बनाने में मदद मिलेगी जो उसकी विकास की अवस्था, उसकी जरूरतों, उसके सोचने व सीखने के तरीकों और सीखने की गति के मुताबिक होगा।

हमने गतिविधियों व अनुभवों के कुछ ऐसे उदाहरण भी दिए हैं जिन्हें बच्चों को उनके गणितीय तरीके से सोचने के ढंग को विकसित करने के लिए दिया जा सकता है। इससे आप अपने सीखने वालों की जरूरतों के अनुसार गतिविधियों में परिवर्तन करें।

उद्देश्य

- समझा सकेंगे कि किसी शिक्षक के लिए अपने सीखने वालों के विकास के स्तरों को जानना जरूरी क्यों है;
- ऐसे तरीकों को पहचान सकेंगे जिनसे आप बच्चों को अपनी गणितीय तरीके से सोचने की क्षमता को विकसित करने में मदद दे सकें;
- ऐसे सिद्धांतों की सूची बना सकेंगे जिन्हें गणित की विशेष अवधारणाएं व कौशल प्रभावशाली तरीके से सिखाने के लिए गतिविधियां बनाते समय ध्यान में रखना चाहिए।

बच्चे की पृष्ठभूमि के आधार पर आगे बढ़ना

कोई भी दो बच्चे एक जैसे नहीं होते। हर बच्चे की उम्र, जानकारी का स्तर, पृष्ठभूमि वगैरह अलग होती है। एक शिक्षक के लिए इन बातों का क्या महत्व है? क्या उसे इन बातों व सीखने के अलग-अलग तरीकों को ध्यान में रखना जरूरी नहीं है?

E1) शिक्षक को पढ़ाते समय किन बातों को ध्यान में रखना चाहिए?

चलिए एक उदाहरण देखते हैं जिसमें एक शिक्षक ने अपने विद्यार्थी की सीखने में मदद करने के लिए उसकी पृष्ठभूमि को ध्यान में रखा।

उदाहरण—

एक गांव के स्कूल में पांचवी कक्षा के एक बच्चे, सुमित, को जोड़ और घटा करने के औपचारिक तरीके से परिचित कराया जा रहा था। शिक्षक ने औपचारिक तरीका से पहले यह समझने की कोशिश की कि उसे पहले से ही कितना आता है।

शिक्षक : 8 और 11 कितने होते हैं?

सुमित : 19

शिक्षक : यह तुमने कैसे किया?



चित्र 1 : एक शिक्षक को अपने सीखने वालों में जो फर्क होते हैं उनके प्रति जागरूक होना चाहिए

सुमित : गिनकर । मैंने पहले 11 लिया और फिर 8 जोड़ दिए।

सुमित ने बड़ी संख्या से “आगे गिनने” (counting on) का तरीका अपनाया था और अपना तरीका वह शब्दों में समझा भी पाया था।

शिक्षक : अच्छा! 22 जोड़ 19 कितना होगा?

सुमित : $(22 + 19)$ लिखकर) : 41?

शिक्षक : तुमने क्या 22 से आगे एक-एक करके गिना?

सुमित : मैंने पहले 19 में से 10 लिए, और इसे 22 में जोड़ा इस तरह हो गए 32, और फिर बचे हुए 9 लिए, और 41 हो गए।

इस बार सुमित ने “पुनः समूहीकरण” (regrouping) का तरीका अपनाया ताकि वह आसानी से जोड़ सके।

इसके बाद उसे दिया गया लिखित अभ्यास उसका उत्तर था।

उसका यह उत्तर कैसे आया? उसने इकाई के कॉलम में 8 और 5 को ठीक जोड़कर जवाब पाया 13, फिर 1 को इकाई के कॉलम के नीचे लिखकर, “हासिल” के 3 लिए और दहाई के 1 में जोड़ दिए। इस तरह इकाई के कॉलम में आया 4 इसलिए, उसका उत्तर था 41!

उसे पूरी तरह से यकीन था कि उसका उत्तर सही है। तब शिक्षक ने प्रश्न को दूसरी तरह से रखना तय किया। उन्होंने कहा, “अगर तुम्हारे पास 18 कंचे थे और तुम्हें 5 कंचे और मिल जाते, तो तुम्हारे पास कुल मिलाकर कितने कंचे हो जाते?” सुमित ने अपनी उंगलियों पर गिना और कह, 23। जब शिक्षक ने उसका ध्यान उसके लिखित उत्तर की तरफ दिलाया तो वह धीरे-धीरे मान गया कि वह उत्तर गलत था। है ना यह रोचक बात कि वह औपचारिक तरीके की बजाए अपने मन से किए तरीके को सही मानने को तैयार था?

इस उदाहरण में सुमित ने संख्याओं को जोड़ने के लिए उचित और कुशल तरीकों को इस्तेमाल करने की अच्छी तरह विकसित क्षमता का प्रदर्शन किया। हालांकि उसे औपचारिक प्रतीकों से जोड़-तोड़ करना कठिन लगा। इसके कई कारण हो सकते हैं। जैसे सुमित को स्थानीय मान की पूरी समझ नहीं है। या सुमित को दी गई संख्याओं को जोड़ने का यह काम गणितीय नियमों से करना सार्थक न लगा हो। जैसे ही शिक्षक ने सवाल को एक संदर्भ में और ठोस वस्तुओं (कंचे गिनना) के साथ रखा, सुमित उसे समझ गया और इसलिए हल भी कर पाया।

सवालों को बच्चों के अनुभवों के संदर्भ में रखना चाहिए।

यह उदाहरण साफ तौर पर दिखाता है कि सुमित ने जोड़ करने के अपने तरीके विकसित कर लिए हैं; “आगे गिनना” और “पुनः समूहीकरण”। वह संख्याओं के पैटर्न से परिचित था और इसलिए वह पुनः समूह बनाकर बड़ी संख्याओं को भी आसानी से जोड़ पाया। और कैसे उस जानकारी का उपयोग करके शिक्षक ने सवाल को दो तरह से सुमित की समझ में लाने की कोशिश की:

(i) सवाल को उसके अनुभवों के संदर्भ में रखकर, और

(ii) सवाल को उसके लिए ठोस बनाकर।

E2) रवि दिल्ली नगर पालिका के एक स्कूल में कक्षा 4 का शिक्षक है। जब नया स्कूल-वर्ष शुरू हुआ तो वह पाठ्य पुस्तक खोलकर बच्चों को 4 अंको वाली संख्याएं लिखना सिखाने लगा। उसने किताब में से

कुछ हिस्सा बोर्ड पर उतार लिया उसके बाद उन्हें ढेर सारे सरल सवाल देकर कमरे से बाहर चला गया। बाद में, उसे यह देखकर आश्चर्य हुआ कि अधिकतर बच्चे सवालों को नहीं कर पाए थे। आपके हिसाब से बच्चों की ऐसी परिस्थिति क्यों बनी?

जब किसी बच्चे की कोई अवधारणा सिखाई जा रही हो तो पहचानना महत्वपूर्ण है कि पहले से उसे क्या – क्या मालूम होना चाहिये, और क्या वह उतना सीख चुकी है।

कुछ सिद्धान्त गणित सीखने के संदर्भ में—

संबंध जोड़ना

हम जानते हैं कि गणित सीखने के दौरान उत्तर पाने की प्रक्रिया पर जोर देने की ज़रूरत है, न कि सिर्फ उत्तर पाने पर। इसलिए, एक शिक्षक की हैसियत से यह ज़रूरी है कि आप बच्चों को अपने आस-पास की दुनिया को गौर से देखने, सवाल पूछने, खोज करने और तर्कों के आधार पर उत्तर ढूँढ़ने के लिए बढ़ावा दें। यह भी ज़रूरी है कि आप उन्हें अपने तार्किक सोच को व्यवस्थित करने के लिए प्रेरित करें।



चित्र 2 : इसके सींग क्यों हैं?
क्योंकि जब इसलिए।

इसके लिए पहले तो, आप बच्चों को प्रश्न पूछने के लिए प्रेरित करें। जब बच्चे, आपसे पूछें, “कुछ पत्ते हरे और कुछ पत्ते भूरे क्यों होते हैं?” या “चांद हमारे साथ-साथ कैसे चलता है?” या “मरने के बाद लोग कहां चले जाते हैं”, आपका जवाब ऐसा होना चाहिए कि उन्हें संतुष्ट कर सके। आपको ये प्रश्न चाहे कितने ही कठिन या बेवकूफी भरे लगें आपको उन्हें गंभीरतापूर्वक लेना चाहिए और तार्किक तरीके से उत्तर ढूँढ़ने में उनकी मदद करनी चाहिए।

एक और बात जो मदद करती है वह है बच्चों के सामने ऐसे प्रश्न रखना जिनके कि उन्हें पहले से ही निश्चित जवाब न दिए जाएं। जैसे, “इस कागज को तुम कितनी तरह से एक वर्ग की शक्ल में मोड़ सकते हो?” उन्हें अपने प्रश्न खुद बनाने का मौका दिया जा सकता है जैसे कि सवाल जवाब या अटकलबाजी के खेलों में, जिनका जिक्र हमने किया है। इस तरह के मौके देने से बच्चे बहुत सी बातें आसानी से और रोचक तरीके से सीखते हैं। ऐसा करने से बच्चों को अपनी मानसिक क्षमताएं विकसित करने का मौका भी मिलता है। इनसे बच्चों को यह अहसास भी होता है कि एक सवाल के कई जवाब भी हो सकते हैं।

बच्चे अपने तर्कों को व्यवस्थित करें इसके लिए उन्हें बढ़ावा व मार्गदर्शन देने के लिए आप बहुत तरह की गतिविधियां सोच सकते हैं। जैसे, उनसे चीज़ों के एक ढेर का वर्गीकरण करने के लिए मापदंड (criteria) चुनने को कहा जा सकता है, और इन मानदंडों को सही तरह से लागू करने में उनकी मदद की जा सकती है। या वे अपने स्कूल के साथियों के स्कूल आने के अलग-अलग तरीकों की परिकल्पना कर सकते हैं। फिर वे आंकड़े इकट्ठे करके, उन्हें लिखकर और उनका विश्लेषण करके परिकल्पना को सिद्ध कर सकते हैं या उसका खंडन कर सकते हैं।

E3) (क) मापन में एक विषय चुनिये और उनसे अपने ही संदर्भ में दो ऐसी गतिविधियां बनाइये जिनसे आपके विद्यार्थियों को इस अवधारणा की छानबीन करने और सीखने में मदद मिले।

(ख) कुछ बच्चों के साथ इन गतिविधियों को करिये और लिखिये कि किस प्रकार ये गतिविधियाँ बच्चों के गणितीय सोच को बढ़ावा देती हैं।

गणितीय सोच का एक महत्वपूर्ण पहलू है पैटर्न और पहचानने की क्षमता। एक शिक्षक की हैसियत से एक बच्चे में आप यह क्षमता कैसे विकसित कर सकते हैं? चलिये देखते हैं कि अदिति की शिक्षक ने यह कैसे किया।

10 साल की अदिति मन में करने वाले गणित के सवालों में व्यस्त थी। 2×76 को हल करते वक्त उसका उत्तर आया 432। उससे दोबारा करने के लिए कहा गया और दोबारा उसने 432 कहा। शिक्षक को समझ में आया कि अदिति ने 76×2 की बजाय 72×6 कि है। उन्होंने बताया कि कैसे उन्होंने सही उत्तर तक पहुंचने में अदिति की मदद की। उन्होंने अदिति से नीचे लिखे प्रश्न दिये हुये क्रम में पूछे :

2×100 कितना होता है? अदिति ने कहा 200

2×90 ? 180

2×80 ? 160

2×76 ? (कुछ क्षण के बाद) 432

2×70 ? 140

2×80 ? 160

2×76 ? 432

2×100 ? 200

2×200 ? 400

2×76 ? 432

अचानक अदिति रुकी, थोड़ा सोचा और बोली, "रुकिये। मुझे लगता है कुछ गड़बड़ है। मुझे करने दीजिए।" उसने कागज और पैन्सिल निकाली और गुणा करके निकाला कि 2×76 बराबर है 152 के, और फिर अपने आपसे बहुत खुश हुई।

इस स्थिति में खास बात यह है कि शिक्षक ने क्या नहीं किया।

- उन्होंने एकदम से अदिति को सही उत्तर नहीं बताया।
- उन्होंने अदिति से यह नहीं कहा कि उसने गलती की थी।
- उन्होंने उसे मूर्ख कहकर उसके अहम को चोट नहीं पहुंचायी।
- उन्होंने उसे धमकाया नहीं।
- उन्होंने कक्षा को उस पर हंसाया नहीं।

जो शिक्षक ने किया, वह था—

- उन्होंने अदिति से बात की।
- उन्होंने सोचा और पहचाना कि गलती क्यों हो रही है।
- उन्होंने एक ऐसा तरीका सोचा जो, उनके अनुसार, अदिति को अपनी गलती समझने में मदद करेगा।
- उन्होंने धैर्य रखा और अदिति को यह समझने में मदद के लिए कि उसके सवाल हल करने के तरीके में कुछ गड़बड़ है, उसे कई मौके दिए।
- उन्होंने अदिति को अवलोकन करने, सोचने, पैटर्न पहचानने और संबंध जोड़ने के लिए उत्साहित किया।

यानि कि शिक्षक सीखने के लिए एक अर्थपूर्ण माहौल बनाने की कोशिश कर रही थी।

अफसोस की बात है, कि बहुत सारे शिक्षक ऐसा नहीं करते हैं। जैसा कि हमने चर्चा की थी, गणित सिखाते वक्त इस पर ज्यादा जोर दिया जाता है कि बच्चे ऐल्गोरिद्म को मशीनी ढंग से इस्तेमाल करना सीख लें। उन्हें यह समझने में मदद नहीं दी जाती कि ये ऐल्गोरिद्म क्यों और कैसे काम करते हैं।

E4) बहुत मेहनत के बाद 8 साल के हरि ने 2×88 का हल निकाला 176, जब उससे पूछा 2×89 कितना होगा तो बहुत मेहनत करके उसने उत्तर निकाला 178। आप कैसे उसकी यह समझने में मदद करेंगे कि उत्तर पाने का एक ज्यादा आसान तरीका है?

ज्यादातर बच्चे हरि की तरह होते हैं। उन्हें अवलोकन करने की, छानबीन करने की, संबंध पहचानने की और वे जो पैटर्न पाते हैं उनका व्यापकीकरण करने की ट्रेनिंग नहीं मिलती है। उनके लिए 2×88 वैसा ही एक "तथ्य" है जैसा कि 2×89 , जिसे पाने के लिए वे एकसा ही लंबा रास्ता अपनाते हैं। यह इसके बावजूद है कि अपने आसपास के माहौल में पैटर्न पहचानते हैं और जिन चीजों से उनका वास्ता पड़ता है उनके बीच के संबंध भी देख पाते हैं। हम इस स्थिति को कैसे सुधार सकते हैं?

असल में, गणित सिखाते वक्त हमें बच्चों को पैटर्न ढूँढने और पहचानने में, उन पर गौर करके उनसे प्राप्त नियमों को समझ पाने में व अपने सोच में उनका इस्तेमाल करने के लिए प्रेरित करना है। इसका एक अच्छा तरीका यह हो सकता है कि उन्हें ऐसे खेल खिलाए जाएं जिनमें वे चीजों को क्रम में लगा सकें। जब बच्चे, एक चीज के बाद दूसरी किसी क्रम में रखते हैं तो उनमें पैटर्न की समझ बनती है, व्यापकीकरण का एक अहसास बनता है। धीरे-धीरे उन्हें ऐसे खेलों में, जिनमें वे चीजों से खेलते हैं, ऐसे खेलों पर लाया जा सकता है जिनमें वे अपनी पहचानी चीजों के चित्रों को क्रम में रखते हैं। ऐसे ही, धीरे-धीरे बच्चे संख्याओं में भी पैटर्न देखने लगेंगे। एक बार जब बच्चे पैटर्न पहचानने, समझने व बनाने लगेंगे तब वे हिसाब के सवाल में उनका इस्तेमाल भी कर सकेंगे।



चित्र 3 : ठोस चीजों के इस्तेमाल से बच्चों को सीखने में मदद मिलती है।

लेकिन यह काफी नहीं है कि बच्चों को एक पैटर्न दिखा जाए, (जैसे गुणा में मान लीजिए) और फिर अलग विषय पर चले जाए। बच्चों को खुद खोजने के लिए समय चाहिए ताकि वे जो पता लगा रहे हैं उसका अहसास उन्हें हो पाए।

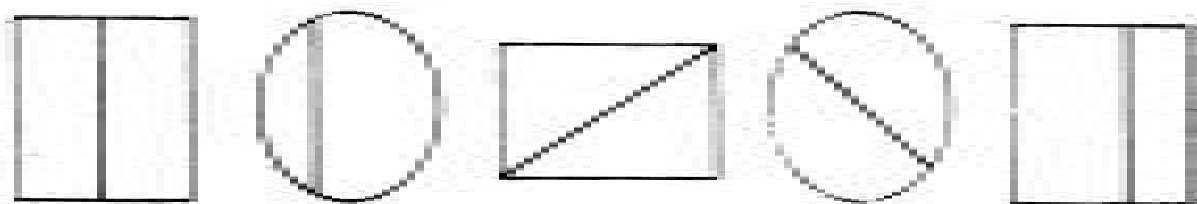
E5) ऐसी कुछ गतिविधियों/कामों/अभ्यासों की सूची बनाइये जो आप 50 बच्चों की एक कक्षा को देंगे जिससे कि बच्चे पैटर्नों को ढूँढ़ें और पहचानें, और बता पाएं कि वे पैटर्न क्या हैं।

आप सोच रहे होंगे कि हमने गणितीय सोच के एक मूलभूत पहलू यानि कि विशेष से व्यापक व व्यापक से विशेष तक जाने की क्षमता के बारे में कुछ क्यों नहीं कहा है। एक बच्चे में यह क्षमता विकसित होने के लिए, एक अवस्था के बाद उसे औपचारिक गणित सीखना पड़ेगा। अमूर्त अवधारणाओं व प्रतीकों को आसानी से समझ पाने के लिए उसे किन प्रक्रियाओं से गुजरना होगा?

अ-भा-चि-प्र

क्या इस शीर्षक ने आपको चक्कर में डाल दिया ? इसी तरह बच्चे भी ऐसे नये प्रतीकों को समझ नहीं पाते जो पूरी तरह समझाए बिना उन पर थोप दिए जाते हैं। बच्चों में गणित की समझ बनाने के लिए आपको उन्हें सावधानी से बनाए गए क्रम में सीखने के अनुभव देने होंगे। कुछ भी और सीखने की तरह ही गणित सीखना भी एक निरंतर प्रक्रिया है। बच्चों को ठोस अनुभवों का क्रम होना चाहिए :

- (अ) ठोस वस्तुओं के साथ अनुभव (जैसे, कंकड़, लकड़ियां या अन्य कोई भी आसानी से मिलने वाली चीजें);
- (भा) बोलकर अनुभवों के बारे में बताना, यानि कि भाषा का उपयोग (जैसे, शब्द/कहानी सवालों के उपयोग से, खेलों से);
- (चि) अनुभव को चित्रों द्वारा दिखाना (जैसे, मात्रा को चित्रों द्वारा दिखाना);
- (प्र) अनुभव का लिखित प्रतीकों द्वारा व्यापकीकरण (जैसे, संख्यांक)।
- चलिये, यह मान कर कि कोई बच्ची पूर्ण संख्याओं से परिचित है, उसकी “आधे” की अवधारणा सीखने के संदर्भ में इस क्रम को देखें।
- (अ) वह अपनी रोटी/सैंडविच, या रंगीन कागज का एक टुकड़ा, या अन्य कोई भी ऐसी चीजों को आधे-आधे में बाँटती है। बाद में वह, मान लीजिये, 6 चीजों को दो समूहों में बाँटती है।
- (भा) वह शब्द “आधे” को मात्रा से जोड़ने लगती है। आप ऐसे खेल बना सकते हैं जिससे वह अलग-अलग भिन्न संख्याओं के नामों से परिचित हो पाए।
- (चि) आप चित्र 4 में दिखाए गए तरीके से उसे विभिन्न चित्र दिखा सकते हैं,



चित्र : 4

और उससे बताने को कह सकते हैं कि किन चित्रों में रेखा चित्र को आधे में बांटती है। बच्चों को इस तरह के कई अनुभव दिए जा सकते हैं (खंड 4 देखिए)।

- (प्र) इसके बाद वह “आधे” का प्रतीक लिखना सीखती है।

E6) क्या आप सीखने के क्रम अ-भा-चि-प्र की आवश्यकता से सहमत हैं? यदि नहीं, तो आप गणित की अवधारणाओं को ठीक से समझने के लिए कौन-सा दूसरा रास्ता सुझाएंगे?

पाठ 2 में आपने पढ़ा था कि प्राइमरी स्कूल में बच्चे मूर्त-संक्रियात्मक अवस्था में होते हैं। अपने सीखने वालों को अगली अवस्था तक बढ़ने में मदद देने के लिए आपको ठोस व औपचारिक के बीच की कड़ियों पर जोर देना होगा।

औपचारिक गणित को ठोस अनुभवों से जोड़ने की आवश्यकता है।

आपको शायद ऐसा लगे कि एक बार यदि बच्ची कोई विशेष अमूर्त अवधारणा या प्रक्रिया समझ गयी है तो उसके बाद उसे अन्य अवधारणाएं या प्रक्रियाएं समझने के लिए ठोस अनुभवों की जरूरत नहीं है। लेकिन ऐसा नहीं है। औपचारिक गणित या मन में हिसाब अच्छी तरह कर पाने के बावजूद भी बच्चों को अवधारणाओं संक्रियाओं, सवालों, आदि को समझने के लिए वास्तविक चीजों और अनुभवों की जरूरत पड़ सकती है। उनके विकास का यह पेचदार (spiral) स्वरूप गणित सीखने की प्रक्रिया की विशेषता है।

उदाहरण के लिए, जब दो अंकों वाली संख्याएं सिखायी जाती हैं उससे पहले बच्चों को “स्थानीय मान” समझने की जरूरत होती है। इसके लिए उन्हें समूह बनाने के ढेर सारे ठोस अनुभवों से गुजरने की जरूरत होगी। इससे उन्हें धीरे – धीरे “दहाई” और “इकाई” समझने में मदद मिलेगी। इसके बाद वे छोटी संख्याओं के औपचारिक गुणा और भाग करने के लिए तैयार हो जाएंगे। और फिर उनमें बड़ी संख्याओं के संदर्भ में “स्थानीय मान” की समझ विकसित करने के लिए फिर विभिन्न प्रकार की सीखने के ठोस अनुभवों से गुजरने की जरूरत होगी।

इस तरह से, पहले छोटी संख्याओं और फिर बड़ी संख्याओं के संदर्भ में काम करने से बच्चों को अवधारणा की बेहतर समझ बनाने का मौका मिलता है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए एक बच्ची एक नई अवधारणा, जोड़ में क्रमविनिमयता, को समझने की कोशिश कर रही है। शुरू में, इतना काफी है कि वह इस गुण को छोटी संख्याओं से, जिनसे वह पहले परिचित है, के लिए ही समझ ले। अभी वह बड़ी संख्याओं से, जिनसे वह शायद उतनी परिचित न हो, क्यों जूझे?

E7) क्या आप गणित के पाठ्यक्रम के पेचदार विकास के कुछ और उदाहरण दे सकते हैं?

E8) कक्षा 3 के एक बच्चे से $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ जोड़ने को कहा गया। उसने $\frac{2}{9}$ लिखा। आपको क्या लगता है कि ऐसा क्यों हुआ ? आप गलती ढूंढने व ठीक करने में उसकी मदद कैसे करेंगे?

E8 में सीखने वाले की मदद करने का एक तरीका है ऐसे इबारती सवालों का इस्तेमाल करना जिनका उसकी दुनिया से ताल्लुक हो। उदाहरण के लिये, यदि आप एक पूर्वस्कूली बच्चे को “दो” का अर्थ सिखाने की कोशिश कर रहे हैं, तो एक अच्छा तरीका होगा कि आप उसे “मुझे दो पेन्सिलें दो” जैसे कई सवाल दें। इस तरह के सवालों को हल करते हुए बच्ची अभ्यास करती है व धीरे-धीरे “दो” का अर्थ पूरी तरह से समझ लेती है। इसी तरह, “तुम्हारे पास पाँच पेन्सिलें थीं, यदि मैंने तुम्हें बारह और दीं तो तुम्हारे पास कुल मिलाकर कितनी पेन्सिलें हो जाएंगी?” की तरह के इबारती सवाल करने से बच्चे जोड़ की अवधारणा बनाते हैं।

लेकिन, इबारती सवाल आम तौर पर कक्षा 1 के अंत में कराए जाते हैं। यह शायद इसलिए है क्योंकि हममें से कई लोगों की यह गलत धारणा है कि इबारती सवाल एल्गोरिद्मों का अभ्यास कराने का एक तरीका है। बड़ों की तार्किक सोच तय करती है कि औपचारिक प्रतीकों को पहले सिखाना चाहिए। क्या आप इससे सहमत हैं?

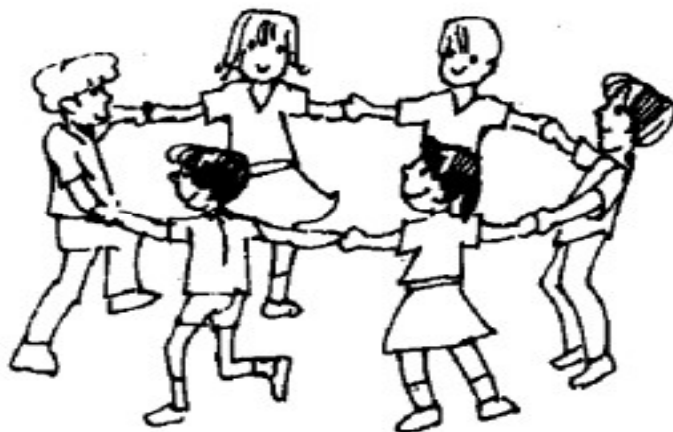
E9) आपको क्या लगता है कि बच्चों को इबारती सवाल कब देने चाहिए – उनके औपचारिक एल्गोरिद्म में निपुण होने से पहले, या उसके बाद ? आपके मत का कारण क्या है?

वैसे तो कोई भी पाठ्य पुस्तक ऐसे किसी एक स्तर से शुरू नहीं हो सकती जो हरेक बच्चे के लिए सही हो। यदि शिक्षक चाहते हैं कि वे गणितीय सोच व क्षमताओं की पक्की नींव बनाएं, तो यह महत्वपूर्ण है कि पूर्वस्कूली व प्राइमरी स्कूल के बच्चों के लिए वे पाठ्य पुस्तक के अलावा अन्य शिक्षण सामग्री का भी इस्तेमाल करें। वास्तव में, अपने आप में गतिविधियों पर आधारित एक पाठ्यक्रम दे देना ही काफी नहीं है। बेहतर यह होगा कि उसके साथ-साथ पाठ्य पुस्तक की जगह एक कार्यपुस्तक (workbook) का इस्तेमाल किया जाए, खास तौर से छोटे बच्चों के लिए।

एक बच्चे को किसी भी अवधारणा को समझने के लिए उसे ठोस अनुभवों से शुरू करके अमूर्त स्तर तक, पहुँचने के लिए सीखने के अनुभव एक क्रम में देने चाहिये। मोटे तौर पर यही क्रम रख कर, इसमें थोड़ी बहुत तब्दीलियाँ की जा सकती हैं। और क्रम के हर चरण में आपको यह जानना जरूरी है कि बच्ची को कितना समझ में आया है।

खेल-खेल में सीखना

बच्चे गणित की कई बुनियादी अवधारणाएं खेलों से सीख सकते हैं। उन्हें जाने पहचाने संदर्भों में खेलने में मज़ा आता है। उनके खेलों से, अपने आप ही, मज़े-मज़े में, बहुत सारी गणितीय गतिविधियां आ जाती हैं। नए विचारों और अवधारणाओं से छोटे बच्चों का परिचय खेलों व ऐसी परिचित स्थितियों से कराया जा सकता है, जो उन्हें मज़ेदार लगे और जिनसे उन्हें घबराहट या परेशानी न हो। यही बात प्राइमरी के बड़े बच्चों के लिए भी लागू होती है।



चित्र 5 : बच्चे खेल-खेल में गणितीय आकारों के बारे में सीख सकते हैं।

जब छोटे बच्चे चीजों को आपस में बांटते हैं वास्तव में वे एक-से-एक का मेल मिलाते हैं। जब वे गुटकों से खेलते हैं तो वे अलग – अलग आकारों से प्रयोग कर रहे होते हैं। जब वे “पाँच छोटे बंदर” जैसा गाना गाते हैं तो वे संख्याओं के नाम सीखते हैं।

बच्चों को इबारती खेलों में भी मज़ा आता है। वे आम तौर पर शब्दों के पैटर्न पकड़ने में तेज़ होते हैं। क्योंकि पैटर्न पहचानना गणितीय सोच का मूलभूत पहलू है, बच्चे अपनी भाषा विकसित करने के साथ-साथ वास्तव में गणित भी कर रहे होते हैं।

आप कोई भी गणितीय अवधारणा सिखाने के लिए ढेरों खेल बना सकते हैं। ये खेल या तो पूरी कक्षा के साथ खेले जा सकते हैं, या छोटे समूहों में। खेल ऐसे भी बनाए जा सकते हैं जिनसे बच्चे संबंधित गणितीय भाषा भी साथ ही सीख जाएं।

यहां टीम में खेले जाने वाले कुछ खेलों के उदाहरण दिए जा रहे हैं।

क) एक टीम अपने सामने कुछ कंकड़ रख लेती है दूसरी टीम :

पहला खेल— उतने ही कंकड़ रखे, या

दूसरा खेल— गिने और बताए कि वे कितने हैं, या

तीसरा खेल — 14 कंकड़ (मान लीजिए) करने के लिए जितने भी कंकड़ और चाहिए उतने रखें, या

चौथा खेल — 3 कंकड़ छोड़ कर बाकी उठा लें, आदि।

जैसे – जैसे खेल आगे बढ़ता है आप उन्हें संख्याओं के नाम भी सिखा सकते हैं।

ख) एक टीम दो पासे (बिन्दु या संख्याओं वाले) फेंके और कंकड़ों के ढेर में से उतने कंकड़ उठा ले जितना कि दोनों पासों की संख्याओं का जोड़ हो (या अंतर हो, या गुणा हो)। दूसरी टीम भी ऐसा करे। दो बारियों के बाद जिसके पास भी ज्यादा कंकड़ होंगे वह जीत जाएगा।

यहां भी, खेल के दौरान बच्चे "छः जोड़ दो बराबर आठ" जैसी भाषा से ज्यादा परिचित हो सकते हैं।

ग) कंकड़ों, पासों, टहनियों, कार्डों या मोतियों से आप "स्थानीय मान" सिखाने के लिए खेल बना सकते हैं। 10 कंकड़ों (10 के आधार के लिए) को एक कार्ड या एक मोती के बराबर मान कर, अदला-बदली जा सकती है और इसका लेखा-जोखा रखा जा सकता है। एक बार जब वे दहाईयों की पकड़ ठोस चीजों से बना लेते हैं तो उन्हें संख्याओं का इस्तेमाल करने वाले खेलों से भी परिचित करवाया जा सकता है।

उदाहरण के लिए, आप 10-10 कार्डों के दो समूह ले सकते हैं जिन पर 0 से 9 तक के संख्यांक लिखे हों। इन्हें बच्चों की दो टीमों में इस्तेमाल करेंगी। बच्चे कार्डों को फेंट कर और उल्टे करके टेबल पर रख दें। फिर वे बारी-बारी से, एक बार में एक कार्ड चुनेंगे और उसे बोर्ड पर "इकाई" या "दहाई" के स्तम्भ में रखेंगे। एक कार्ड जहाँ रखा जा चुका है यहाँ से हटाया नहीं जा सकता। उद्देश्य सबसे बड़ी संख्या बनाना है। वे जो भी नम्बर बनाएं उसे जोर से कह दें। उदाहरण के लिए, यदि पहले समूह का संख्या 3 का कार्ड खुला और उसे उन्होंने दहाई के स्तम्भ में रखा, तो उन्हें जोर से 30 कहना चाहिए, वगैरह।

यह खेल कार्डों की जगह दो पासों से भी खेला जा सकता है।

E10) बच्चों को निम्नलिखित अवधारणा/कौशल सिखाने के लिए एक-एक खेल का उदाहरण लिखें।

- i) गुणा,
- ii) एक वृत्त क्या होता है,
- iii) अन्दाज़ लगाने की क्षमता

यह भी बताएं कि इन अवधारणाओं या कौशलों को सिखाए जाने से पहले आपके हिसाब से बच्चों को क्या आना चाहिए।

नीचे हमने अटकलबाजी के कुछ खेलों के उदाहरण दिए हैं। इनसे बच्चों को अपने गणितीय सोच और भाषा का विकास करने के बहुत से मौके मिलते हैं—

(क) एक टीम संख्या सोच ले और शिक्षक के कान में बता दे। दूसरी टीम को यह संख्या बतानी है। संख्या का अन्दाज लगाने के लिए उन्हें कुछ संकेत दिया जाएगा जैसे: "यह संख्या पाँच और नौ के बीच की एक अभाज्य (prime) संख्या है", या "यह इस कक्षा की लड़कियों का $\frac{2}{5}$ वां हिस्सा है।" क्योंकि बच्चे प्रश्न बना रहें हैं, इसलिए वे उनके स्तर पर ही निर्भर करेंगे।

(ख) एक और खेल में कक्षा के सामने जानी पहचानी चीजों का एक ढेर रख दिया जाए। एक टीम या बच्चे (आप जैसे भी खेल खिलाना चाहें) से किसी एक चीज़ को चुनने व उसका नाम शिक्षक के कान में कह देने के लिए कहा जाए। दूसरे बच्चे/समूह बारी-बारी से चुनी हुई चीज़ का अन्दाज लगाएं जिसके लिए वे उसके माप, आकार या दूसरी चीज़ों के सापेक्ष वस्तु का स्थान जैसे संकेतों को आधार बनाएं। जैसे, यह ज्यादा लम्बी है, ज्यादा भारी है, सामने रखी है, यह गोल नहीं है, आदि-आदि।

- (ग) आप अटकलबाजी से ऐसे खेलों के बारे में सोच सकते हैं जिनमें अन्दाज़ लगाने वाले कुछ ऐसे सवाल ही पूछ सकते हैं जिनके उत्तर “हाँ” या “नहीं” में ही हों। ऐसे खेल बच्चों को विशिष्ट सवालों से (क्यों वह दरवाज़ा है ? किताब है?) ज्यादा व्यापक सवालों (क्या उस पर बैठ सकते हैं ? क्या वह मेरे जितना बड़ा है ? क्या कमरे में एक से ज्यादा हैं ?) की ओर बढ़ने का मौका देते हैं। इससे उत्तर तक पहुँचने के लिए जरूरी प्रश्नों की संख्या कम हो सकती है। जैसे, मान लीजिये कि चुनी हुई चीज़ 1 से 100 के बीच की संख्या है। शुरू में, शायद बच्चे अलग-अलग संख्याएँ लेकर पूछें कि क्या वह 4 है, या 26 है, वगैरह। कुछ समय के बाद वे पूछना सीख जाएंगे कि “क्या वह 4 से बड़ी है?” “क्या वह सम संख्या है ?” आदि। बाकी बच्चे भी इस तरीके को जल्दी पकड़ लेंगे। या, मान लीजिये, चुनी हुई वस्तु एक बेलनाकार डिब्बा है। तब प्रश्नों में गणित की शब्दावली आ जाएगी जैसे – क्या वह गोलाकार है? क्या वह किसी रेखा के प्रति सममित है ? क्या उसमें 4 कोण हैं?

ऐसे खेल बच्चों की व्यापकीकरण करने, विशिष्टीकरण करने, अन्दाज़ लगाने व पैटर्न पहचानने की क्षमताएं विकसित करके उनके गणितीय सोच का विकास करते हैं। यानि कि, वे सब उनकी गणितीय सोच व तार्किक क्षमता बढ़ाते हैं।

और बच्चों में गणित की समझ बढ़ाने के लिए सामूहिक नृत्य और खेल-कूद की गतिविधियों, वगैरह के इस्तेमाल के बारे में आप क्या सोचते हैं? अब आप ऐसे ही कुछ उदाहरण दीजिए।

E11) बच्चों को समय के अन्तराल की अवधारणा से परिचित कराने के लिए अटकलबाजी का एक खेल बनाएँ।

E12) आप ज्यामिति की अवधारणाएँ सिखाने के लिए सामूहिक नृत्य का उपयोग कैसे करेंगे?

बहुत सारी अन्य मजेदार गतिविधियों का उपयोग बच्चों को ज्यामिति की विभिन्न अवधारणाओं से परिचित कराने के लिए किया जा सकता है। जैसे, बच्चे सममिति (symmetry) के बारे में “रंगोली” के सममित (symmetrical) पैटर्न कागज़ पर बना कर सीख सकते हैं।



चित्र 6 : बच्चे गणितीय कुशलताएँ ओरीगामी से सीख सकते हैं।

ओरीगेमी, यानि कागज़ मोड़ने की कला, के द्वारा अलग-अलग दो व तीन-आयामी आकारों से उनका परिचय कराया जा सकता है। सिखाते वक़्त, हर कदम पर शिक्षक गणित की शब्दावली पर जोर दे सकती है जैसे, “अब कागज़ को मोड़कर आधा करो”, “फिर मोड़कर इससे एक वर्ग बनाओं”, “जब तुम इस कोने को इस तरह से मोड़ोगे (दिखाकर), यह एक त्रिभुज बन जाएगा।” **टैनग्राम** का इस्तेमाल भी इसी उद्देश्य के लिए किया जा सकता है।



(क)



(ख)

चित्र 7 : (क) एक टैनग्राम, (ख) टैनग्राम से बने कुछ आकार

अभी तक हमने ठोस से अमूर्त की ओर बढ़ना, ठोस विधि पर खूब समय लगाना, और गणित पढ़ाने के लिए मजेदार गतिविधियों का इस्तेमाल करना— इन बातों के महत्व पर जोर दिया। सीखने का माहौल बनाने के लिए यह सब काफी नहीं है। अगले खंड में हम इसके कुछ और पहलूओं पर चर्चा करेंगे।

सीखने में मददगार अन्य तरीके

इस खंड में हम खास ध्यान तीन बातों पर देंगे— दोहराव की जरूरत, दूसरे बच्चों से सीखना और गलतियों का इस्तेमाल करके सीखना।

जरूरी नहीं कि दोहराव उबाऊ हो

बहुत छोटी उम्र से ही बच्चे कई बातों को दोहराते हैं और इससे सीखते हैं, जैसे, चीज़े गिराना व उठाना, डिब्बे और टीन खोलना और बन्द करना, कुछ शब्दों को बार—बार दोहराना, ताक—झाँक का खेल बार—बार खेलना, बड़ों से बार—बार कहानियाँ दोहराने को कहना, आदि। क्या आप इनमें से किसी भी काम को रट कर सीखना कहेंगे ? यानि कि,

दोहराव का मतलब रटना नहीं है।

दोहराने के ऐसे कई नए तरीके सोचे जा सकते हैं, जिनसे कि वह मजेदार बनाया जा सके। इसे बच्चे मजेदार गतिविधियों के द्वारा कर सकते हैं, जिनमें से कुछ की शुरुआत वे खुद भी कर सकते हैं। इन दोहरावों के दौरान भाग लेने वाले बच्चे हर बार कुछ नया व फर्क देखते और अनुभव करते हैं।

दूसरी तरफ, रट कर सीखने में इस तरह की विभिन्नता नहीं होती क्योंकि उसमें प्रक्रिया का दोहराव नहीं होता, बल्कि “जानकारी” ही मशीनी तरीके से दोहराई जाती है (उदाहरण के लिए, पहाड़े मशीनी तरीके से रट कर याद करना।)

अगर आप आस—पास देखें तो आप पाएंगे कि किसी भी बच्चे के माहौल में दोहराव स्वाभाविक तौर पर अलग—अलग रूपों में होता है। लेकिन सीखने के औपचारिक माहौल में, बच्चों की रुचि बनाए रखने के लिए, दोहराव को काफी विविधता के साथ जानबूझ कर लाना पड़ता है। आप इस चुनौती को कैसे पूरा करेंगे ? शायद नीचे दिया गया उदाहरण हमें कुछ विचार दे।

बच्चे आम तौर पर पहाड़ों से बहुत परेशान रहते हैं। क्या यह सचमुच जरूरी है कि उन्हें मशीनी तरीके से बार—बार दोहराया जाए? और क्या रटकर याद करने से बच्चे को पहाड़ों को समझने में मदद मिलती है ? क्या यह सच नहीं है कि एक दिए हुए क्रम में पहाड़ों का इस्तेमाल कर ही नहीं पाते। यह बात साफ नज़र आती है जब आप किसी और क्रम में उनसे गुणज पूछें। क्या यह बेहतर नहीं है कि किसी बात को सिर्फ रटवाने की बजाय बच्चे को उसमें शामिल पैटर्न पहचानने में मदद की जाए? बच्चों के दिमाग में गुणज की समझ बैठाने के लिए और पहाड़ों में शामिल पैटर्नों को पहचानने की क्षमता विकसित करने के लिए आप कई गतिविधियाँ सोच सकते हैं। उदाहरण के लिए, बच्चों से दो—दो, चार—चार, पांच—पांच सेबों के समूह को पहचानने के लिए कहा जा सकता है। और फिर उनसे “चार—चार सेबों वाले कितने समूह हैं?”, “ये कुल कितने सेब हुए?” जैसे सरल सवाल पूछे जा सकते हैं। और इस तरह की गतिविधि तरह—तरह की चीज़ों से की जा सकती हैं।

दोहराव रूचिकर व अलग—अलग तरीकों से होना चाहिए ताकि बच्चों को सीखने में रूचि बनी रहे।

E13) आप बच्चों की पाँच—पाँच और दस—दस के समूह बनाने में मदद के लिए कक्षा में की जाने वाली किस तरह की गतिविधियाँ सोच सकते हैं?

जब उनको इस तरह की गतिविधियों का काफी अभ्यास हो जाए, तब वे जो कर रहे हैं उसे गणितीय भाषा में लिखने के लिए उनकी मदद की जा सकती है। जैसे, वे दो-दो सेबों वाले 4 समूहों को $4 \times 2 = 8$ लिख सकते हैं। इसे चित्र द्वारा भी दिखा सकते हैं।

अब बच्चे पहाड़ों में मजे से पैटर्न ढूँढ पाने की स्थिति में होंगे। आप उनसे 10×10 को ग्रिड पूरा करने को कह सकते हैं। हर खाने में बच्चे को खाने की लाइन की संख्या और उसकी स्तम्भ की संख्या का गुणनफल भरना होगा।

इस तरह की गतिविधि कुछ लम्बे समय तक की जा सकती है। बच्चों को या तो उतना समय दिया जा सकता है जितना उनको चाहिये या जितने समय तक उनकी रुचि गतिविधि में बनी रहे। उन्हें आपस में बात करने दें और पैटर्न खुद ही खोजने दें।

E14) यह देखने की कोशिश कीजिए कि अलग-अलग बच्चे किस क्रम में संख्याएं ग्रिड में भरते हैं। मेरा दावा है कि सभी बच्चे पहले एक, पाँच और 10 के सारे गुणनफल भरेंगे। आप मेरे इस दावे की जांच कीजिए। क्या आपके इस दावे को गलत साबित करने वाला कोई प्रमाण मिला।

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

E15) क्या दोहराव के द्वारा बच्चों की समय की अवधारणा समझने में मदद की जा सकती है ? इसके लिए एक ऐसी गतिविधि को विस्तार से लिखकर बताइए जो पाँच बच्चों के एक समूह को दी जा सके।

बच्चे एक दूसरे से सीखते हैं

एक दिन मैं पास के ही एक स्कूल में, शिक्षक और बच्चों के बीच किस तरह की परस्पर क्रिया होती है, यह देखने गयी थी। बच्चों को उनकी शिक्षक ने एक सवाल दिया हुआ था, और वे अपनी कॉपी में उसे हल करने में लगे हुए थे। शिक्षक बच्चों के बीच घूम रही थी और रुक-रुक कर उनसे पूछ रही थी कि कोई एक जवाब उन्होंने कैसे निकाला। ऐसा करने में अधिकतर बच्चों ने अपना लिखा हुआ हल मिटा दिया, चाहे वह सही था या गलत। आपने भी ऐसा व्यवहार देखा होगा। इससे क्या पता चलता है? क्या यह सवाल हल करने की अपनी क्षमता के बारे में आत्मविश्वास की कमी नहीं दिखाता है। आत्मविश्वास की यह कमी बड़ों में भी होती है जब उनका किसी विशेषज्ञ से सामना होता है।

जिन बच्चों में सोचने की अपनी क्षमता पर भरोसा नहीं होता, उन्हें बाद में इस क्षमता को विकसित करने में दिक्कत होगी। इसलिए यह जरूरी है कि सीखने का माहौल ऐसा बनाया जाए जिससे बच्चों का

आत्मविश्वास बढ़े।

लेकिन यह हम कैसे कर सकते हैं ? यदि समूहों में खेलते हुए बच्चों को आप ध्यान से देखें तो आपको शायद कुछ संकेत मिल जाए। बच्चे जब एक साथ खेलते हैं तो वे एक दूसरे की सोच जाँचते रहते हैं। खेलों व गतिविधियों से बच्चों को एक दूसरे से, बिना किसी डर के, एक आज़ाद और खुले माहौल में मेल-जोल का मौका मिलता है। ऐसे मेल-जोल के दौरान बच्चे अपनी बातों को एक दूसरे के सामने जवाबों और सुझावों के तौर पर रखते हैं। एक बच्चे के लिए दूसरे की बात की अहमियत इतनी ही होती है जितनी कि एक राय की होती है जिसे जाँच कर माना भी जा सकता है, या नहीं भी।

दूसरी तरफ, कोई बड़ा, आम तौर पर बच्चों के सामने अपना मत एक “सच्चाई” के रूप में रखता है, जिसे बिना किसी सवाल या शक के मानना पड़ता है। यदि बड़े के कथन को बच्ची शक से देखे या सोच में पड़ जाए, तो बड़ा अपने कथन को दोहराता है, पहले धीरज से, फिर चिड़चिड़ाकर, और अन्त में, गुस्से से। अंतिम निष्कर्ष होता है, “मूर्ख ! तुम यह भी नहीं समझ सकते !” बच्ची, जो पहले से ही यह समझती है कि वह बड़े के सामने कुछ भी नहीं है अपने बारे में यह राय मान लेती है, और उसका आत्मविश्वास कम होने लगता है।

इसीलिए, सीखने के लिए, बिना डर के आपसी मेल-जोल होना बहुत जरूरी है। इस तरह का मेल-जोल अन्य कारणों से भी महत्वपूर्ण है।

E16) क्या आप बच्चों के आपसी मेल-जोल और एक दूसरे से सीखने के और फायदे सोच सकते हैं?

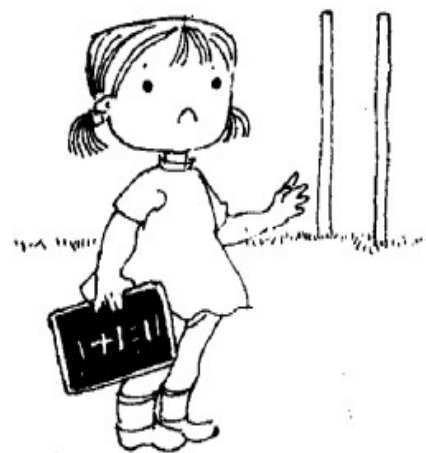
यदि आप इससे सहमत हैं कि बच्चे एक-दूसरे से बहुत कुछ सीखते हैं, तो हम उन्हें ज्यादा से ज्यादा ऐसे मौके किस तरह दे सकते हैं? महत्वपूर्ण बात यह है कि ऐसी परस्पर क्रियाएँ अनौपचारिक हों, मज़ेदार हों और बिना किसी डर के हों। एक बच्चे से सिर्फ यह कह देना कि, “तुम अपने पड़ोसी/दोस्त/भाई/बहन को पढ़ा दो” आम तौर पर कारगर नहीं होता। यह इसलिए क्योंकि तब बाल-शिक्षक बड़ों की नक़ल करने की कोशिश करता है, और सीखने वाला उतना ही घबरा जाता है जितना कि बड़े से।

बच्चे एक-दूसरे से सीख पाएँ ऐसी स्वाभाविक और कुछ निकलने लायक परिस्थिति बना पाना आसान नहीं है। शायद, बच्चों को बिना उनकी जानकारी के, स्वाभाविक तरह से मिलते-जुलते खेलते, बात करते हुए देखना चाहिये। इससे शायद हमें कुछ तरीका समझ में आए कि कक्षा में ऐसी स्थितियाँ बनाई जा सकती है कि बच्चे एक दूसरे से सीख सकें।

E17) कुछ बच्चों की स्वाभाविक परस्पर क्रिया को देखने के बाद, इसकी वे विशेषताएँ लिखिये, जिनके कारण बच्चों का एक - दूसरे से सीखने का तरीका, अन्य तरीकों से बेहतर साबित होता है।

गलतियाँ उपयोगी होती हैं

बच्चों को पढ़ाने के दौरान आपने पाया होगा कि बच्चे तमाम गलतियाँ करते हैं। गलतियाँ होने पर आप क्या करते हैं? इनसे आपके बच्चे के बारे में क्या पता चलता है - सीखने में असफलता, या समझने की एक कोशिश? या दोनों? यदि ऐसा है, तो इन दोनों में अंतर कैसे करते हैं और कैसे तय करते हैं कि किसी खास परिस्थिति में क्या है?



चित्र 8 : बच्चों की गलतियाँ उनकी दुनिया में झांकने का मौका देती है।

बच्चों की गलतियाँ उनकी सीखने की प्रक्रिया का स्वाभाविक और जरूरी हिस्सा है। नई अवधारणाओं को समझने की प्रक्रिया में बच्चे अपनी अभी तक की समझ को लागू करते हैं। हो सकता है कि यह औपचारिक शिक्षण के तरीके व विषयवस्तु से मेल न खाएँ।

बच्चों की गलतियाँ से यह भी पता चलता है कि बच्चे कैसे सोचते और सीखते हैं। जैसे, 51 के लिए 15 लिखना हमें यह बताता है कि बच्ची अभी भी स्थानीय मान की अवधारणा समझ नहीं पाई है, और उसे समूह बनाने का और करने की जरूरत है।

बच्चों की गलती को इस तरह से ध्यान से देखने से शिक्षक को सीखने वाले का गणितीय सोच विकसित करने में बहुत मदद मिल सकती है। गलतियाँ करना और उनसे सीखना एक पक्की समझ बनाने की प्रक्रिया का हिस्सा है। बल्कि, यह सही उत्तर निकालने से ज्यादा महत्वपूर्ण है। दुर्भाग्यवश, परम्परागत शिक्षक अभी भी यही मानते हैं कि सीखना केवल तभी होता है जब सही उत्तर दिए जाएं।

E18) एक पांचवी की बच्ची $3 \div - = - 3/2$ में रिक्त स्थान में $9/2$ भरती है। आपके हिसाब से यह गलती क्यों हुई? आप इस स्थिति को कैसे सुधारेंगे?

सारांश

इस पाठ में हमने मुख्य रूप से इस बात पर चर्चा की है कि प्राइमरी स्कूल के बच्चों के लिए गणित सीखना किस प्रकार ज्यादा अर्थपूर्ण बनाया जा सकता है। इसके लिए हमने कई उदाहरण दिए हैं यह दिखाने के लिए कि बच्चे कैसे सीखते हैं और हम कैसे उनके लिए उचित खेल और गतिविधियाँ बना सकते हैं। हमने उदाहरणों से यह दिखाया है कि गणित सीखने की प्रक्रिया का बच्चों के सोचने के ढंग से गहरा संबंध है। हमने खास तौर पर नीचे दिए गए मुद्दों पर जोर दिया है।

- 1) बच्चे मानसिक समझ के निश्चित स्तर और जानकारी के साथ आपके पास आते हैं। आपको इसे आधार मानकर आगे बढ़ने की जरूरत है।
- 2) गणितीय सोच से संबंधित कुशलताओं, जैसे संबंध बनाना, विशिष्टीकरण और व्यापकीकरण करना, परिकल्पना बनाना और उसे सिद्ध करना या उसका खंडन करना, को विकसित करने में बच्चों की मदद करनी चाहिए।
- 3) ठोस चीजों का इस्तेमाल करते हुए औपचारिक गणित को बच्चों की सहज समझ से जोड़ना चाहिए।
- 4) एक बच्चे को गणित पढ़ाते समय हमें सीखने के अनुभवों को बच्चे के विकास के स्तर के अनुसार क्रमवार करना चाहिए, न कि केवल विषयवस्तु के अनुसार। मोटे तौर पर यह क्रम इस प्रकार है:

अनुभव — भाषा — चित्र से दिखाना — प्रतीक

- 5) किसी भी नई अवधारणा की अच्छी समझ बनाने के लिए दोहराव जरूरी है। दोहराव को आप रूचिकर बना सकते हैं। दोहराव और रटना एक बात नहीं है।
- 6) बच्चे अपने साथ के बच्चों से आसानी से सीखते हैं क्योंकि आम तौर पर वे एक दूसरे से डरते नहीं हैं।
- 7) बच्चों की गलतियों का विश्लेषण करना व पढ़ाने में उनका उपयोग करना जरूरी है।

पाठ — 15

कक्षा का कामकाज

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- विषयवस्तु के शीर्षक—उप शीर्षक
 - गणित सीखना : आइए, थोड़ा दोहराएँ
 - शिक्षण योजना
 - योजना क्यों बनाएँ?
 - योजना कैसे बनाएँ?
 - अलग-अलग स्तरों की योजना
 - साल की योजना
 - इकाई की योजना
 - पाठ की योजना
 - सीखने-सिखाने की प्रक्रिया का मूल्यांकन
- सारांश

परिचय

पिछली पाठों से हम जान ही चुके हैं कि स्कूलपूर्व और प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण को निम्नलिखित संदर्भों में समझना जरूरी है :

- गणित सीखने का महत्व,
- बच्चों की सोचने व सीखने की प्रक्रियाएं, और
- सिखाने के तरीकों पर इन प्रक्रियाओं का असर।

अभी तक हमने इस बात पर ध्यान केंद्रित किया कि बच्चे गणित कैसे सीखते हैं और शिक्षक होने के नाते हम इस प्रक्रिया को रोचक व सार्थक कैसे बना सकते हैं। हमने देखा कि बच्चों की सीखने के लिए ठोस अनुभवों तथा एक सार्थक संदर्भ की जरूरत होती है। हमने यह भी देखा कि वे खेल के जरिये व बारम्बार दोहराव के द्वारा सीखते हैं। सीखना बच्चों के लिए एक तरह से चीजों के बारे में समझ बनाना है। वे अब तक जो कुछ जान चुके उसी पर अपनी समझ को वो बढ़ाते हैं। वे अपने हर अनुभव से कुछ सीखते हैं।

इस पाठ में हम सबसे पहले उन सिद्धान्तों की सूची बनाएंगे जिनके आधार पर प्राइमरी स्तर पर गणित सीखने का काम कारगर ढंग से किया जा सकता है। सवाल यह है कि हम अपनी समझ को कक्षा में असरदार शिक्षण के लिए कैसे इस्तेमाल कर सकते हैं ? इस इकाई में हम इस सवाल पर विस्तार से विचार करेंगे।

सीखने के लिए प्रभावी माहौल बनाने के निम्नलिखित पहलुओं पर हम मोटे तौर पर विचार करेंगे :

- क) बच्चों के मनोवैज्ञानिक, सामाजिक व संज्ञानात्मक विकास के मुताबिक गणितीय अवधारणाओं को क्रमबद्ध करना।
- ख) आसानी से मिलने वाली सामग्री के इस्तेमाल से ऐसी उपयुक्त गतिविधियों की रचना करना जिनसे बच्चों को गणित की विभिन्न अवधारणाएं और कौशल सीखने में मदद मिले।

ग) बच्चों द्वारा सीखी गई बातें और सीखने-सिखाने की प्रक्रिया, दोनों के मूल्यांकन के तरीके विकसित करना।

उद्देश्य

- उन बातों की सूची बना सकेंगे जो बच्चों को कोई गणितीय अवधारणा या कौशल सिखाने के लिए शिक्षण-अनुभवों की रचना करते समय ध्यान में रखने चाहिए;
- स्कूलपूर्व और प्राइमरी स्कूली स्तर पर गणित के पाठ्यक्रम (के किसी खास विषय को) पढ़ाने के लिए पाठ या इकाई की योजना बना सकेंगे तथा उसे लागू कर सकेंगे;
- सिखाने के अपने तरीकों का और गणित में अपने छात्रों की समझ के स्तर का मूल्यांकन कर सकेंगे।

गणित सीखना : हमने अभी तक जितना पढ़ा है, उसी में से ये बातें उभरती हैं।

1) गणित सीखना सार्थक होना चाहिए।

सीखना सार्थक तब होता है जब बच्चों को अपनी समझ बनाने का मौका मिले, और जो कुछ वे सीखें उसे अपने रोजमर्रा के अनुभवों से जोड़ सकें। इसके अलावा, उनसे यह नहीं कहा जाना चाहिए कि वे आंख मूंदकर किसी ऐल्गोरिद्म को लागू करें। उन्हें यह पता होना चाहिए कि किसी नियम का इस्तेमाल क्यों किया जा रहा है।

2) गणित सीखना एक विकास प्रक्रिया है।

सीखना तभी असरदार होता है जब शिक्षक बच्चों को उनके विकास के स्तर के मुताबिक गणित को खोजने और महसूस करने के लिए एक सही माहौल दे सके। गणित सीखने के लिए अमूर्त विचारों को समझने व आत्मसात् करने की क्षमता की जरूरत होती है। लेकिन बच्चों में अमूर्त विचारों से निपटने की क्षमता धीरे-धीरे विकसित होती है। खासकर प्राइमरी स्कूल के बच्चे मूर्त-संक्रियात्मक अवस्था में होते हैं। वे सिर्फ उन प्रतीकों का इस्तेमाल कर पाते हैं जो उनको सार्थक लगें। गणित का जो ज्ञान विकसित किया जा रहा है, यदि ये प्रतीक उससे (ठोस और/या मानसिक रूप से) सीधे जुड़े हों, तो इनका अर्थ खुद-ब-खुद जाहिर हो जाएगा। इस कड़ी को जोड़ने में ठोस चीजों की मौजूदगी से मदद मिलती है। यदि सीखने की उपयुक्त ठोस स्थितियां मिलें तो प्राइमरी स्कूल के बच्चे तस्वीरों व रेखाचित्रों के माध्यम से आसानी से प्रतीकात्मक स्तर पर पहुंच जाते हैं।

3) गणित का सीखना पहली सीखी गई बातों पर आधारित होना चाहिए।

किसी बच्ची को गणित सिखाते समय, हमें पहले यह मालूम करना चाहिए कि वह पहले से कितना जानती है और क्या-क्या कर सकती है। हमें उस गणितीय अवधारणा से भी जोड़ना होगा जिसे हम आगे पढ़ाने जा रहे हैं ताकि सीखने की प्रक्रिया सार्थक रहे और उसमें दिक्कत पैदा न हो।

4) गणितीय अवधारणाओं को क्रमबद्ध ढंग से पेश करना चाहिए।

गणितीय अवधारणाओं की प्रकृति सीढ़ीनुमा होती है जिसमें पायदानों का एक निश्चित क्रम होता है। इसलिए गणितीय अवधारणाएं और कौशल सिखाने के लिए इन्हें सिलसिलेवार क्रम में देना बहुत जरूरी है। यहां तक कि जो सवाल पूछे जाएं उनका चुनाव भी बहुत सोच समझकर करना होगा ताकि इसके लिए जरूरी तार्किक सोच बच्चे समझ सकें।

5) गणित सीखने में बच्चों की सक्रिय भागीदारी हो।

सक्रिय भागीदारी का मतलब है कुछ करना, चीजों व घटनाओं का अवलोकन करना, तुलना करना, सवाल पूछना, पैटर्न खोजना, वर्गीकरण करना, व्यापकीकरण करना, सवाल बनाना और उन्हें हल करने की कोशिश करना, वगैरह। बच्चे जो कुछ सीख रहे हैं उसकी समझ बनाने में सक्रिय भागीदारी से उन्हें बढ़ावा मिलता है, और इस तरह वे गणित की बेहतर समझ विकसित कर पाते हैं। शिक्षण की यह चुनौती है कि बच्चों को ऐसे अलग-अलग तरह के अनुभव दिए जाएं जो उनकी सक्रिय भागीदारी को बढ़ावा दें और पुरस्कृत करें।

6) गणित की भाषा बोलना सीखने का एक जरूरी हिस्सा है।

जिन गणितीय बातों को सीख रहे हैं उनसे जुड़े शब्दों का इस्तेमाल करना गणितीय सोच विकसित करने के लिए निहायत जरूरी है। बच्चों को हर स्तर पर गणितीय विचारों के बारे में बोलने के भरपूर अवसर मिलने चाहिए। उन्हें यह सीखना चाहिए कि मौखिक रूप से गणितीय शब्दों और मुहावरों का इस्तेमाल कैसे किया जाता है। इसके बाद ही उम्मीद की जा सकती है कि वे गणित को प्रतीकों से दर्शा पाएंगे। जिस तरह से पढ़ने व लिखने से पहले बोलना आता है, ठीक उसी तरह से गणित की मौखिक भाषा उसे प्रतीकात्मक तरीके से दर्शाने के पहले आती है।

7) गतिविधियों व खेलों में हिस्सा लेने से गणित सीखने में मदद मिलती है।

गणितीय सोच का विकास तब होता है जब बच्चों को चीजों से खेलने का मौका मिले और उनके सामने गणितीय समस्याएं सार्थक व ठोस संदर्भ में रखी जाएं। गणितीय अवधारणाएं अमूर्त होती हैं। उपयुक्त खेलों और शिक्षण सामग्री के कारगर इस्तेमाल से बच्चों को गणित अनुभव करने में और सीखने में मदद मिलती है।

E1) क) ऊपर दी गई सूची में आप और क्या जोड़ना चाहेंगे ?

ख) अभी तक आपने जिस ढंग से बच्चों को गणित पढ़ाया है, उसके तीन ऐसे पहलू बताइए जो ऊपर लिखे सिद्धांतों से मेल न खाते हों।

आपने शायद ध्यान दिया होगा कि उपर्युक्त सिद्धांत एक-दूसरे से सम्बंधित हैं। अमूर्त रूप में गणित करने से पहले उसके बारे में बोलने के मौके प्रतीकात्मक रूप से समझने से पहले गणित को अनुभव करने के मौके और गणित को अपने माहौल व विकास स्तर से जोड़ने के मौके मिलकर ही सीखने का एक माहौल बनाते हैं।

इसलिए हमारा सबसे अहम उद्देश्य यह है कि बच्चे इस योग्य हो सकें कि गणित सीखने के तरीकों को सीख सकें, उन्हें इस बात के प्रति सजग बनाना है कि वे किसी तरीके का इस्तेमाल क्यों करते हैं और कब किस तरीके का इस्तेमाल किया जाए। इस इकाई के बाकी हिस्से में इस बात पर गौर करेंगे कि इस लक्ष्य तक पहुंचने के लिए उपयुक्त सिखाने के तरीके कैसे विकसित किए जाएं।

शिक्षण योजना

पिछले पाठ में हमने उन सिद्धांतों की सूची बनाई जो सीखने – सिखाने के कारगर तरीकों को बनाने के आधार हैं। क्या यह मुमकिन है कि लगातार, सावधानीपूर्वक और व्यवस्थित योजना बनाए बगैर आप इस्तेमाल कर सकें ?

इस सवाल का जवाब देने से पहले आपके सामने यह साफ होना चाहिए कि योजना बनाने से आपका मतलब क्या है। क्या इसका मतलब यह है कि आप गणित की पाठ्य पुस्तक एक-एक अध्याय पढ़ाते चले जाएं? या इसका मतलब यह है कि हर पाठ को व्यवस्थित तरीके से पढ़ाया जाए? क्या इस योजना में प्राइमरी स्कूल के पूरे पाठ्यक्रम से जुड़े और पाठ्यक्रम की विषयवस्तु को कारगर ढंग से लागू करने से जुड़े मुद्दे शामिल होंगे?

दरअसल पाठ्यक्रम नियोजन के कई चरण होते हैं, जिसमें पहला है यह तय करना कि कौन सी विषयवस्तु पढ़ाई जाएगी। इसके बाद यह तय किया जा सकता है कि आप बच्चों में कौन सी क्षमताएं विकसित करने की उम्मीद रखते हैं। इसके बाद ही किसी भी विशिष्ट गणितीय अवधारणा सिखाने के लिए आप पाठ की योजना बनाने का काम कर सकते हैं। आगे आने वाले उपभागों में हम इन चरणों पर विस्तार से बातचीत करेंगे।

योजना क्यों बनाएँ?

बच्चे बढ़िया ढंग से तब सीखते हैं जब पाठ को इस ढंग से सावधानी पूर्वक व्यवस्थित किया जाए कि सीखने की क्रिया दिलचस्प बने। ऐसे सवालों से उन्हें सीखने में मदद मिलती है जो उन्हें सोचने के लिए प्रेरित करें। इसके अलावा ऐसी सामग्री और गतिविधियों का इस्तेमाल उपयोगी होता है जिनसे विचार विकसित हों और अभ्यास का मौका मिले। दूसरी ओर आपको कक्षा की सच्चाइयों का भी सामना करना होता है। इन सच्चाइयों में सामाजिक, आर्थिक और ढांचागत भिन्नताओं के अलावा पाठ्यवस्तु को लागू करने और मूल्यांकन से जुड़े मुद्दे भी शामिल हैं। इसलिए, अगर आप पिछले पाठ में दिए गए सिद्धांतों को स्वीकार करके उन्हें लागू करना चाहेंगे, तो हो सकता है आपके सामने नीचे दिए गए कुछ सवाल खड़े हों :

- अगर मैं चाहूँ कि बच्चे वास्तव में सीखें तो सिलेबस (syllabus) कैसे पूरा होगा ?
- अगर पाठ्यपुस्तक के मुताबिक चलना है तो गणित सीखने के सिद्धांतों का पालन कैसे करूँ ?
- अगर बच्चों की भागीदारी बढ़ाऊँ, तो कक्षा में शोरगुल कैसे रोकूँ ?
- जब स्कूल में इतने कम साधन हैं, तो बच्चों के लिए ठोस चीजों का बन्दोबस्त कैसे करूँ?
- बच्चों के विकास की जरूरतों में इतना अन्तर है; तो सब बच्चों की जरूरतें कैसे पूरी करूँ?
- मुझे कैसे पता चले कि मेरा सिखाने का तरीका कारगर है?

इनमें से ज्यादातर सवालों से निपटा जा सकता है, बशर्ते कि आप अपने पाठ्यक्रम की, उसे लागू करने की और मूल्यांकन प्रक्रिया की योजना बना लें।

आप कहेंगे कि योजना बनाना तो ठीक है, लेकिन कई बार ऐसी बातें सामने आ जाती हैं जिन पर हमारा कोई काबू नहीं रहता, जैसे कि अचानक होने वाली छुट्टियाँ, बच्चों की बीमारी, फसल कटाई की वजह से बच्चों की गैर हाजरी, वगैरह। सही है, योजना और असलियत के बीच अक्सर अन्तर पड़ जाता है। दरअसल यह सब योजना बनाने की प्रक्रिया का हिस्सा है। इससे हमें बच्चों के साथ अपने कामकाज को व्यवस्थित करने में मदद मिलती है, जिससे उन्हें सीखने में बढ़ावा मिलता है। ऐसा करने से हमें इस बात पर भी गौर करने का मौका मिलता है कि हम क्या कर रहे हैं। इससे आम तौर पर हमारी सिखाने की क्षमता बेहतर हो जाती है।

कक्षा में जो परिस्थितियाँ हो सकती हैं और होती हैं, उनसे निपटने का कोई एक ही तरीका नहीं है। हर बार जब हम समस्या से निपटने का कोई तरीका अपनाते हैं और बाद में उन तरीके को चुनने के कारणों पर गौर करते हैं, तो इससे सामूहिक सोच की हमारी क्षमता बेहतर बनती है।

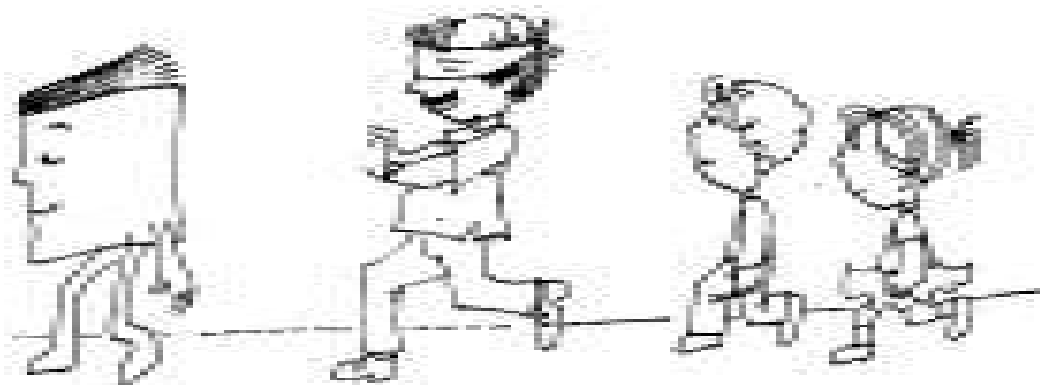
E2) निम्नलिखित में से कौन से ऐसे कथन हैं जिनमें योजना बनाने के अच्छे कारण नज़र आते

है ?

- क) योजना बनाने से लक्ष्यों को स्पष्ट करने में मदद मिलती है।
 - ख) योजना बनाने से सुनिश्चित हो जाता है कि विषय वस्तु के सारे जरूरी पहलू शामिल कर लिए गए हैं।
 - ग) योजना बनाने से समय को जरूरत के मुताबिक बांटा जाता है।
 - घ) योजना बनाने से सीखने के लिए जरूरी अनुभवों को क्रमबद्ध करने में मदद मिलती है।
 - ङ) योजना बनाने से बच्चों की दिलचस्पी व ध्यान लगाए रखने में मदद मिलती है।
 - च) योजना बनाने से गैर-जरूरी दोहराव से बचा जा सकता है, और अभ्यास के लिए जरूरी दोहराव कराया जा सकता है।
 - छ) योजना बनाने से शिक्षक का आत्म विश्वास बढ़ता है, और उसे अपने काम से खुशी मिलती है।
- E3) E2 में दिए गए कारणों के अलावा क्या आप पाठ्यक्रम योजना बनाने के कोई और कारण सोच सकते हैं ? अभी तक हमने यह चर्चा की कि शिक्षण योजना बनाने की जरूरत क्या है। आइए अब देखें कि योजना कैसे बनाई जा सकती है।

योजना कैसे बनाएं?

मान लीजिए कि आपको कक्षा 3 को गणित पढ़ाने को कहा जाता है। आप यह कैसे करेंगे? एक तरीका तो यह होगा कि आप कक्षा 3 की गणित की पाठ्य-पुस्तक उठा लें और आंख मूंदकर एक-एक अध्याय पढ़ाना शुरू कर दें।



चित्र 1 : शिक्षक आंख मूंदकर पाठ्य-पुस्तक का अनुकरण करते हुए।

अगर ऐसा है तो आपके प्रमुख उद्देश्य होंगे :

- क) पाठ्य-पुस्तक को पूरा करना। मतलब यह हुआ कि पाठ्य-पुस्तक को ही आप सिलेबस के बराबर मान रहे हैं। आम तौर पर यही होता भी है क्योंकि शिक्षक के पास पाठ्य-पुस्तक के अलावा कोई और शिक्षण साधन नहीं होता।
- ख) साल के आखिर में बच्चों का मूल्यांकन करके यह पता लगाना कि पाठ्य-पुस्तक की कितनी विषयवस्तु उन्हें याद है।

ज्यादातर शिक्षक इन्हीं तरीकों को अपनाते हैं। इसके लिए योजना बनाने की जरूरत न के बराबर होती है। वे यह मानकर चलते हैं कि हर किस्म की कक्षा व स्कूल के सभी शिक्षकों के लिए और हर तरह के बच्चों के लिए पाठ्य-पुस्तक में दी गई योजना उचित है। इस तरह के रवैये में योजना बनाने से सम्बंधित सारे मुद्दों, जैसे सिखाने के तरीके, अवधारणाओं को क्रमबद्ध करना और उन्हें सिखाने के लिए समय तय करना, आदि का पका-पकाया जवाब मिल जाता है क्योंकि

- इसके तहत गणित की अवधारणाएं/ विषय एक निर्धारित क्रम में पढ़ाए जाने हैं (शिक्षक के सिर्फ पृष्ठ-दर-पृष्ठ पाठ्य-पुस्तक का पालन करना है)।
- सिखाने का तरीका सिर्फ बच्चों से किताब में दिए सूत्र, उदाहरण और अभ्यास के सवालों को कराना रह जाता है।
- समय विभाजन का आधार आम तौर पर यह हो जाता है। कि कुल अध्यायों की संख्या को स्कूल खुला रहने के कुल महीनों से भाग दे दिया जाए। इससे यह तय हो जाता है कि एक महीने में कितने अध्याय पूरे करने हैं।

पाठ्य-पुस्तक से पढ़ाने का दूसरा तरीका हो सकता है कि आप खुद पहले इसको पढ़ लें और फिर गणित सीखने सिद्धांतों के मुताबिक हर पाठ की योजना ध्यान से बनाएं। इसके लिए जरूरी होगा कि आप सावधानी से हर पाठ को देखकर ऐसी योजना बनाएं जिसके मुताबिक:

- पढ़ाने का क्रम बच्चों के विकास स्तर से मेल खाता हो।** ज्यादातर मामलों में इसका मतलब यह होता है कि पाठ्य-पुस्तक की पूरी सामग्री को नए क्रम में जमाया जाए। मिसाल के तौर पर, ज्यादातर पाठ्य-पुस्तकों के हिसाब से जोड़-घटा जैसी क्रियाएं सिखाने से पहले बच्चों को 1 से 100 तक की संख्याएं सिखानी चाहिए। लेकिन वास्तव में बच्चे 100 तक की संख्याओं के नाम याद करने से बहुत पहले ही जोड़-घटा की कुछ समझ बना चुके होते हैं। दरअसल जोड़-घटा के माध्यम से उन्हें अलग-अलग आकार (साइज) के समूहों की आपसी तुलना करने में और संख्या की कुछ समझ बनाने में मदद मिलती है। इनसे गिनती के अभ्यास का भी एक बढ़िया संदर्भ बनता है। इसलिए बेहतर होगा कि जब बच्चों में छोटी संख्याओं की समझ बन जाए, तब ही अंकगणित की आसान क्रियाएं सिखाई जाएं। सौ तक की संख्याएं सीखने का काम धीरे-धीरे चलता रह सकता है।
- बच्चों को सीखने के ऐसे मौके मिलें जिनके जरिये वे गणितीय अवधारणाओं की अपनी समझ बना सकें।** जैसे कि कक्षा 1 के बच्चों को ऐसे इबारती सवाल दिए जा सकते हैं जिनका जवाब देने के लिए उन्हें जोड़, घटा और शायद गुणा, भाग का उपयोग करना पड़े। इससे बच्चों को अपनी समझ बनाने के बहुत मौके मिलते हैं। साथ-साथ, बच्चे जो कुछ अपने तार्किक सोंच से समझ गए हों, उसे व्यक्त जरूर करें। उन्हें सही जवाब जल्द से जल्द ढूंढने के लिए मजबूर नहीं करना चाहिए। उचित प्रश्न पूछ कर आप उन्हें धीरे-धीरे जवाब की ओर ले जा सकते हैं।
- बच्चे जो कुछ पहले से जानते हैं, उसे आधार मानकर आगे बढ़ा जाए।** उदाहरण के लिए, बच्चे ठोस रूप में भिन्न संख्याएं (fractions) कुछ हद तक समझते हैं, हालांकि हो सकता है कि प्रतीकों के रूप में भिन्नों से उनका पाला न पड़ा हो। तब भिन्न सिखाने के लिए उनकी इस समझ का इस्तेमाल क्यों न किया जाए ? ठोस शैली का इस्तेमाल करने से बच्चे जो कुछ जानते हैं उसे सामने लाने में मदद मिलेगा। इसके बाद प्रतीकों से कड़ी जोड़ी जा सकती है।

- iv) किसी गणितीय अवधारणा को लिखित रूप में सीखने से पहले और सीखने के दौरान बच्चों को उसके बारे में बोलने के मौके मिलें। लिखित (प्रतीकात्मक) रूप से सम्बंध जोड़ने से पहले बच्चों को मौका मिलना चाहिए कि वे गणितीय अवधारणाओं को मौखिक व ठोस रूप में समझ सकें। इससे उनकी गणितीय समझ बेहतर होगी, और वे सूत्रों को आंख मूंद कर लागू करने से बच जाएंगे।

इन बातों से सार यह निकलता है कि हमें योजना कुछ इस तरह बनानी होगी कि बच्चों की गणितीय सोच व कौशलों को विकसित करने में मदद कर सके। इसके लिए उन्हें सीखने के ठोस अनुभवों की जरूरत है, न कि प्रतीकों के साथ ज़्यादा माथापच्ची करने की। इसका मतलब है कि सिर्फ पाठ्य-पुस्तक पर निर्भर रहने से काम नहीं चलेगा।

- E4) क्या यह मुमकिन है कि सिर्फ पाठ्य-पुस्तक का इस्तेमाल किया जाए और फिर भी गणित शिक्षण की योजना गणित सीखने के सिद्धान्तों के अनुसार बनाई जाए? उदाहरण सहित जवाब दीजिए।

आंख मूंदकर पाठ्य-पुस्तक की लीक पर चलने से बचने का एक पक्का तरीका यह होगा कि इकाई व पाठ योजना बनाई जाए। एक इकाई का मतलब किसी एक विषय या एक अध्याय से होता है। इकाई को एक या ज़्यादा पाठों में बांटा जाता है। जैसे, 'भिन्न' एक इकाई होगी और इस इकाई में एक पाठ 'आधे' की अवधारणा पर हो सकता है, यह पाठ अलग-अलग तरह की भिन्नों पर, एक पाठ भिन्नो के जोड़ पर, वगैरह। यानी, एक इकाई में एक या ज़्यादा पाठ हो सकते हैं और एक साल में कई इकाईयां पढ़ाई जाएंगी। इस तरह के विभाजन का हम शिक्षकों के लिए क्या महत्व है ? आइए देखें।

अलग-अलग स्तरों की योजना

इस भाग में हम देखेंगे कि एक पाठ की योजना और एक इकाई या एक सत्र (term) या एक साल की योजना बनाने में क्या फर्क होता है। योजना बनाने को लेकर यहां हम अपना नज़रिया पेश करेंगे। आप इससे सहमत या असहमत होने के लिए स्वतंत्र हैं। आइए सबसे पहले साल भर की योजना से शुरू करें।

साल की योजना

स्कूली वर्ष की शुरुआत में आपको यह सोचना होगा कि पूरे साल के दौरान आप बच्चों को कितना गणितीय ज्ञान हासिल करवाना चाहते हैं। इसके लिए आपको अपने यहां के बच्चों की पृष्ठभूमि, दिए गए पाठ्यक्रम के अपेक्षित लक्ष्य और एन.सी.ई.आर.टी. के स्तर नामक दस्तावेज को ध्यान में रखना पड़ेगा।

NCF 2005 (राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005)

पहले तो आप तय कर लीजिए कि साल के आखिर तक बच्चों को कितना सीख लेना चाहिए। फिर, आपको गणितीय अवधारणाओं को सिखाने के हिसाब से क्रमबद्ध करना होगा। चूंकि स्कूल आम तौर पर एक साल की तीन सत्रों में बांटते हैं, इसलिए योजना का अगला स्तर यह होगा कि तीनों सत्रों में पढ़ाए जाने वाली विषयवस्तु के लिए जरूरी समय तय कर लिया जाए। इससे आपको उन सारी गणितीय अवधारणाओं को शामिल करने में मदद मिलेगी जिन्हें आप समझते हैं कि, बच्चों की पृष्ठभूमि को ध्यान में रखते हुए, शामिल की जानी चाहिए।

यानी, साल के शुरू में हमें अपने आप से पूछना होगा कि :

- ज़्यादातर बच्चे पहले से क्या-क्या जानते हैं ?
- साल के अंत तक मैं उनसे क्या हासिल करने की उम्मीद रखूँ ?
- जो अवधारणाएं उन्होंने सीखनी हैं उनका क्रम कैसे बनाऊँ ?

iv) पाठ्यवस्तु को पूरे साल में कैसे बाँटें ?

आप एक आम शिक्षक से इन सवालों के किस तरह के जवाब की उम्मीद करते हैं?

E5) मान लीजिए आप कक्षा 3 को पढ़ाने जा रहे हैं। तो आप इन सवालों का जवाब कैसे देंगे?

एक बार मोटे तौर पर जरूरी समय तय कर लिया जाए, फिर आपको सोचना होगा कि अलग-अलग गणितीय इकाइयों को पढ़ाने में कितना में वक्त लगेगा।

इकाई की योजना

गणित की किसी नई इकाई को पढ़ाने की योजना बनाने के लिए सबसे पहले आपको गणितीय अवधारणाएं, प्रतीक, सिद्धान्त, प्रक्रियाएं आदि पता होने चाहिए इन सबको विद्यार्थियों तक पहुंचाने का सबसे अच्छा तरीका क्या होगा ? इस सवाल का जवाब देने के लिए आपको हर इकाई का गहराई से विश्लेषण करके यह पता लगाना होगा कि उसके हर हिस्से के सिखाने के लक्ष्य क्या हैं। आपको यह भी पता लगाना होगा कि आपकी कक्षा के बच्चे सम्बंधित कौन सी अवधारणाएं या कौशल पहले से जानते हैं।

एक बार यह सब पता लगा लिया, तो आगे क्या? फिर गणित सीखने के सिद्धान्तों के अनुसार उन अवधारणाओं और कौशलों को क्रमबद्ध करना होगा, जिन्हें बच्चे सीखने वाले हैं। इसके बाद आपको यह सोचना होगा कि हर अवधारणा या कौशल को सीखने के लिए बच्चों की किन अनुभवों, सामग्रियों और गतिविधियों की जरूरत होगी।

इस तरह के गहरे विश्लेषण से आपको अपनी इकाई सिखाने की ऐसी योजना बनाने में मदद मिलेगी जिसमें नीचे दी गई बातों का ध्यान रखा गया हो :

- i) बच्चों की क्षमता व समझ,
- ii) नई गणितीय अवधारणाएं या कौशल समझने के लिए पहले से जरूरी जानकारी,
- iii) जिन गणितीय अवधारणाओं को सीखा जाना है, उनकी प्रकृति, और
- iv) स्पष्ट लक्ष्य जिन्हें हासिल किया जाना है।

योजना बनाते वक्त यह बहुत जरूरी है कि आप तय कर लें कि इकाई के किस हिस्से को कितना समय देना है। जैसे कि, समय के मापन संबंधी इकाई की योजना बनाते वक्त आप इच्छित लक्ष्यों की रूपरेखा बनाएंगे, यह तय करेंगे कि कौन – कौन सी बातें पढ़ाई जानी हैं (जैसे, समय का कोई क्षण, समय का अन्तराल, मापन की इकाई, आदि) किस क्रम में इन्हें पढ़ाया जाना है और हर बात पर आप कितना समय लगाएंगे। अब आप यह देखने की स्थिति में हैं कि इस इकाई का कितना हिस्सा कितने दिन में पढ़ाया संभव है। आप एक-एक हफ्ते के लिए जरूरी समय तय कर सकते हैं।

एक उदाहरण के तौर पर देखे कि छोटे बच्चों को लम्बाई का मापन सिखाने के लिए शिक्षण योजना कैसे बनाएं। लम्बाई किसी भी चीज़ का सबसे आसानी से नज़र आने वाला गुण है। ज्यादातर बच्चे स्कूल शुरू करने से पहले ही लम्बाई की समझ बना लेते हैं, और इससे सम्बंधित शब्दावली से थोड़े बहुत परिचित होते हैं। लेकिन कई बार उनकी समझ ऐसी होती है जिसे बड़े लोग गलत कहेंगे। जैसे कि, बच्चे कह सकते हैं कि बल खाई रस्सी, सीधी रखी रस्सी से छोटी है। जैसा कि पहले देख चुके हैं, ऐसी गलतियां उन बच्चों में बहुत आम हैं जो लम्बाई के संरक्षण की बात को पकड़ न पाएं हों। जैसे-जैसे बच्चों का संज्ञान विकसित होता है और उन्हें समझ बनाने के लिए सीखने के अनुभव मिलते हैं, वैसे-वैसे ये गलतियां दूर होती जाती हैं। तो इन सब बातों को ध

यान में रखते हुए, आइए देखें कि सीखने के अनुभवों का क्रम क्या हो।

एक क्रम निम्नानुसार हो सकता है :

1) उस गुण को पहचानना जिसका मापन करना है :

सबसे पहले हमें कोशिश करनी होगी कि चीज़ों की तुलना के जरिये बच्चे उस गुण (यानी लम्बाई) से परिचित हो जाएं। इसके लिए कुछ गतिविधियां की जा सकती हैं:

क) देखने से, सबसे पहले यह पहचानें कि कौन सी छड़ ज्यादा लम्बी है।

ख) प्रत्यक्ष रूप से, दो चीज़ों की तुलना करके।

ग) अप्रत्यक्ष रूप से लम्बाई की तुलना करने के लिए किसी तीसरी चीज़ (पैमाने) का इस्तेमाल करके।

2) दो चीज़ों की लम्बाई की तुलना के लिए इकाई का चुनाव :

इकाइयां दो तरह की हो सकती हैं :

क) मनमानी इकाई, जैसे हाथ या पेंसिल।

ख) मानक इकाई, जैसे इंच या सेंटीमीटर।

3) इकाइयों की संख्या पता लगाना और बताना :

बच्चे इकाइयों की संख्या निम्नानुसार पता लगा सकते हैं :

क) हाथों की संख्या गिनकर,

ख) पैमाने का इस्तेमाल करके,

ग) इकाइयों के परस्पर सम्बंध का इस्तेमाल करके।

हर बार वे बताएं कि परिणाम क्या आया।

4) मानक इकाइयों की जरूरत को समझना।

अब आपने विषय के छोटे-छोटे हिस्से कर लिए हैं और शिक्षण के उद्देश्य भी तय कर लिए हैं। अब आपको यह तय करना है कि आप सीखने के लिए कौन से अनुभव देना चाहेंगे, उनमें कितना समय लगेगा, वगैरह। और आखिर में आपको ऐसे उपयुक्त औज़ार और तकनीकें तैयार करनी होंगी जिनसे आप अपने सिखाने के तरीके के असर का मूल्यांकन कर सकें।

E6) छोटी संख्याओं के जोड़ की इकाई की एक मोटे तौर पर योजना बनाइए।

पाठ की योजना

हर इकाई की योजना बनाते हुए आप हर हफ्ते अपनी कक्षा के बच्चों की प्रगति की जांच कर सकते हैं। यदि जरूरी हो, तो आप उनकी जरूरतों के मुताबिक सिखाने की रफ़्तार बदल सकते हैं। आप योजना इस तरह भी बना सकते हैं कि कक्षा में अलग-अलग समूह अलग-अलग विषयवस्तु का अभ्यास करें। इसके लिए एक तरीका तो यह हो सकता है कि आप एक ही समय पर विभिन्न वर्कशीट का इस्तेमाल करें। एक तरीका यह भी हो सकता है कि बाकी बच्चों को खेलकूद के लिए भेजकर आप कुछ बच्चों पर विशेष ध्यान दें। ऐसी गतिविधि

ियां भी आयोजित की जा सकती हैं जिनमें सारे बच्चे भाग ले सकें, चाहे उनकी जानकारी का स्तर अलग-अलग क्यों न हो। यह सब सोचना पाठ की योजना बनाने का हिस्सा है।

पाठ की योजना बनाने में निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखने से शायद आपको मदद मिले :

- **पाठ के उद्देश्य स्पष्ट तौर पर सामने रखे :** आप कौन सी गणितीय अवधारणा पढ़ाने की कोशिश कर रहे हैं ? इसके कौन से पहलू को आप चाहते हैं कि बच्चे सीखें ? मकसद क्या है — एक नई चीज़ से परिचित कराना, या किसी चीज़ की समझ विकसित करना, या कोई खास कौशल विकसित करना, या कुछ बातें दोहराना ?
- **जिन बातों को पहले से जानना जरूरी है उन्हें पता करें :** पाठ में आप जो कुछ पढ़ाने जा रहे हैं, उसके पहले क्या-क्या सीख लेना जरूरी है ? क्या बच्चे यह सब सीख चुके हैं ?
- **क्रम तय करें :** पहले, दूसरे आदि क्रम पर तार्किक रूप से कौन सी गणितीय अवधारणा आती है ? क्या बच्चों के मनोवैज्ञानिक स्तर को देखते हुए इस तार्किक क्रम में कोई फेरबदल जरूरी है?
- **कार्य पद्धति तय करें :** सिखाने का कौन सा तरीका सबसे ज्यादा कारगर होगा? पिछले पाठों से इस पाठ को जोड़ने के लिए क्या करना होगा? बच्चों को किस तह के ठोस अनुभवों की जरूरत होगी? कौन सी गतिविधियों से बच्चों की दिलचस्पी बनी रहेगी, और उनका ध्यान भी लगा रहेगा? गतिविधि में आपकी भूमिका क्या होगी, और इसे कैसे करवाया जाएगा? क्या इस पाठ/गतिविधि में पूरी कक्षा शामिल रहेगी या छोटे समूहों में या सामग्री का उपयोग करेंगे, और कैसे? बच्चों की निजी जरूरतों को पूरा करने के लिए सामग्री या गतिविधियों में किस तरह के फेरबदल किए जाएंगे?
- **यह तय करें कि पाठ के हर हिस्से पर कितना वक्त लगाएंगे :** क्या इतना वक्त काफी होगा? क्या किसी गतिविधि के लिए ज्यादा समय देना उचित होगा ? उसका मतलब होगा कि बाद में कहीं और समय कम करना होगा।
- **मूल्यांकन का तरीका तय करें :** पाठ के दौरान सीखने — सिखाने की प्रक्रिया का मूल्यांकन करने के लिए आप क्या औज़ार इस्तेमाल करेंगे? पाठ के अंत तक बच्चों ने क्या सीखा इसका मूल्यांकन किस तकनीक से करेंगे?
- **पाठ की योजना को लिखें :** योजना को लिख लेने से आपको कई बातों को स्पष्ट करने का मौका मिलेगा, और यह एक रिकॉर्ड भी रहेगा। इसका इस्तेमाल आप बच्चों के और खुद अपने काम के मूल्यांकन के लिए कर सकते हैं। और आगे के पाठों की योजना बनाते समय भी यह काम आएगा।

E7) पाठ की योजना बनाते वक्त आप और किन चीज़ों का ध्यान रखेंगे?

यह जरूरी नहीं है कि पाठ की योजना बनाते वक्त आप सारे बिन्दुओं पर विचार करें। मान लीजिए कि आपने बच्चों को लम्बाई की उचित मानक इकाई के चुनाव की जरूरत समझाने के उद्देश्य से एक घण्टे का एक पाठ रखना तय किया है। एक योजना निम्नानुसार हो सकती है :

- i) उन्हें हाथ से या रस्सी के टुकड़े से चीज़ों की लम्बाई या लोगों का कद नापने की गतिविधि करवाएं। (15 मिनट)
- ii) परिणामों की तुलना करने में उन्हें मदद दें। (10 मिनट)
- iii) कई बच्चों से किसी चीज़ की लम्बाई फुट्टे से नपवाएं (यह मानकर कि वे भागों को पढ़ना जानते हैं)

और परिणाम रिकॉर्ड करवाएं। (10 मिनट)

iv) उनकी मानकीकरण के लाभ समझने में मदद करें। (10 मिनट)

v) पाठ के दौरान गतिविधियों/परस्पर क्रियाओं का मूल्यांकन करें। (10 मिनट)

बेशक, हमें ध्यान रखना होगा कि मापन की इकाई की आधारणा विकसित होने में समय लगता है। एक ही गतिविधि कभी भी काफी नहीं होती। शिक्षक को अवधारणाओं के प्रति सजग रहना होगा और अन्य गुणों के बारे में भी इसी तरह की गतिविधियों को बनाना होगा। कक्षा कार्य के दौरान हो सकता है आपको लगे कि शुरू की गतिविधियों के लिए 15 मिनट काफी नहीं हैं, और ज्यादा समय की जरूरत है। तब आपको लचीला रवैया अपनाना पड़ेगा, और भविष्य में पाठ योजना बनाते समय इस बात का ध्यान रखना होगा।

E8) भिन्न संख्याओं का जोड़ सिखाने के लिए ऊपर सुझाए मार्गदर्शक सिद्धान्तों के अनुसार एक विस्तृत पाठ योजना लिखिए।

सीखने-सिखाने की प्रक्रिया का मूल्यांकन

एक दिन मैं पास के एक स्कूल में कक्षा 2 के बच्चों से मिलने गई थी। मैंने देखा कि उनमें से कई बच्चे 'आधे' की अवधारणा को ठीक से समझ नहीं पाए थे। शिक्षक से बात करने पर पता चला कि उन्होंने संबंधित गतिविधियों के जरिये यह अवधारणा बच्चों को सिखाई थी। फिर भी बच्चे अवधारणा को समझ नहीं पाए थे। शिक्षक को यह बात तभी पता चली जब मैंने उन्हें बताया। ऐसा क्यों हुआ? क्या सिर्फ गतिविधियां दे देने से सुनिश्चित हो जाता है कि बच्चे सीख जाएंगे? आप यह पक्के तौर पर कैसे कह सकते हैं कि आप जो कुछ सिखाना चाहते थे, वह बच्चों ने सीख लिया है? इस भाग में हम इन्हीं सवालों पर गौर करेंगे।



चित्र 2 : शिक्षक “तो बच्चों तुमने सीखा कि ...” बच्चे (चकराकर) : “क्या सचमुच?”

अपने अनुभव से, आप जानते हैं कि यह हमेशा सम्भव नहीं होता कि हमारी योजना के अनुसार सीखने का माहौल बन जाए। कई बार यह ऐसे कारणों से होता है, जो आपके बस में नहीं हैं। हर मर्तबा जब कोई पाठ योजना के मुताबिक नहीं चलता, तो हमको इसके कारणों की छानबीन करनी चाहिए। क्या यह शिक्षण साधनों की कमी की वजह से हुआ? या गतिविधियों की गलत डिज़ाइन की वजह से हुआ? या कक्षा के संयोजन व प्रबंध की दिक्कतों की वजह से हुआ? या और कोई कारण था?

कई मर्तबा गतिविधियों का अपेक्षित असर नहीं होता क्योंकि समय कम पड़ जाता है और शिक्षक को सिलेबस आगे बढ़ाने की हडबड़ी होती है लेकिन कारगर शिक्षण के लिए जरूरी है कि बच्चों को सही ढंग से चुनी हुई गतिविधियां दी जाएं, और इन्हें करने के लिए तथा इनसे सीखने के लिए काफी समय दिया जाए। यदि कोई गतिविधि अच्छे से चल रही है और बच्चे उसमें जुटे हुए हैं, तो इसे योजना के हिसाब से ज्यादा वक्त भी दिया जा सकता है। यह भी हो सकता है कि गतिविधि कुछ ऐसी हो कि उसे पूरी कक्षा के साथ नहीं किया जा सकता। यहीं पर योजना में लचीलेपन का फायदा होता है। यदि एक योजना नहीं चल रही है, तो दूसरी आजमाई जा सकती है!

किसी भी सिखाने के तरीके का एक जरूरी हिस्सा होता है उसके असर का मूल्यांकन। सीखने-सिखाने की प्रक्रिया कारगर है या नहीं, इसका फैसला करने के लिए आप खुद से कुछ इस तरह के सवाल पूछ सकते हैं:

- क्या बच्चों को पाठ में मज़ा आ रहा है?
- क्या वे सवाल कर रहे हैं और गतिविधियों में पहल कर रहे हैं?
- क्या आपके द्वारा पूछ गए सवालों का जवाब देने के लिए उन्हें काफी समय मिल रहा है?
- क्या उन्हें, वे जो कुछ कर रहे हैं, उसके बारे में सोचने के लिए बढ़ावा मिल रहा है?

E9) अपने सिखाने के तरीके का मूल्यांकन करने के लिए आपको कई और अहम सवालों को पूछने की जरूरत है। क्या आप इन सवालों की सूची बना सकते हैं?

हमें यह नहीं भूलना चाहिए कि अगर शिक्षक विद्यार्थियों को ध्यान में रखकर सिखाएं तो सीखने-सिखाने की प्रक्रिया पर उसका बहुत अच्छा असर होता है। इसलिए हमें बारम्बार खुद से पूछते रहना चाहिए कि:

- क्या बच्चों को समझाने की कोशिश में मैं, एक शिक्षक के नाते, अपनी भाषा में बदलाव लाती/लाता हूँ?
- क्या मैं उन्हें सवाल बनाने देती/देता हूँ?
- क्या मैं उन्हें इस बात का मौका और समय देती/देता हूँ कि, जो कुछ मैंने उन्हें पढ़ाया है, वे उसके बारे में सोच सकें और बात करें?

E10) अपने सिखाने के तरीके के सही मूल्यांकन के लिए और कौन से शिक्षक केंद्रित सवाल पूछे जाने चाहिए?

बच्चों की समझ को जांचना और उसका मूल्यांकन करना शिक्षण का अभिन्न अंग होना चाहिए। शिक्षकों को यह पक्का कर लेना चाहिए कि क्या वास्तव में उन्होंने यह सब कुछ पढ़ा दिया है, जो वे सोचते हैं कि उन्होंने पढ़ाया है। और यह भी तय कर लेना चाहिए कि क्या हर बच्चे ने वह सब सीख लिया है जिसकी उससे उम्मीद थी। जैसे, हो सकता है कि मूल्यांकन के ज़रिये शिक्षक को पता चले कि करीब एक-चौथाई बच्चे 'आधे' की अवधारणा पकड़ नहीं पाए हैं। तब उन्हें एक बार फिर उन बातों से शुरू करना होगा, जिनसे बच्चे पहले से परिचित हों। इस बार शिक्षक नए तरीके आजमाने का फैसला कर सकती है, जैसे कि अलग-अलग बच्चों को उनकी ख़ास जरूरतों के मुताबिक अलग-अलग वर्कशीट दी जा सकती है, या मित्रों से सीखने का तरीका अपनाया जा सकता है। शिक्षक को इस बात का एहसास भी होना चाहिए कि कब किसी बच्चे को ठोस चीज़ों के इस्तेमाल की जरूरत है, और जरूरत के मुताबिक उस बच्चे को इसका मौका देना होगा।

यानी, बच्चों का मूल्यांकन जरूरी है, लेकिन यह उपयोगी तभी होता है जब आप इसका असर अपनी शिक्षण प्रक्रिया पर पड़ने दें। सिर्फ 'अच्छा', या 'औसत' कहलाने के मकसद से किया गया मूल्यांकन ज्यादा उपयोगी नहीं होता। मूल्यांकन के जरिये यह समझने की कोशिश करनी चाहिए कि किस हद तक हर बच्ची अपनी गणितीय क्षमताएं विकसित कर पाई है। इसलिए मूल्यांकन के दायरे में अलग-अलग तरह के गणितीय कार्य शामिल किए जाने चाहिए। मूल्यांकन में बच्चों को ऐसी समस्याओं से निपटने का मौका मिलना चाहिए जिनमें उन्हें कई गणितीय बातों का इस्तेमाल करना पड़े। उनकी योग्यता जानने के लिए आप ऐसी तकनीक अपना सकते हैं जिनसे कई क्षमताओं की जांच साथ-साथ हो सकती है इनमें बच्चों के लिए बहुत बोझिल कार्य न हो। लिखित व मौखिक कार्य भी शामिल हो सकते हैं।

यानी, मूल्यांकन प्रक्रिया से आपको यह देखने में मदद मिलनी चाहिए कि क्या शिक्षण के ये निर्धारित लक्ष्य हासिल हो गए हैं। दरअसल हर कदम पर मूल्यांकन आपकी सीखने-सिखाने की प्रक्रिया का हिस्सा होना चाहिए। इस प्रक्रिया के दौरान मूल्यांकन के लिए बच्चों से उनकी प्रतिक्रियाएं बार-बार लेते रहना चाहिए। इस तरह के मूल्यांकन से आपको यह पता लगता रहेगा कि बच्चे की समझ में कोई गलती तो नहीं है, या उसे किसी तरह की मुश्किल तो नहीं आ रही है। और यह बात आपको उसी समय पता लग जाएगी जब यह ग़लती या दिक्कत सामने आएगी, और समय रहते उसका सुधार कर सकेंगे। इससे काफी समय और मेहनत की बचत होगी। खासकर गणित जैसे विषय में ऐसे उपाय जरूरी होते हैं क्योंकि इनमें अवधारणाएं एक निश्चित क्रम में विकसित होती हैं।

सिखाने के दौरान मूल्यांकन के अलावा आपको समय-समय पर परीक्षा भी करनी होगी। इससे आपके विद्यार्थियों को तो शिक्षण के उद्देश्य हासिल करने में मदद मिलेगी ही, साथ में आप भी अपने शिक्षण का मूल्यांकन कर पाएंगे, हर बच्चे की समस्या को पहचान पाएंगे और उन्हें सुलझाने में बच्चों की मदद कर पाएंगे।

ऊपर दी गई चर्चा के बाद आप इस बात से जरूर सहमत होंगे कि बच्चों का मूल्यांकन सिर्फ सत्र या साल के आखिर में करने की बजाय पूरे साल भर करना जरूरी है। सत्र के अंत में किए गए मूल्यांकन से न तो बच्चों को मदद मिलती है और न ही शिक्षक को।

E11) एक आठ साल की बच्ची को आप समय का मापन सिखा रहें हों, तो सिखाने के दौरान उसका मूल्यांकन कब-कब करेंगे?

सारांश

इस पाठ में हमने पाठ्यक्रम से गुज़रते हुए उसकी पूरी प्रक्रिया पर बात की है। मोटे तौर पर हमने सीखने-सिखाने की प्रक्रिया को तीन चरणों में बांटा है। शुरुआत योजना बनाने से होती है जिसमें विषयवस्तु का विश्लेषण भी शामिल होता है। पहले चरण में उद्देश्य को पहचानना, शिक्षण अनुभवों की रचना और उन्हें क्रमबद्ध करना और पाठ योजना तैयार करना शामिल हैं।

दूसरा चरण पाठ्यक्रम को लागू करने के बारे में है। इसमें विद्यार्थियों को योजना चरण में तय किए उद्देश्य हासिल करने में मदद देने के लिए गतिविधियां तैयार करना और उनका इस्तेमाल करना शामिल है। इसके लिए सिखाने के एक या एक से ज्यादा तरीके अपनाए जा सकते हैं।

आखिरी चरण में सीखने-सिखाने की प्रक्रिया का मूल्यांकन किया जाता है। इसके तहत यह मूल्यांकन किया जाता है कि बच्चे किस हद तक अपेक्षित लक्ष्य हासिल कर पाए हैं और उन्हें क्या दिक्कतें आई हैं। मूल्यांकन के दौरान पाठ्यक्रम को पूरा करने की प्रक्रिया की कारगरता की भी जांच की जाती है और उन खामियों को पहचाना जाता है, जिन्हें दूर करना जरूरी है। इससे आपको ज्यादा उचित तरीकों को अपनाने में मदद मिलेगी।

सबक-7 के पाठ 14 व 15 के अभ्यासों पर टिप्पणियां

- E1) बच्चों की पहली भाषा, भाषा की क्षमता और माता-पिता की शिक्षा के स्तर में फर्क हो सकता है। इनके अलावा आप कई और ऐसे फर्क लिख सकते हैं।
- E2) बच्चे कितना जानते हैं इसका अन्दाज लगाने की कोई कोशिश नहीं हुई। क्या उनको "स्थान" और "स्थानीय मान" की समझ थी? क्या वे 3 अंकों की संख्याएं लिख सके ? क्या वे 100 से कम संख्याओं को लिख पाए? बड़ी संख्याएं (यानि 3 या ज्यादा अंकों वाली) कोई भी ठोस चीजों से नहीं सिखा सकता। क्या बच्चे औपचारिक तरीके के लिए तैयार थे ? इस अभ्यास में दी गई स्थिति पर चर्चा करने के दौरान, इन जैसे बहुत सारे अन्य प्रश्नों पर विचार करना जरूरी है।
- E3) (ख) आपको यह देखना होगा की इनसे बच्चों की परिकल्पना बनाने की, उसका परीक्षण करने की, जरूरत पड़ने पर परिकल्पना बदलने की, अपनी अवलोकनों से व्यापकीकरण करने की कोशिश की क्षमता कैसे बेहतर हुई।
- E4) उसे शुरु में, ठोस चीजों व छोटी संख्याओं से यह देखने के लिए बढ़ावा दिया जाए कि गुणा करना वास्तव में जोड़ने की प्रक्रिया को ही बार-बार दोहराना है। एक बार यह वह समझ जाए तो उसे पता चलेगा कि 2×89 , वास्तव में $2 \times 88 + 2$ ही है।
- E5) मान लीजिए आप कक्षा को पांच-पांच के समूहों में बांट लेते हैं। फिर आप कुछ चीजों को (जैसे टहनियों, या कंकड़ों, या बटनों को) किसी तरह क्रमवार रख सकते हैं, और हर समूह से पैटर्न ढूंढने व आपके जमाए पैटर्न को आगे बढ़ाने को कहा जा सकता है।
- यदि बच्चों की चित्रों से काम करने की समझ है, तो आप विभिन्न समूहों को चित्रों के कार्ड बांट सकते हैं। इनसे पैटर्न बनाने या एक समूह द्वारा शुरु किए गए पैटर्न को दूसरे समूह द्वारा जारी रखने को कहा जा सकता है, इत्यादि।
- यदि आप बच्चों को गुणा (या भाग) पढ़ा रहे हैं, तो आप बोर्ड पर अन्दाज लगाने के ऐसे खेल विकसित कर सकते हैं जिनसे वे सभी साथ-साथ गुणा और जोड़ (या भाग और घटा) के बीच के संबंध को पहचान सकें।
- E6) उदाहरण के लिए, बच्चे लम्बाई और क्षेत्रफल नापना कैसे सीखते हैं। आप जब पढ़ेंगे, तो आप देखेंगे कि एक बच्चे को पहले लम्बाई माप से संबंधित ठोस अनुभवों की जरूरत होगी। धीरे-धीरे उसे मानक इकाइयों की जरूरत महसूस होगी, और फिर लम्बाई की अमूर्त अवधारणा को समझने लगेगी। फिर, आगे बढ़कर, क्षेत्रफल नापने के दौरान, आपको फिर से उसे ठोस अनुभव देने होंगे, खास तौर से यह दिखाने के लिए कि क्षेत्रफल नापने के लिए अलग तरह की इकाई की जरूरत क्यों होती है। इसी तरह, चीजों के आयतन के विषय में सीखते हुए, उसे दोबारा अपनी लम्बाई और क्षेत्रफल की समझ को याद करना पड़ेगा।
- E7) साफ है कि बच्ची ने मशीनी तरीके से एक ऐल्गोरिद्म को करने की कोशिश की थी जो शिक्षक ने उसके दिमाग में ढूँसा था। क्योंकि उसे यह नहीं मालूम था कि नियम कैसे काम करता है, उसे नियम याद रखना मुश्किल लगा। इसलिए उसने वह किया जो उसे सही लगा— अंश, अंशों का जोड़ है, हर, हरों का जोड़।

- E8) कक्षा एक के बच्चों से स्कूल आते समय खूब सारे कंकड़ (या पत्ते, या डंडियां) उठा कर लाने को कहा जा सकता है। फिर उनसे इन चीजों को इस प्रकार समूहों में रखने को कहा जा सकता है। जिससे हर समूह में उतने ही कंकड़/पत्ते/डंडिया हों जितनी कि एक हाथ की उंगलियां हैं। ऐसा लगता है कि बहुत छोटे बच्चे जानते हैं कि "पांच" का अर्थ एक हाथ की उंगलियों की संख्या होता है। इस तरह की मेल बिठाने की गतिविधि से वे पांच के समूह बना सकते हैं। यह गतिविधि विविध प्रकार की चीजों के साथ की जा सकती है।

ज्यादा बड़े बच्चे गिनकर दस-दस समूह बना सकते हैं। उन्हें हर समूह पर एक झण्डी लगाने के लिए रंगीन कागज दिया जा सकता है। और बच्चे ऐसे खेल खेल सकते हैं जिनमें बंडलों का इस्तेमाल स्थानीय मान की अवधारणा या 10 की गुणा सिखाने के लिए किया जा सकता है।

- E9) यह उनकी खुद सोचने की क्षमता, बिना किसी बड़े के सहारे की जरूरत के, विकसित करने में मदद दे सकता है। यह उनके आलोचनात्मक तरीके से सोचने की क्षमता के विकास के लिए भी जरूरी है।

बच्चे अपने आपसी मेल-जोल से यह भी देख सकते हैं कि वे एक दूसरे की तुलना में कहां बैठते हैं।

- E10) ऐसा लगता है कि बच्ची उन औपचारिक संकेतों को समझ नहीं पाई है जिनका इस्तेमाल हुआ है। शायद वह यह भी नहीं समझती है कि 3 को $9/2$ से कैसे भाग दें। इस स्थिति को सुधारने के लिए, बच्ची को एक भिन्न से दूसरी भिन्न को भाग देने की प्रक्रिया समझाना होगा। इसके लिए शायद बच्ची की फिर ठोस अनुभव देने होंगे।

पाठ-15

- E1) मेरे गणित शिक्षक रटना, बगैर ठोस अनुभवों के अमूर्त अवधारणाएं सिखाना, बच्चों को आंख मूंदकर सूत्रों का उपयोग करने देना आदि बातों पर जोर देते हैं। जो सब सीखने में बाधा डालती हैं। आप ऐसे और कितने तरीके सोच सकते हैं जो सीखने में बाधक।
- E2) इनमें से हर बाधा को दूर करने की अच्छी योजना बनाने के फायदे हैं।
- E3) इससे बच्चों के सीखने के अनुभवों को व्यवस्थित करने में, सीखने-सिखाने की प्रक्रिया का लगातार मूल्यांकन करने में और कई अन्य पहलुओं में मदद मिलती है। इनकी सूची आप बना सकते हैं।
- E4) पाठ्य पुस्तक पर आधारित तरीका व्यक्तिगत अंतरों की परवाह नहीं कर सकता। इसमें बच्चों को यह गुंजाइश नहीं मिलती कि वे समस्या सुलझाने के अपने तरीके बना। यह तरीका गणित शिक्षण के लिहाज से ठीक नहीं है। क्यों?
- E5) आप यह कैसे तय करेंगे कि बच्चे पहले से कितना जानते हैं? इस, सवाल का जवाब देते हुए आप किन वास्तविकताओं को ध्यान में रखेंगे ? जिन विषयों को आप पढ़ाएंगे, उनकी सूची बनाइए, उनका क्रम तय कीजिए यह बताइए कि हर विषय को कितना समय देंगे।
- E6) योजना बनाते वक्त आपको यह ध्यान रखना होगा कि किसी विषय को समझने से पहले क्या-क्या सीखना चाहिए, और क्या बच्चे पहले से जानते हैं। मोटे तौर पर मेरी एक योजना निम्नलिखित होगी:
- ठोस चीजों, खेलों व अन्य गतिविधियों के जरिये जोड़ सिखाना,
 - बच्चों को संबंधित इबारती सवाल देना,
 - बच्चों को संबंधित औपचारिक भाषा व प्रतीकों की ओर बढ़ने में मदद देना,
 - इस बात का मूल्यांकन करना कि इकाई के अंत तक बच्चे कितना सीख चुके हैं।
- हर चरण पर सिखाने के तरीके की कारगरता के मूल्यांकन के लिए समय देना होगा।
- E7) उदाहरण के लिए,
- क्या कक्षा के सारे बच्चे गतिविधि में जुटे हैं?
 - क्या बच्चों को खुद अपने तरीकों को इस्तेमाल करने के लिए बढ़ावा मिल रहा है? ऐसे और सवाल सोचिए जिनसे आपको अपने सिखाने के तरीके के मूल्यांकन में मदद मिलेगी।
- E9) उदाहरण के लिए,
- क्या मैं उन्हें काफी अलग-अलग तरह के उदाहरण, अनुभव और गतिविधियों दे पा रही/रहा हूँ? ऐसे और कौन से प्रश्न हो सकते हैं?
- E10) इकाई के शुरू में, यह पता लगाने के लिए कि वह कितना जानती है।
- इसके बाद जब उसे दिन, रात, समय अंतराल का अहसास देंगे, तब हर चरण पर। यह मूल्यांकन मौखिक और लिखित, दोनों तरह से किया जा सकता है। जो कुछ उसने समझा है, उसे व्यक्त करने के लिए उसे बढ़ावा दें। इसके बाद, उसके संदर्भ और स्तर को ध्यान में रखते हुए उसे मौखिक इबारती सवाल दिए जा सकते हैं। समय व उसके मापन की ज्यादा औपचारिक अवधारणा की ओर बढ़ते हुए भी यही प्रक्रिया जारी रहना चाहिए।

पाठ — 16

आंकड़ों का उपयोग

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- 'आंकड़े' का अर्थ
- बच्चे और आंकड़े
- आंकड़ों को दर्ज करना
- आंकड़ों का प्रस्तुतीकरण
- सारांश

परिचय

इस पाठ में हम प्राथमिक शाला की कक्षाओं में आँकड़ों की समझ और आंकड़ों के इस्तेमाल से संबंधित मूलभूत बातों पर चर्चा करेंगे।

कुछ लोग पूछते हैं कि क्या प्राथमिक शाला के बच्चों के लिए आंकड़ों का इस्तेमाल जानना जरूरी है और क्या वे यह काम कर सकते हैं? तो हम पाते हैं कि बच्चें व बड़े दोनों ही अपने दैनिक क्रियाकलापों में आंकड़ों को इस्तेमाल करते हैं। इसलिए यह जरूरी है कि हम बच्चों को ऐसी कुछ तकनीकें हासिल करने में मदद दें जो इस काम में उपयोगी होंगी।

आंकड़ों का आदान-प्रदान करने हेतु जरूरी है कि उन्हें दर्ज व प्रस्तुत किया जाए। हम आंकड़े दर्ज करने की कुछ तकनीकों को देखेंगे जिन्हें प्राथमिक शाला के बच्चे सीख और उपयोग कर सकते हैं। हमने कुछ ऐसी गतिविधियां सुझाई हैं जिनसे बच्चों को आंकड़े दर्ज करने के विभिन्न तरीकों से परिचित व कम उम्र में ही इनका इस्तेमाल करना सिखाया जा सकता है। बतौर शिक्षक हम कक्षा में कुछ गतिविधियों के माध्यम से ऐसी कुछ तकनीकों से बच्चों का परिचय करा सकते हैं, चाहे औपचारिक तौर पर यह गणित पाठ्यक्रम का हिस्सा न हो। आंकड़े का अर्थ सिर्फ आंकड़े एकत्र करना व प्रस्तुत करना ही नहीं है।

उद्देश्य—

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप—

- यह बता पाएंगे कि 'आंकड़े' व 'आंकड़ों के इस्तेमाल' का क्या अर्थ है।
- यह बता पाएंगे कि प्राथमिक शाला के बच्चों के लिए यह क्यों जरूरी है कि वे आंकड़े एकत्र कर पाएं व उन्हें प्रस्तुत कर पाएं।
- ऐसी गतिविधियां सुझा पाएंगे जिनसे बच्चों को आंकड़े एकत्र करने और उनका प्रस्तुतिकरण करने की अपनी क्षमता का विकास करने में मदद मिलेगी।

आंकड़े का अर्थ

‘आंकड़े’ के लिए अंग्रेजी शब्द data, जो वास्तव में लेटिन शब्द ‘datum’ का बहुवचन है, प्रयुक्त होता है। ‘datum’ का अर्थ होता है ‘दत्त’ या ‘दिया गया’। आप सोच रहे होंगे कि इस पाठ्यक्रम में ‘आंकड़ों का इस्तेमाल सीखना’ क्यों शामिल है जबकि यह पाठ्यक्रम उन लोगों के लिए है जो प्राथमिक कक्षाओं को पढ़ाते हैं। इसे समझने से पहले यह समझें कि ‘आंकड़े’ का अर्थ क्या है और आंकड़ों को इस्तेमाल करना क्यों जरूरी है?

यह बात प्रायः कही जाती है कि हम सूचना के युग में जी रहे हैं। पिछले करीब पचास वर्षों में जानकारी की उपलब्धता में बहुत वृद्धि हुई। अखबारों, पत्रिकाओं, रेडियो, टेलीविजन, सिनेमा तथा कम्प्यूटर पर आधारित नई-नई टेक्नॉलोजी की बदौलत हमारा सम्पर्क बहुत सारी सूचनाओं से होता है। आंकड़ें ही सूचना हैं। आमतौर पर हम आंकड़ों की बात किसी ऐसी परिस्थिति के संदर्भ में करते हैं जिसका हम अध्ययन करना चाहते हैं। जैसे यदि हम यह जानना चाहते हैं कि कितने लोग किस स्तर तक साक्षर हैं, तो हम संबंधित जानकारी देखेंगे, अर्थात् संबंधित आंकड़े। हम ये आंकड़े एकत्र करेंगे और इन्हें एक व्यवस्थित ढंग से प्रस्तुत करेंगे। अब इसका एक निश्चित लक्ष्य होगा— आबादी में विभिन्न स्तरों पर साक्षरता व शिक्षा का पता कर पाना।

इसलिए, आमतौर पर जब हम आंकड़ों की बात करते हैं, इससे हमारा मतलब है व्यवस्थित ढंग से एकत्रित ऐसी जानकारी जिसे किसी विशिष्ट निष्कर्ष तक पहुंचने के लिए एकत्र किया गया है।

पत्र-पत्रिकाओं में आपको आंकड़ों के कई उदाहरण मिलेंगे। जैसे जरूरत की वस्तुओं के दाम, रेलगाड़ियों के आने-जाने का समय, नगर के सिनेमाघरों में चल रही फिल्मों के नाम, आदि। मौसम तो ताजा आंकड़ों का दैनिक स्रोत है।

उदाहरण 1 : अखबारों में रायपुर के पिछले एक सप्ताह के अधिकतम तापमान, नीचे तालिका में दिए गए हैं—

दिन	रविवार	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
तापमान (सेल्सियस)	45.6	44.7	46.2	46.0	46.5	44.7	43.3

यहां दिए गए अंक गर्मी की लहर के बारे में विशिष्ट मात्रात्मक (यानी मात्रा से जुड़ी हुई) सूचनाओं को दर्शा रहे हैं। अखबारों में कुछ अन्य संबंधित सूचनाएं भी थीं, जैसे— सोमवार के अखबारों में बताया गया था कि रविवार पिछले पचास वर्षों का सबसे गर्म दिन था।

[?] क्या अखबार द्वारा आंकड़ों के प्रस्तुतिकरण की इस तकनीक से कुछ फायदा हुआ? यदि इस तकनीक का उपयोग न किया जाता, तो क्या कोई दिक्कत होती?

[?] क्या उपरोक्त आंकड़ों के आधार पर आप कोई और बात कह सकते हैं? जैसे— क्या यह कहना सही होगा कि गुरुवार पिछले पचास वर्षों में सबसे गर्म दिन रहा?

उदाहरण 1 में हम देखते हैं कि सरल से सरल आंकड़ों को भी इस तरह व्यवस्थित रूप देना होता है कि हम उन अंकों में छिपी जानकारी को आसानी से समझ सकें।

आंकड़े सदा संख्याओं के रूप में नहीं होते। (उदाहरण 2)

उदाहरण 2 : कुछ बच्चे गली में क्रिकेट खेल रहे थे। ऐसी परिस्थिति में बच्चे जिस तरह की बातें करते हैं, मैं उस पर सोचने लगी। इसलिए इस मामले में, मैंने आंकड़े इकट्ठा करने का फैसला किया। बच्चे जहाँ-जहाँ भी क्रिकेट खेल रहे थे, मैं वहाँ-वहाँ घूमने लगी और कुछ दिनों तक उनकी बातें सुनती रही। वे आपस में इस तरह की बातें कर रहे थे : “देखो मेरी बैटिंग अजहरुद्दीन जैसी है।” “मेरी बोलिंग अकरम जैसी है।” आदि। मुझे उनकी बातें दिलचस्प लगीं और मैंने उनके कथन लिख लिए। ऊपर के कथनों के अलावा, अन्य कथन इस प्रकार थे :

- क्या कैच था, राहुल !
- वह ऑल राउण्डर है। अपना कपिल देव!
- मेरी बहन हमारी टीम की तेन्दुलकर हैं।
- अमर शानदार बल्लेबाज है, लारा जैसा।
- राहुल तो जॉन्टी रोड्स जैसा है, क्या फील्डर है।

इन आंकड़ों से एक बात मैंने निकाली कि जो लड़के-लड़कियाँ खेल रहे थे उन में से कोई भी किसी महिला क्रिकेटर को अपने आदर्श के रूप में नहीं देख रहा था। मैंने यह भी निष्कर्ष निकाला कि इन बच्चों के आदर्श खिलाड़ी सिर्फ भारतीय नहीं थे, वे दूसरे देशों से भी थे।

[?] इन गैर अंकीय आंकड़ों से आप क्या निष्कर्ष निकालेंगे?

उदाहरण 1 व 2 में हमने कुछ सूचनाओं की एक व्यवस्थित ढंग से छटाई यानी वर्गीकरण (classification) किया। इसके बाद हमने इसका विश्लेषण करके कुछ निष्कर्ष निकाले। इन सारी प्रक्रियाओं से मिलकर जो बनता है उसे ही हम कहेंगे ‘आंकड़ों को इस्तेमाल करना’।

क्या हमारे दैनिक जीवन में अखबारों और टीवी के अलावा भी आंकड़े सामने आते हैं? क्या घर और कार्यस्थल अपने क्रियाकलापों के दौरान हमें किसी किस्म के आंकड़ों के इस्तेमाल करने की जरूरत पड़ती है? (उदाहरण 3)

उदाहरण 3 : मधु एक प्राथमिक शाला में पढ़ाती है। उसे यकीन था कि अपने दैनिक जीवन में उसका आंकड़ों से सम्पर्क नहीं होता। जब मैंने उससे पूछा कि आमतौर पर उसकी कक्षा में कितने बच्चे हाजिर होते हैं, उसने कहा, “लगभग तीस, नहीं पच्चीस।” कुछ दिनों बाद वह एक कागज लेकर आई जिस पर निम्नलिखित संख्याएं लिखी हुई थीं :

16, 21, 23, 28, 30, 25, 28, 24, 31, 26.

मैंने पूछा, “यह क्या है ?”

उसने कहा, “ये मेरी कक्षा में उपस्थिति के आंकड़े हैं। ये जुलाई के पहले दस कार्य दिवसों में उपस्थित बच्चों की संख्याएं हैं। रोजाना ब्लैकबोर्ड पर उस दिन उपस्थित बच्चों की संख्या लिखी जाती है और मैं इन संख्याओं को लिख लेती हूँ।

मैंने कहा, “यानी आपका आंकड़ों से काफी संपर्क है।”

“हां आप सही कहते हैं। मैं सोच रही थी..... मैं तो इसे, और ऐसे कई, आंकड़े इस्तेमाल करती हूं। उदाहरण के लिए ..।”

और उसने मुझे ऐसे आंकड़ों के कई उदाहरण दिए जिन्हें वह या तो एकत्र करती है या अपने दैनिक कामों में उनके सम्पर्क में आती हैं।

E1) क) मधु ने दैनिक जीवन में आंकड़े इस्तेमाल करने के बारे में अपना विचार बदल लिया। क्या आप उसके वर्तमान मत से सहमत हैं? आपके ख्याल से एक प्राथमिक शाला शिक्षक आम तौर पर किस प्रकार के आंकड़ों को सम्भालती होगी?

ख) आपके विचार से क्या उपस्थिति के आंकड़ों को बेहतर व्यवस्थित किया जा सकता है? यदि हां, तो कैसे?

E2) ऐसे आंकड़ों के दो उदाहरण दीजिए जिन्हें आप अपने काम के दौरान इस्तेमाल करते हैं। एक उदाहरण ऐसे आंकड़ों का भी दीजिए जिन्हें आप अपनी किसी अन्य गतिविधि में इस्तेमाल करते हैं।

इस भाग के उदाहरणों का संबंध उन आंकड़ों से था जिनसे हम बड़ों का सम्पर्क होता है और जिन्हें हमें किसी न किसी रूप में इस्तेमाल करना पड़ता है। किन्तु अभी भी हमारे सामने यह सवाल रहता है :— क्या प्राथमिक शाला के बच्चों को आंकड़ों को इस्तेमाल करने की तकनीकें सीखना जरूरी है? यदि हां, तो हम बतौर शिक्षक उनकी इस क्षमता के विकास में क्या मदद कर सकते हैं? अगले भाग में हम इन्हीं प्रश्नों पर विचार करेंगे।

बच्चे और आंकड़े

हम सब अपने दैनिक जीवन में कई संदर्भों में आंकड़ों का इस्तेमाल करते हैं। बच्चे भी कई बार ऐसी क्रियाकलापों में लगे होते हैं जिनमें उन्हें आंकड़ों का इस्तेमाल करना होता है। आंकड़ों का एक आम स्रोत टेलीविजन है। टेलीविजन इतना प्रचलित हो चुका है कि यह कक्षा के अधिकांश बच्चों की पहुंच में है। बच्चे अपने खेलों व गतिविधियों में भी आंकड़े उत्पन्न करते हैं।

उदाहरण 4 : रोशनारा कक्षा 3 को पढ़ा रही थी। उसने देखा कि उसकी कक्षा के कुछ बच्चे एक खेल खेल रहे थे। खेल कुछ इस प्रकार था जब वे सुबह स्कूल पहुंचते तब प्रत्येक बच्चे उस दिन उपस्थित बच्चों की संख्या का अनुमान लगाते। वे अपने-अपने अनुमान कागज के एक टुकड़े पर लिख लेते। बाद में जब शिक्षिका बोर्ड पर उपस्थित बच्चों की संख्या लिखती तो बच्चे उसका मिलान अपने अनुमान से करते। जिनकी संख्या सही निकलती वे जीतते। पहले तो रोशनारा ने सोचा कि वे गिनकर लिखते हैं। किन्तु बाद में उसे समझ में आया कि संख्याएं तो कक्षा के सारे बच्चों के स्कूल पहुंचने से पहले ही लिख ली जाती थीं। फिर उनमें से एक ने कहा, “हमें पता है कि कल कक्षा में 26 बच्चे आए थे।” यानी वे पिछले दिन की उपस्थिति का हिसाब रखते थे।

रोशनारा ने इस खोज को पूरी कक्षा के लिए एक खेल में बदलने का फैसला किया। बोर्ड पर वह पिछले दो दिनों की उपस्थिति के आंकड़े लिखने लगी। प्रतिदिन सारे बच्चे पिछले दो दिनों की उपस्थिति के आधार पर आज का अंदाजा लगाते और अपना अनुमान रोशनारा को दे देते। अधिकांश दिनों पर कई बच्चों के अंदाजे सही निकलते। एक बच्चे को यह जिम्मेदारी सौंपी गई कि वह एक सप्ताह तक यह दर्ज रखे कि किसने कितनी बार सही अंदाजा लगाया था। सप्ताह के अन्त में रोशनारा ने उस बच्चे को एक टॉफी दी जिसका अंदाजा सबसे अधिक बार सही रहा था।

E3) क) पता कीजिए कि आपके मोहल्ले के बच्चे कौन से टी.वी. कार्यक्रम देखते हैं। इन कार्यक्रमों में यह बताइए कि कब-कब दर्शकों के सामने आंकड़े प्रस्तुत किए जाते हैं।

ख) बच्चों द्वारा खेले जाने वाले दो मैदानी/कक्षागत खेलों को ध्यान से देखिए। पता कीजिए कि क्या इन खेलों में खिलाड़ियों के लिए आंकड़े पैदा होते हैं। यदि हां, तो किस तरह से?

जब मैंने एक और शिक्षक को रोशनारा के खेल के बारे में बताया तो उसने ऐतराज किया, “यह सब तो ठीक है किन्तु मैं अपने 5 वर्षीय बच्चों के लिए कौन सी गतिविधियां करूं? वे तो अंक भी ठीक से नहीं लिख सकते। क्या ऐसी कोई गतिविधि बनाई जा सकती है जो पूरी कक्षा कर सकें?” तब मैंने उसे निम्नलिखित गतिविधियों के बारे में बताया।

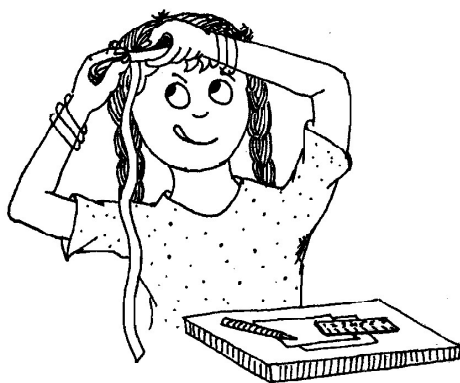
गतिविधि 1 : एक बड़े चार्ट पेपर पर शिक्षक (या बड़े बच्चे) बारह कॉलम बना देते हैं। ये बारह कालम वर्ष के बारह महीनों के संगत हैं। प्रत्येक बच्चे से कहा जाता है कि वह घर से एक माचिस लेकर आए और इस पर कोई निशान बना दे। (एक स्केल बना दिए) प्रत्येक बच्चे अपनी माचिस को अपने जन्म के माह के संगत कॉलम में चिपका देते हैं।

अब शिक्षक बच्चों को निम्नांकित प्रश्नों के बारे में सोचने को प्रेरित कर सकती है :

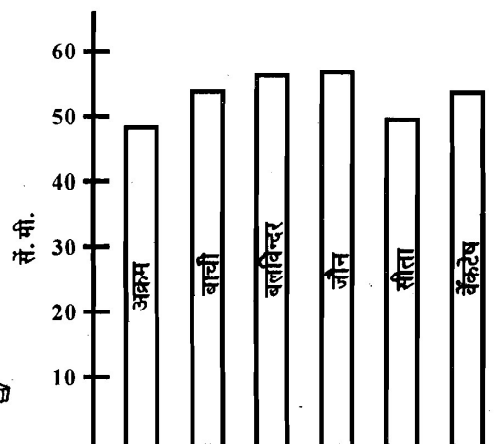
1. किस महीने में सबसे अधिक सालगिरह हैं?
2. किस महीने में सबसे कम सालगिरह हैं?
3. वर्ष में पहले तीन महीनों में कितनी सालगिरह हैं?

बच्चे स्वयं भी अन्य कई प्रश्न पूछ सकते हैं और निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

गतिविधि 2 : शिक्षिका कागज की पतली, लम्बी पट्टियां काटकर बच्चों को दे देती है। प्रत्येक बच्ची इस पट्टी से अपने सिर का घेरा नाप कर कागज पर एक निशान लगाकर दर्शाती है कि यह लम्बाई कितनी है, इसके बाद बच्ची पट्टी की ठीक उतनी लम्बाई काटती है। सारे बच्चे अपनी-अपनी कटी हुई पट्टी पर अपना-अपना नाम लिख देते हैं। इन्हें एक लंबे बोर्ड पर एक ही आधार रेखा (base line) पर चिपका दिया जाता है। चिपकाने के बाद यह चित्र (ख) जैसा दिखता है।



(क) बच्ची अपने सिर का घेरा नापकर निशान लगाते हुए



(ख) पूरी कक्षा की नापी गई पट्टियां

अब आप आंकड़ों के विश्लेषण की प्रक्रिया शुरू कर सकते हैं। (जैसे— किसका सिर किससे छोटा है? कितने बच्चों का सिर बराबर है? आदि)

कक्षा 1 के बच्चों के साथ जब यह गतिविधि की गई तो उन्हें बहुत मजा आया। उन्होंने एक-दूसरे के सिर की साइज और शरीर की साइज के अनुपात आदि के बारे में विश्लेषण किया।

E4) ऊपर दी गई दोनों गतिविधियां छोटे बच्चों के साथ कीजिए और अपने अवलोकन लिखिए।

हमने अभी कई उदाहरण देखें जिनमें बच्चे आंकड़े उत्पन्न करते हैं। हमने इन्हें प्रस्तुत करने के भी कुछ तरीके देखे। सवाल यह है कि हम आंकड़ों को सिर्फ बोलकर प्रस्तुत क्यों नहीं कर देते। और यदि हम आंकड़ों को दर्ज करना चाहते हैं तो इसके क्या अलग-अलग तरीके हो सकते हैं? आइए अब इन सवालों पर विचार करें।

आंकड़ों को दर्ज करना

ऊपर प्रस्तुत उदाहरणों से पता चलता है कि हम सबको दैनिक जीवन में आंकड़ों को इस्तेमाल करने की जरूरत पड़ती है। यहां तक कि बच्चे भी आंकड़ों को इस्तेमाल कर सकते हैं और करते हैं। ये सारे उदाहरण यह भी बताते हैं कि ज्यादातर स्थितियों में आंकड़ों को याददाश्त में रखना ही काफी नहीं है। इन्हें दर्ज भी करना होता है। ऐसा क्यों?

क्या यह सम्भव है कि दर्ज न किया जाए तो इस्तेमाल करने के लिहाज से आंकड़े बहुत ज्यादा हो जाएंगे (जैसे— उदाहरण 3)। दूसरा कारण यह है कि हम अपनी याददाश्त पर पूरी तरह भरोसा नहीं कर सकते, और हो सकता है कि हमें इन आंकड़ों का उपयोग कुछ समय बाद करना पड़े। तीसरा कारण यह है कि शायद हमें ये आंकड़े दूसरों को बताना हो।

क्या आप कोई और कारण सोच सकते हैं? पीछे बताई गई गतिविधियों में हमने देखा कि आंकड़ों को ठीक ढंग से दर्ज करने व प्रस्तुत करने से हमें उनका विश्लेषण करने व निष्कर्ष निकालने में मदद मिलती है। इसके लिए हमें आंकड़ों को इस रूप में दर्ज करके प्रस्तुत करना होगा कि हमें उनसे संबंधित अपने प्रश्नों का उत्तर पाने में मदद मिले। अतः हमें आंकड़ों को दर्ज करने के विशिष्ट तरीके विकसित करने होंगे। इसके लिए कक्षा का कार्य मददगार हो सकता है।

बच्चे किस ढंग से आंकड़ों को दर्ज कर सकते हैं, इसका एक तरीका ठोस वस्तुओं के माध्यम से हो सकता है। ऐसी प्रत्येक ठोस वस्तु एक टोकन (token) है जो किसी वस्तु को दर्शाता है। जैसे— जब आप बैंक से पैसा निकालना चाहते हैं, तो पहले आप लाइन में खड़े होकर अपना चेक देते हैं। इसके बदले आपको एक टोकन मिलता है। फिर आप एक दूसरी खिड़की पर जाते हैं और यह टोकन देकर अपना पैसा प्राप्त कर लेते हैं। टोकन लाइन में आपके स्थान को दर्शाता है। गतिविधि 1 में सालगिरह माह चार्ट में प्रत्येक माचिस एक टोकन है। यह टोकन एक बच्चे को दर्शाता है। दूसरे शब्दों में, इस चार्ट में बच्चों की सालगिरह के वास्तविक आंकड़ों का रिकॉर्ड दर्ज है।

E5) क) दैनिक जीवन की कोई परिस्थिति बताइए जब आंकड़ों को दर्ज करने के लिए ठोस टोकनों का उपयोग किया जाता है।

ख) कक्षा के लिए एक गतिविधि बनाइए जिसमें बच्चे ठोस टोकनों की मदद से आंकड़े दर्ज करें।

आपकों शायद लगे कि ठोस टोकनों का उपयोग बहुत सुविधाजनक नहीं होगा। आपका सोचना सही है क्या आप इस बात का कोई कारण सोच सकते हैं कि हम कक्षा में इस असुविधाजनक विधि को क्यों इस्तेमाल कर रहे हैं? क्या आपके छोटे बच्चों के साथ आंकड़ों को दर्ज करने के अन्य तरीके कागज पेंसिल पर आधारित हैं। उदाहरण के लिए आप देखेंगे कि बच्चे किसी ठोस टोकन की जगह चित्र बना देते हैं। मसलन सालगिरह चार्ट निम्नानुसार भी बनाया जा सकता है :

जनवरी



फरवरी



यह सही है कि बारीकी से चित्र बनाने में बहुत समय लगता है। इसके अलावा आंकड़ों को दर्ज करने के लिहाज से चित्र की बारीकियों की कोई खास जरूरत नहीं होती। अतः एक सरल रेखाचित्र, जो शायद वास्तविक वस्तु जैसा न दिखे, ज्यादा सुविधाजनक होता है। (इस तरह के सरल रेखाचित्र एक तरह के प्रतीक हैं, जिनको आइकन (icon) कहते हैं।) तो उपरोक्त माह चार्ट निम्नानुसार भी बन सकता है :

जनवरी



फरवरी



जब आंकड़ों को और तेज रफ्तार से दर्ज करना हो, तो हम और भी सरल आइकन इस्तेमाल कर सकते हैं। इससे संबंधित एक घटना मेरी एक दोस्त, जो गणित पढ़ाती है, ने मुझे बताया। उसने एक बार देखा कि कुछ बच्चे एक 'खेल' खेल रहे हैं। खेल में करना यह था कि किसी एक जगह से समय से एक निश्चित अवधि में गुजरने वाले वाहनों को गिनना। बच्चे तो वाहनों को जोर से बोल-बोलकर गिनने में लगे हुए थे। तभी एक बच्ची ने खेल में एक संशोधन का सुझाव दिया—कि अलग-अलग तरह के वाहनों (जैसे कारों, स्कूटरों, बसों, आदि) को अलग-अलग गिना जाए। लेकिन खेल का यह रूप जल्दी ही मुश्किल में फंस गया क्योंकि बच्चे अलग-अलग प्रकार के वाहनों की गिनती नहीं रख पा रहे थे। कुछ देर तक देखने के बाद मेरी दोस्त भी उनसे जा मिली और बच्चों को प्रेरित किया कि वे दर्ज करने के अलग-अलग तरीके आजमाएं। एक तरीका यह आजमाया गया कि गिनती कागज पर रखी जाए— कार के लिए क, बस के लिए ब, स्कूटर के लिए स, वगैरह लिखा जाए। उनका दर्ज कुछ इस तरह दिखता था :

क क क स स स क ब स क

ऐसे करते हुए और कुछ बातचीत के दौरान मेरे दोस्त की मदद से बच्चों ने गिनती रखने का एक ज्यादा कारगर तरीका खोज लिया। उन्होंने प्रत्येक किस्म के वाहन के लिए एक अलग लाइन बना ली, और प्रत्येक वाहन के गुजरने पर उपयुक्त लाइन में लकीर बनाने लगे जैसे,

कार |||||

स्कूटर || ||

बस |

अब खेल के अन्त में बच्चों को सिर्फ इतना करना था कि प्रत्येक किस्म के वाहन के सामने खिंची लकीरों को गिन कर पूरी संख्या निकालना था।

प्रत्येक लकीर 'एक' को दर्शाती है तथा सारी लकीरों को गिनकर सारी वस्तुओं की संख्या (या टैली tally) पता लग जाती है। इसलिए इस सरल लकीर आइकन को मिलान लकीर (या टैली बार) भी कह सकते हैं। ऊपर दिए गए उदाहरण में बच्चों ने एक बड़े के मार्गदर्शन में टैली लकीरों का उपयोग एक गतिविधि के माध्यम से खोजा। पूर्णांक संख्या वाले आंकड़ों को दर्ज करने के लिए टैली लकीरें बहुत उपयोगी होती हैं। अधिक सहज बनाने के लिए इन्हे प्रायः पांच-पांच के समूहों में रखा जाता है— हर पांचवी लकीर उससे पहलें खिंची चार लकीरों को काटती हुई बनाई जाती है। जैसे ।।।।।।। दर्ज करने की बजाय, हम लिखेंगे ५५॥ इस तरह से दर्ज करने पर तुरन्त दिख जाता है कि संख्या पांच धन दो, अर्थात् सात है।

E6) आपको ऊपर बताये गये दोनों तरीकों या टैली लकीर में से कौन सा तरीका आसान लगा? किस तरीके में ज्यादा गलतियां होने की गुंजाइश है?

अब तक हमने ठोस वस्तुओं तथा आइकन के माध्यम से आंकड़े दर्ज करने की बात की। क्या इन तरीकों से हर प्रकार के आंकड़ों को दर्ज किया जा सकता है? हमने आइकनों का उपयोग उपस्थित बच्चों की संख्या गिनने, एक माह में आने वाली सालगिरह गिनने और वाहनों को गिनने में किया। किन्तु यदि हम उदाहरण 1 में दिए गए तापमान के आंकड़ों को ठोस वस्तुओं या आइकन के रूप में दर्ज करना चाहें, तो? हम आइकन के उपयोग से 45.6 कैसे दिखा सकते हैं? ऐसे दशमलव भिन्न वाले आंकड़ों के मामले में हम वास्तविक संख्यात्मक मान दर्ज करना होता है। इस तरह के आंकड़ों के इस्तेमाल के बारे में हम अगले पाठ में और चर्चा करेंगे। फिलहाल यहाँ अब एक गतिविधि दी जा रही है जिसे आप अपनी कक्षा में या बच्चों के किसी भी समूह के साथ कर सकते हैं।

E7) बच्चों से कहिए कि वे एक दूसरे का कद नापें। उनकी उम्र को देखते हुए, नापने के लिए वे किसी गैर-मानक पैमाने या फीते या मीटर पैमाने का उपयोग कर सकते हैं। पूरी कक्षा से सुझाव मांगिए कि इन कदों को दर्ज कैसे किया जाए। उन्होंने क्या तरीके सुझाए?

अब यह देखें कि आंकड़ों को उपयुक्त ढंग से प्रस्तुत करने का क्या महत्व है।

आंकड़ों का प्रस्तुतिकरण

हम आंकड़ों को दर्ज करने के कई तरीके देख चुके हैं। कई बार हमें आंकड़े दूसरों को बताने होते हैं। रिकार्डिंग करते समय हो सकता है कि हम अपनी निजी विधियों का इस्तेमाल करें। परन्तु अन्य लोगों को आंकड़े दिखाना हो तो जरूरी है कि हम ऐसे तरीके इस्तेमाल करें जो स्पष्ट हों व आम तौर पर समझी जाती हों। तभी तो अन्य लोग उन निष्कर्षों को सराह सकेंगे जो हम इन आंकड़ों से निकाल रहे हैं।

आंकड़े प्रस्तुत करने का एक आम तरीका तालिका है। उदाहरण 1 में इसी का इस्तेमाल किया गया था, जहां दिन का तापमान दर्शाया गया था। किन्तु इस तरह की तालिका हर प्रकार के आंकड़ों के लिए उपयुक्त नहीं होती। बच्चों की सालगिरह वाले उदाहरण पर एक बार फिर गौर कीजिए। क्या उदाहरण 1 के समान तालिका बनाई जा सकती है।

अब देखें कि इस जानकारी को एकत्र करने का उद्देश्य क्या था। क्या हमें अलग-अलग बच्चों के जन्म माह जानने हैं? या हम यह जानना चाहते हैं कि किसी माह विशेष में कितने बच्चों का जन्म हुआ था? यदि हम दूसरी बात जानना चाहते हैं

तालिका 1

नाम	माह
आरती	फरवरी
मंसूर	जून
बलविंदर	मार्च
चारू	सितम्बर

तालिका 2

माह	बच्चों की संख्या
जनवरी	3
फरवरी	4
मार्च	2
अप्रैल	2
..	..

तो ऊपर बनी तालिका से यह जानकारी स्पष्ट पता नहीं चलती। इसके अलावा, इस तालिका में इतनी सारी पंक्तियां होगी कि इसे आसानी से पढ़ा नहीं जाएगा। अतः इसी जानकारी को माहवार देना ज्यादा उपयोगी होगा (तालिका 2)।

तालिका 2 में हमने दिखाया है कि कोई बात कितनी बार होती है, अर्थात् उसके होने की बारंबारता। इस वजह से इस तरह की तालिका को बारंबारता तालिका (frequency table) कहते हैं। आइए एक उदाहरण के माध्यम से देखते हैं कि बच्चों को ऐसी तालिका की उपयोगिता समझने में मदद कैसे दी जा सकती है।

उदाहरण-5 किसी एक स्कूल में साल में एक बार सब बच्चों को फल बांटे जाते हैं। हर बच्ची से पहले ही पूछ लिया जाता है कि वह केले, आम, संतरे, और अमरुद में से क्या चाहेगी। कक्षा 3 के मॉनीटर ने कक्षा के सारे बच्चों की सूची बनाई और प्रत्येक के नाम के सामने उसकी पसंद के फल का नाम लिख लिया। जब मॉनीटर ने यह सूची शिक्षक को दिखाई तो शिक्षक ने कहा “इसे देखकर यह पता नहीं चलता है कि हमें कितने केले, कितने आम वगैरह चाहिए।” बच्ची ने इसके बारे में सोचा और बारंबारता तालिका बना डाली (तालिका 3)।

तालिका 3	
केले	12
अमरुद	7
आम	10
संतरे	4

उसने तालिका अपनी कक्षा शिक्षक को दे दी। जाहिर है कि फलों की पूरी मांग देने के लिए शिक्षक के लिए पहली सूची के मुकाबले यह तालिका ज्यादा उपयोगी थी।

किन्तु बारंबारता तालिका से हमें यह पता नहीं चलता कि किस बच्ची को कौन सा फल चाहिए। अतः फल बांटने के समय मॉनीटर को अपनी पहली सूची का सहारा लेना पड़ा।

ऊपर का उदाहरण दर्शाता है कि आंकड़ों को कई तरह से प्रस्तुत कर सकते हैं। अपने उद्देश्य के अनुसार हम तय करते हैं कि हम आंकड़ों को किस तरह प्रस्तुत करना चाहेंगे।

E8) क) ऊपर की गतिविधि अपनी कक्षा या बच्चों के समूह के साथ कीजिए। जरूरी नहीं कि आप सचमुच फल बांटे। आप सब बच्चों की पसंद इकट्ठा कर ले और बच्चों से बारंबारता तालिका बनवाएं।

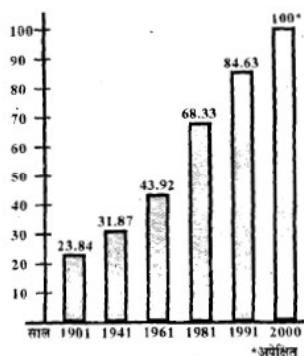
ख) बच्चों ने आंकड़ों को कैसे दर्ज किया व कैसे प्रस्तुत किया?

ग) आपको क्या लगता है कि शब्द ‘बारंबारता तालिका’ किस कक्षा में पहली दफा लाया जाना चाहिए और क्यों?

‘कितने को दर्शाने के लिए संख्या की जगह चित्रात्मक विधि का इस्तेमाल भी किया जा सकता है, जैसा कि गतिविधि 1 व 2 में किया गया था। इसका सबसे सरल तरीका यह है कि प्रत्येक पंक्ति (या कॉलम) में हम एक स्तम्भ बना देते हैं। यह स्तम्भ जितनी संख्या दर्शाता है, उसी अनुपात में उसकी लम्बाई होती है। आंकड़ों को प्रदर्शित करने के इस तरीके को स्तम्भ आरेख (bar diagram) कहते हैं। बारंबारता तालिका की अपेक्षा स्तम्भ आरेख का लाभ यह है कि इसे देखते ही कुछ जानकारी स्पष्ट हो जाती है। ‘किस माह में सबसे ज्यादा सालगिरह हैं?’ जैसे प्रश्नों का उत्तर आरेख को देखते ही मिल जाता है। आपको संख्याओं को पढ़ने या तुलना करने की जरूरत नहीं है।

दूसरी ओर, स्तम्भ आरेख एक तरह की जटिलता भी उत्पन्न कर देते हैं। हमें एक ‘पैमाना चुनना’ होता है दूसरे शब्दों में हमें पहले ये तय करना होता है कि स्तम्भ की कितनी लंबाई एक ईकाई या ‘एक’ को

दर्शाएगा। यह निर्णय आम तौर पर व्यावहारिक कारणों पर निर्भर होता है। जैसे— गतिविधि, 1 में एक बच्चे को निरूपित करने वाली इकाई क्या हैं? एक माचिस। किन्तु यदि हम यह चर्चा करें कि भारत की आबादी प्रत्येक 10 वर्षों में कितनी बढ़ती है तो हमारी आड़ी (क्षैतिज) रेखा का पैमाना 1 से. मी. = 20 वर्ष हो सकता है।



एक स्तंभ आरेख जो भारत की आबादी
(करोड़ों में) दर्शा रहा है।

खड़ी रेखा पर भी आपको इकाई का चुनाव करना होगा। चित्र में 1 से. मी. = 10 करोड़ है। अतः 5 सेमी लम्बाई का स्तम्भ 50 करोड़ दर्शाता है।

E9) बच्चों से फलों की पसंद के आंकड़ों का स्तंभ आरेख बनाने को कहिए। आपने उनसे इकाई के लिए उपयुक्त लम्बाई कैसे चुनवाई? क्या उन्होंने क्षैतिज व खड़ी दोनों रेखाओं पर एक ही इकाई ली? (एक आसान पैमाना 1 सेमी. = 1 व्यक्ति हो सकता है। यदि यह आरेख चार्ट पर बनाना हो तो 3 सेमी. = 1 व्यक्ति पैमाना शायद ज्यादा उपयुक्त रहेगा।)

E10) E6 में अपने द्वारा एकत्रित आंकड़ों का एक स्तंभ आरेख बनाइए। क्षैतिज अक्ष पर उपयुक्त पैमाना क्या होगा? क्या 1 से.मी. = 1 अक्षर उपयुक्त रहेगा? और खड़ी अक्ष के लिए आप क्या पैमाना चुनेंगे?

स्तम्भ आरेख का उपयोग ऐसे आंकड़ों के लिए भी किया जा सकता है जिनमें निरन्तर परिवर्तन होते हैं (जैसे ऊँचाइयाँ)

सारांश

इस पाठ में हमने निम्नलिखित बिन्दुओं पर चर्चा की है।

- हमने 'आंकड़ों' के अर्थ की चर्चा की और देखा कि आंकड़ों का इस्तेमाल सिर्फ अंकगणित करना नहीं है।
- हमने देखा कि प्राथमिक शाला के बच्चे अपने आप दैनिक जीवन में आंकड़ों का इस्तेमाल करते हैं और कर सकते हैं।
- हमने आंकड़े एकत्र करने व प्रस्तुत करने से संबंधित कुछ ऐसी गतिविधियाँ देखी जो विभिन्न उम्र व क्षमताओं वाले बच्चे कक्षा में कर सकते हैं।
- हमने बच्चों के लिए ठोस टोकन, आइकनों, और संख्याओं के माध्यम से आंकड़ें दर्ज करने की कुछ गतिविधियों की भी चर्चा की।
- हमने यह भी देखा कि बच्चों को आंकड़े प्रस्तुत करने के लिए तालिका व स्तंभ आरेख से कैसे परिचित कराया जाए।

